

307226

21
1973

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

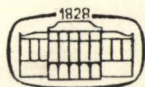
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR,
PÁL LÉNÁRD ÉS SZALAY SÁNDOR
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI
JÁNOSSY LAJOS

XXI. KÖTET

1. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST 1973

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klaszszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10—10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóiratról évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Jánossy Lajos akadémikus
1121 Budapest XII. Konkoly Thege út
Központi Fizikai Kutató Intézet

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 48 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, 1011 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmi ismertetőt írjanak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közöljék. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írjanak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

EGYKRISTÁLYOK ELŐÁLLÍTÁSA*

TARJÁN IMRE

Biofizikai Intézet, Budapest

1. A francia Verneuil 1891-ben ékszerek és óracsapágyak számára korund, ill. rubin és zafír kristályokat növesztett. Őt szokás említeni elsőként, aki nem elégedve meg a természet nyújtotta lehetőségekkel, tudatosan igyekezett előállítani gyakorlati cél érdekében előírt tulajdonságú kristályokat. — Új periódus vette kezdetét a II. világháború alatt, amikor a Bell Telefon Társaság laboratóriumában kifejlesztették néhány, híradástechnikai célra alkalmas piezoelektromos kristály növesztési eljárását, és ezeket a kristályokat azóta is évi sok tonna mennyiségben gyártják. — A negyvenes évek végén elindult a félvezető anyagok felderítése és kristályainak egyre igényesebb előállítása. Nem sokkal később a magsugárzások mérésére szolgáló egykristályok kifejlesztése jelentett újabb feladatot. — 1960 óta a szilárdtest-laserek, fénymodulátorok, fénydeflektorok, memóriaanyagok stb. előállítása serkenti a kristálynövesztőket. Ugyancsak sokféle igény jelentkezik változatlanul a mikrohullámú technika vonatkozásában is.

I. táblázat

Csapágykövek, ékkövek stb.: korund (rubin, zafír) rutil, berill, spinellek, gránátok.

Elektroakusztikai átalakítók: kvarc, tartarátok, ADP, titanátok.

Frekvenciastabilizátor: kvarc.

Optikai prizmák, lencsék stb.: kvarc, alkali-, ezüst- és tallo-halogenidek, alkaliföldfém-fluoridok.

Polarizátorok: nátrium-nitrát, magnézium-fluorid.

Sugárdetektorok: nátrium-, cézium-, kalcium-jodid, stilben, antracén.

Félvezetők: germánium, szilícium, gallium-arszenid és más III—V, valamint II—IV vegyületek.

Szilárdtest-laserek: rubin, gránátok, molibdátok, volframátok, alkaliföldfém-fluoridok, gallium-arszenid és más III—V vegyületek.

Nem-lineáris optika: ADP, KDP, KD*P, kvarc.

Fénymodulátorok, deflektorok: ADP, KDP, KD*P, niobátok, tantalátok, titanátok, molibdátok, kvarc, II—VI és III—V vegyületek, kupro-klorid, tellur-dioxid, arzén-triszulfid, jódsav; Y—Fe-gránát, króm-tribromid.

Memóriák: ferritek, gránátok, kettős fluoridok, átmenetifém-halogenidek, európium-oxid és szele-nid, vas-borát; niobátok, titanátok; alkali-halogenidek, alkaliföldfém-fluoridok és titanátok.

Mikrohullámú alkatrészek: ferritek, gránátok.

Az I. táblázatban feltüntettem néhány gyakorlati jelentőségű területet az egykristályok alkalmazásával kapcsolatban, nem törekedve teljességre a kristályos anyagok felsorolását illetően sem. — A táblázathoz néhány megjegyzést kívánok fűzni:

* Akadémiai székfoglaló előadás. 1971. május 31.

a) *Félvezető eszközök* készítésére elegykristályok is (pl. Ge—Si) előnyösen használhatók. — Epitaxiális hordozóként a félvezetők esetében főleg korund és spinell kristályokat alkalmaznak.

b) *A nem-lineáris optika* szempontjából azok a kristályok jönnek szóba, amelyek nem rendelkeznek szimmetria-centrummal.

c) *A fénymodulátorok és deflektorok* számára a piezoelektromos és a magneto-optikai anyagok érdekesek. (Ezeket a táblázatban pontosvessző választja el egymástól.)

d) *A memória-anyagokat* 3 csoportra osztottuk: mágneses és magnetooptikai, elektrooptikai, fotokromikus vagy színcentrum memóriák. (Ezeket is a táblázatban pontosvessző választja el egymástól.)

Valamennyi alkalmazási területen az elmúlt években több irányú kutatómunka alakult ki: megfelelő kristálynövesztési eljárások kifejlesztése, a kész kristályok megmunkálása, tulajdonságaik ellenőrzése. A legtöbb kutatóhelyen ezekhez a vizsgálatokhoz a kristályos fázis képződése, növekedése, a kristályszerkezet és a kristályhibák tanulmányozása és sok más fundamentális kutatás is kapcsolódott. A különböző területek egymásra utalva, egymást serkentve fejlődtek és ez az egészséges szimbiozis méginkább nélkülözhetetlen lesz a jövőben. A továbbiakban csak az egykristályok előállításának egyes kérdéseivel foglalkozom, de közben utalok néhány alapkutatási problémára is.

2. Amikor az első mesterséges kristályok elkészültek, nagy volt az öröm, hogy sikerült utánozni a természetet, pótolni fukarságát és hiányait. Az idők folyamán azonban az igények nemcsak a mennyiség és a sokféleség, hanem a minőség irányában is nőttek. Egyre több és szigorúbb követelmény lépett fel a *kristályok tisztaságát és tökéletességét* illetően. A tökéletességgel, pontosabban a hibákkal kapcsolatban elsősorban a különböző eredetű és természetű kémiai és fizikai inhomogenitásokra, a nagy koncentrációkban jelen levő pont-, vonal- és felületi hibákra, valamint a sztoichiometriai aránytól való eltérésekre kell gondolnunk.

A tisztaságra és tökéletességre vonatkozó tulajdonságokat *általános vagy primér tulajdonságoknak* nevezik: általánosoknak, mert ezekkel az előállított kristályoknak az alkalmazás területétől és módjától függetlenül rendelkezniük kell; priméréknek, mert ezek határozzák meg a konkrét felhasználás szempontjából fontos *speciális vagy szekunder jellemzőket* (pl. laserek esetében a hatásfokot, fénymodulátorok esetén a moduláció hatásosságát jellemző mennyiséget).

3. Az utolsó években a kristálynövesztési eljárások száma nagymértékben megnőtt. A II. táblázathoz alapul R. A. Laudise felosztása [1] szolgált, amelyet módosítottam és kiegészítettem.

A felosztás gyakorlati és kevésbé elvi alapon történt. Ha ui. az adalékanyagot és a szennyezéseket is komponenseknek tekintjük, akkor valamennyi módszer többkomponenses és a különbség a két eljárás csoport között csupán abban áll, hogy az egyik esetben az oldószert, a másikon az oldott anyagot kristályosítjuk. A felosztás különösen bizonytalanná válik olyan esetekben, amikor pl. nagy az adalékanyag koncentrációja, vagy nagymértékben oldódó anyagnak oldatból való növesztéséről van szó.

Mindkét eljárás-csoporton belül különbséget szokás tenni *konzervatív és nem-konzervatív rendszerek, ill. eljárások* között. Az egykomponenses eljárásoknál ezt a felosztási lehetőséget fel is használtuk. Egy rendszert (eljárást) a kristálynövesztés

II. táblázat

EGYKOMPONENSES ELJÁRÁSOK

I. Szilárd fázisból való növesztés (rekrisztallizáció)

- A) Deformálás — hőkezelés
- B) Polimorf fázisátalakulás
- C) Szinterelés

II. Olvadékból való növesztés

- A) Konzervatív módszerek
 - 1. Tégelyes növesztés (Bridgman, Stöber)
 - 2. Húzás (Kyropoulos, Czochralski)
- B) Nem-konzervatív módszerek
 - 1. Tégelyes zónás növesztés
 - 2. Tégelymentes növesztés
 - a) Lebegőzónás olvasztás
 - b) Verneuil módszer

III. Gőzből való növesztés

- A) Szublimáció — kondenzáció

TÖBBKOMPONENSES MÓDSZEREK

I. Szilárd oldatból való növesztés

II. Folyékony oldatból való növesztés

- A) Fizikai eljárások
 - 1. Közös körülmények között (kb. 100 °C-ig és néhány atm-ig)
 - a) Vizes oldat } párologtatás,
 - b) Nem-vizes oldat } hőmérsékletcsökkentés
 - 2. Különleges körülmények között
 - a) Magas hőmérsékleten } hőmérsékletcsökkentés,
 - (olvadék oldószerek) } olvadékszóna vándorlás
 - b) Nagy nyomáson (hidrotermális eljárás)

B) Kémiai eljárások

III. Gőz-, ill. gáz-fázisból való növesztés

- A) Egyirányú kémiai reakcióval
- B) Megfordítható kémiai reakcióval (transzport)

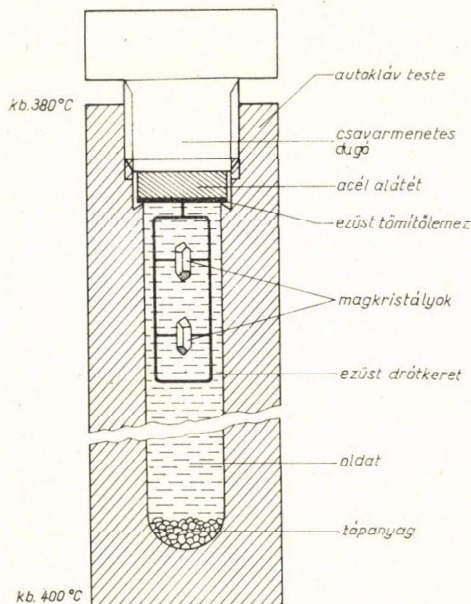
IV. Gőz-folyadék rendszerből való növesztés

szempontjából konzervatívnak nevezünk, ha a tápfázis (pl. az olvadék) mennyisége és összetétele *csak* a kristályosodás következtében változik. Azokban az esetekben viszont, amikor a tápfázis mennyisége és összetétele *más* folyamatok révén is változik, nem konzervatív rendszerről (eljárásról) beszélünk. A nem-konzervatív eljárás tipikus példája a zónás olvasztás, amikor pl. egy rúd alakú mintának csak egy részét olvasztjuk meg és ezt az olvadékszónát végighajtjuk a rúd mentén. Ekkor a kristályosodással egy időben az olvadékba folyton-folyvást új anyag is bekerül, beolvad. A többkomponenses eljárások közül rendszerint konzervatív pl. a vizes oldatokból hőmérséklet csökkentéssel végzett kristályosítás, de ez is lehet nem-konzervatív, ha az ún. cirkulációs eljárást alkalmazzuk, amikor az oldatból ki-kristályosodott anyagot állandóan pótoljuk.

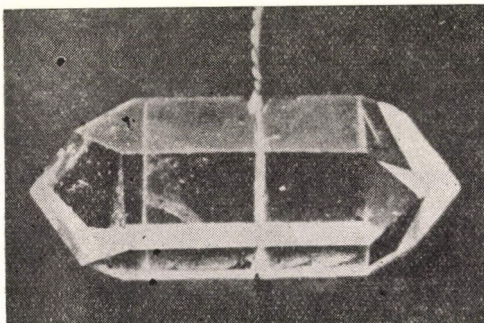
Az eljárások közül egyeseket — kissé visszatekintve a múltba — saját vizsgálatainkon keresztül fogok ismertetni és ezután rátérek a különböző módszerek értékelésére.

4. Egykristályok előállításával a 40-es évek végétől foglalkozom, előbb kb. 2 éven át Gyulai Zoltán munkatársaként, majd ezt követően elsősorban Turchányi György, Voszka Rudolf, Újhelyi Sándor és újabban Raksányi Kund munkatársaimmal. A II. táblázatban nyíllal megjelöltem azokat az eljárásokat, amelyekkel kapcsolatban tapasztalataink és eredményeink vannak.

1. 1950-ben a Távközlési Kutatási Intézet megbízásából Gyulai Zoltánnal, Zimonyi Gyulával és Újhelyi Sándorral nemzetközileg is az elsők között, kidolgoztuk kvarc egykristályok gyakorlatilag is felhasználható hidrotermális növesztését.



1. ábra. Vázlat a kvarckristályok növesztéséhez



2. ábra. Kvarckristály (hossza kb. 2 cm)

feltételek éppen az előzőekben megadott hőmérsékleti és nyomási viszonyok között állnak fenn.

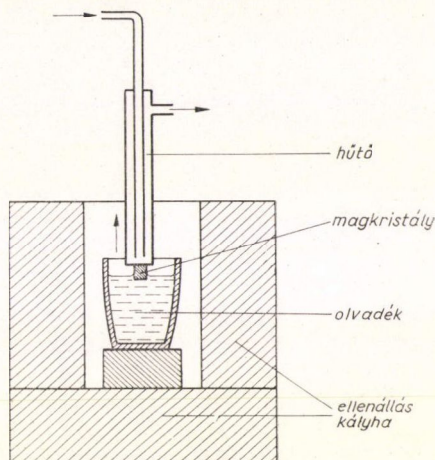
2. Ugyancsak az 50-es évek elején különböző *alkalihalogenid* kristályokat állítottunk elő olvadékból, részben a kristálynövekedés és a kristályhibák (valamint

tuk kvarc egykristályok gyakorlatilag is felhasználható hidrotermális növesztését. A növesztést 30–40 cm hosszú, 2–3 cm belső átmérőjű (egyes esetekben nagyobb méretű) különleges acélból készült autoklávokban végeztük (1. ábra). Tápanyagként kvarckristálydarabkákat, ill. kvarcitot v. homokot használtunk, amelyeket az autokláv alsó melegebb részén helyeztünk el. A magkristályok (különböző orientációjú metszetek) az autokláv felső hidegebb tartományában függtek. Az alkalmazott vizes oldat néhány százalékban nátrium-karbonátot és nátrium-hidroxidot (esetenként nátrium-foszfátot is) tartalmazott. A növesztés számára kedvező feltételek állnak fenn, ha pl. az alsó hőmérséklet kb. 400 °C, a felső kb. 380 °C, az autokláv belsejében uralkodó nyomás pedig 1000–1500 atm, amely 75–85%-os szobahőmérsékletű töltettel érhető el. Ilyen körülmények között kb. 1 mm/nap Z-tengelyirányú maximális növekedési sebesség mellett jó minőségű növekményt értünk el (2. ábra).

A munkát Nagy János munkatársammal folytattam, és pedig egyes paraméterek (elsősorban a hőmérséklet és a nyomás) szerepére vonatkozólag végeztünk rendszeres vizsgálatokat. Ezek során magyarázatot adtunk bizonyos anomáliákra, amelyek az előző vizsgálatok során jelentkeztek, és egyben beigazolódott, hogy az adott konstrukcionális körülmények között a növekedés számára legkedvezőbb

a színcentrumok) vizsgálata céljából, részben pedig az infravörös és az ultrabolya spektroszkópiában használatos optikai eszközök (prizmák, ablakok stb.) számára. Az olvadékból való kristálynövesztésnek már akkor is több változata volt ismeretes. Kísérleteinkben főként a *Kyropoulos-féle húzási eljárást* alkalmaztuk. Lényegét a 3. ábra szemlélteti. Kettős falú, alul zárt fémcső végére kristálymagot erősítünk és azt az olvadék felületére bocsátjuk. A kettős falú csövön levegőt vagy vizet áramoltatunk keresztül és így a magon át állandó, szabályozható hővezetés biztosítható. A kristályt lassan emeljük, miközben egyre több olvadék fagy rá.

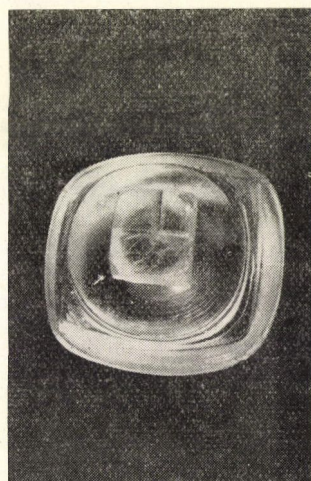
A kristályok méretének növelése és minőségének javítása érdekében többféle kályhakonstrukciót, magbefogást, hűtő- és forgatórendszert, továbbá különböző utólagos hőkezelési eljárást tanulmányoztunk, ill. dolgoztunk ki. Az előállított legnagyobb hengeres kristályok átmérője kb. 15 cm, magassága kb. 10 cm volt. Ilyet mutat a 4. ábra. (A hengeres kristály tetején látható nyúlvány magkristályként szolgált.) A kristályok egyenletesen tükröző sík hasadási felülettel rendelkező, optikailag homogén egykristályok voltak. — Az 5. ábrán olyan kristályok egyikét látjuk, amelyen a hengeres forma váltakozik a mag orientációjának megfelelő poliéderes formával. E példányok előállítása révén sikerült kísérletileg tisztáznunk egy, akkor még vitás növekedési kérdést: milyen körülmények kö-



3. ábra. Vázlat a Kyropoulos-féle módszerhez



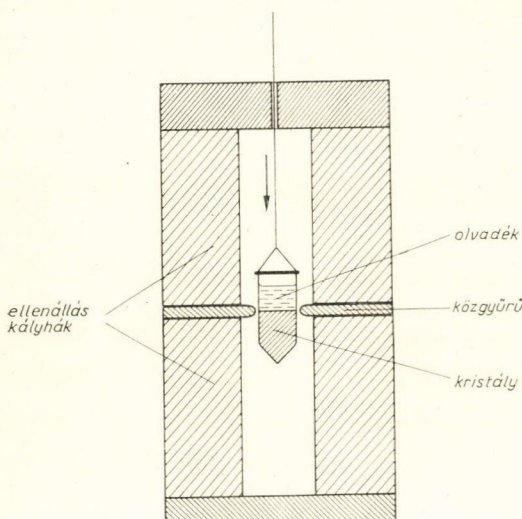
4. ábra. NaCl kristály
(átmérője kb. 15 cm)



5. ábra. Váltakozva hengeresen
és hasábosan növesztett NaCl
kristály

zött veszi fel a növekvő kristály az izoterm felületek alakját és milyen esetekben az un. egyensúlyi formát? A válasz egyszerű: ha a hőmérsékletgradiens a fázishatárnál elég nagy, a kristály az izoterm felület alakját (jelen esetben a hengeres formát) veszi fel, ha viszont valamilyen módon, pl. az olvadék megfelelő mozgatásával az izotermák rendjét megzavarjuk és a kristályt közel olvadásponton levő olvadék öblögeti körül, a poliédes egyensúlyi forma nő. Az ábrán látható esetben is a hengeres részek nyugalomban levő, a hasábosak pedig „hullámzó” olvadékból nőttek.

3. Ugyancsak olvadékból növesztettünk néhány tized súlyszázalékban *talliumot tartalmazó NaI, KI, CsI, kristályokat*. Az ilyen kristályok radioaktív sugárzások hatására szcintillálnak és — egy 1948-ban megjelent cikk alapján — főként γ -sugárzás mérésére, ill. γ -spektroszkópiai célokra felhasználhatók. Növesztési eljárásaink részben a *Kyropoulos*-, de főként a *Bridgman-elven* alapultak. Az utóbbi lényegét a 6. ábra szemlélteti. A kristályosítandó anyag alul csúcsban (vagy kapillárisban)



6. ábra. Vázlat a Bridgman-féle módszerhez

végződő fedett, vagy teljesen zárt tégelybe kerül, majd az anyagot megolvasztás után az olvadáspontnál alacsonyabb hőmérsékletű térbe eresztjük le. A fagyás a csúcsban indul el és fokozatosan ráterjed az olvadékra, amint a tégely süllyed. A csúcs a monokristályos növekedés kialakulását segíti elő. A kályha felső és alsó tere közötti hőmérsékletgradienst, amelynek a növekmény minőségében lényeges szerepe van, egyrészt a fűtőelemek megfelelő kialakításával, másrészt fémből vagy szigetelőből készült gyűrű közbehelyezésével is formálhatjuk.

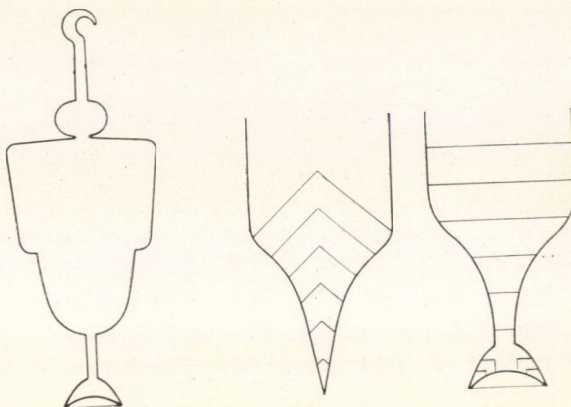
Munkáink során számos kísérlettechnikai problémát oldottunk meg. Pl. olyan kerámiatartóra szerelt fűtőelemeket szerkesztettünk, amelyekből különböző méretű

és hőmérséklet-eloszlású, tehát különböző kísérleti feltételeket kielégítő és más esetekben is jól felhasználható ellenálláskályhák építhetők. A hőmérséklet szabályozására egyszerű és olcsó megoldásokat választottunk, ill. dolgoztunk ki, amelyek segítségével a hőmérséklet-változásokat a kb. 800 °C hőmérsékletű kristályosító térben is 0,01 fok/óra érték alá csökkenthetjük.

A zárt térben való növesztés céljára a 7. ábra bal oldalán látható kvarcból készült tégelytípust dolgoztuk ki, amely más kristályok esetében is felhasználható. Előnye, hogy benne a kész kristály feszülésmentesen hűthető le. A növesztés befejeztekor a kristály a tégely alsó felében helyezkedik el, és hőmérséklete nem sokkal alacsonyabb az olvadáspontnál. A tégely fala okozta feszülések elkerülése céljából az egész kályhát megfordítjuk és a tégelyt alsó végénél fogva felakasztva, hirtelen addig melegítjük, míg a kristály a tégely faláról leolvad és a tégely szélesebb részébe esik, ahol feszülésmentesen hűlhet le. A leolvasztásnál keletkező olvadék sem okoz

zavart, mert a gömb alakú toldalékban gyűlik össze. A tégely másik előnye az oltócsúcs sajátos kiképzésével függ össze. A jobb oldali ábrákon egymás mellett látható a szokásos és az általunk alkalmazott megoldás. Feltüntettük egyúttal a két esetben leginkább előforduló kristályorientációkat is. A felhasználás szempontjából a szélső jobb oldali forma előnyösebb, mert így a kész kristályból szükség esetén nagyobb darab hasítható.

Tapasztalataink szerint a kristályok spektroszkópiai minőségét nem befolyásolja kedvezőtlenül, ha a növesztést szobalevegőn végezzük, ami egyébként jódkiváláshoz és oxigén tartalmú szennyezések beépüléséhez vezet. (Lehetséges, hogy bizonyos mennyiségű oxigén tartalmú szennyeződés még kedvezően is hat.) Ezért tömeggyártás céljára (mind a növesztéskor, mind pedig a temperáláskor) a zárt



7. ábra. Tégelyformák

kvarctégely helyett zománcmentes porcelánból készült fedett tégelyt használtunk. Ezt az egyszerűbb és olcsóbb eljárást 13 cm kristályátmérőig fejlesztettük ki.

A kristályok γ -spektroszkópiai feloldóképessége hőkezeléssel javítható és 10^6 R dózis hatására sem szenved irreverzibilis változást. A növesztésen kívül eljárást dolgoztunk ki a kristályok megmunkálására, montírozására és speciális mérési célokra szolgáló kristályok előállítására is (8. ábra). Kristályaink minőségét a tömeggyártás szempontjából statisztikailag is értékeltük. A közepes méretű (kb. 4 cm átmérőjű, 4 cm hosszú) kristályaink kb. 70%-a kielégíti a viszonylag magas spektroszkópiai igényeket, a többi is felhasználható azonban γ -sugárzás mérésére az egészségügy, vagy az ipar különböző területein.

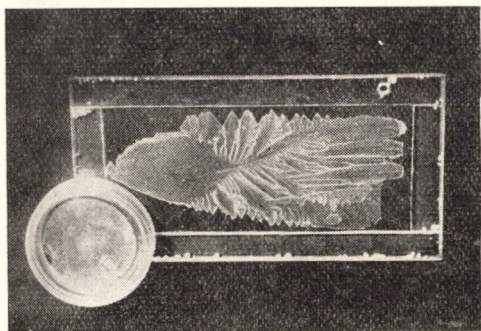
Eredményeinket a Gamma Művek vette át és az általunk bevezetett módszerrel gyártott kristályai a Prágában 1962-ben tartott nemzetközi minőségi versenyen első helyezést értek el.

4. A szerves szcintillátorok közül főleg β -sugárzás mérésére szolgáló naphthalin és antracén kristályokat növesztettünk ugyancsak a *Bridgman-eljárás* alapján. Tökéletesítettük az addig közölt tisztítási, növesztési, valamint hűtési módszereket és eljárást dolgoztunk ki a kristályok megmunkálására is. Kristályainkat magfizikai kutatásokban számos helyen felhasználták itthon és külföldön.

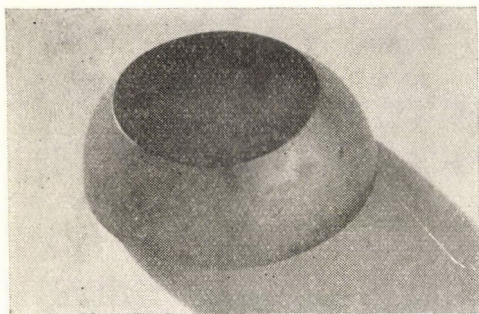


8. ábra. NaI(Tl) kristály foglatban (átmérője kb. 8 cm)

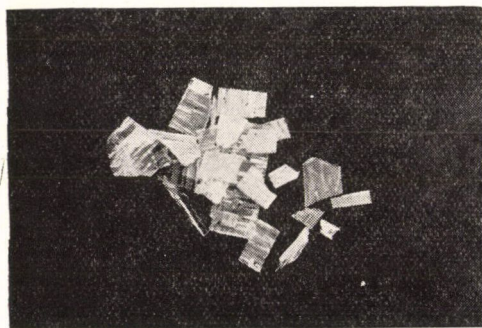
Külön tesztek említést a párologtatási módszerrel előállított 8–12 cm² területű, 0,1–0,2 mm vastag extrém tisztaságú *antracén lemezeinkről*, amelyek előnyösen használhatók speciális magfizikai mérések céljaira (9. ábra). Ezek megmunkálására is eljárást dolgoztunk ki. E munkákban *Krajsovszky József* is részt vett. Tudomásom szerint hasonló méretű és minőségű detektorokat mások nem állítottak elő és valószínűleg ezzel függ össze az, hogy velük kapcsolatban külföldről gyakran



9. ábra. Antracénlemezek plexiüveg alatt



10. ábra. KRS kristály (átmérője kb. 5 cm)



11. ábra. CdS lemezek (hosszúságuk 4–12 mm)

keresnek meg bennünket. Az eljárás is a maga idejében új gondolatot valószínűsített meg, és pedig a *gőzfázisból való kristályhúzást*. Ezáltal sikerült mind a magosodást, mind pedig a növesztési sebességet kedvezően befolyásolni.

5. Említést tesztek még néhány nem közölt eredményről. Előállítottunk (először *Smakula* által növesztett és az irodalomban KRS néven szereplő) kb. 40 μ -ig átengedő *tallohalogenid* elegykristályokat (10. ábra). Eljárásunk lehetővé tette, hogy az eutektikus összetételt jól megközelítő, optikailag kiváló minőségű kristályokat nyerjünk.

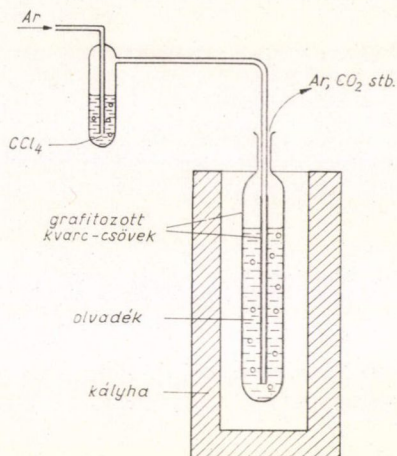
Fény (látható és UV), valamint röntgensugárzás mérésére fotoellenállásként *CdS kristálylemezkeket* is növesztettünk *Frerichs* módszerével. Ennek lényege, hogy kadmimum és kénhidrogén gőzök keverékét állítjuk elő 900–1000 °C-on és a keveréket hidrogéngáz segítségével 700–800 °C hőmérsékletű tartományba áramoltatjuk, ahol kedvező feltételek esetén lemez alakú kristályok képződnek, illetve növekednek.

Az előzőekben felsorolt eredményeinket — mint említettem — főként az 50-es években értük el. Az objektív feltételek fokozódó hiányosságai miatt vizsgálataink súlypontját kénytelenek voltunk más, addig kisebb intenzitással művelt, kevésbé hely- és energiaigényes területekre áthelyezni. A kristálynövesztés vonatkozásában csak „válogatott” kérdésekkel foglalkoztunk. Ezek közül kiemelem a különböző nagy tisztaságú alkali-halogenid egykristályok előállítását a színcentrumokkal kapcsolatos vizsgálataink számára.

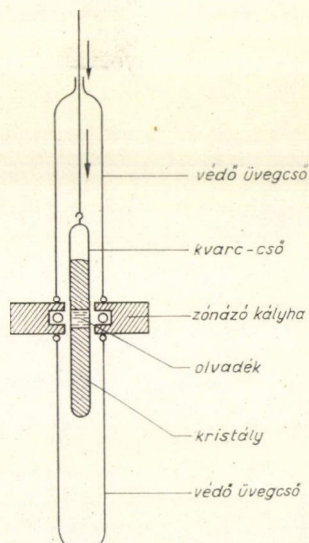
6. Az alkalihalogenidekről hosszú ideig az volt a vélemény, hogy az olvadékból előállított kristályaik viszonylag tiszták. Hibaszerkezetüknek részünkről is végzett sokoldalú tanulmányozása azonban egyre kétségesebbé tette e vélemény helyességét. *Nagy tisztaságú alkalihalogenid* kristályok előállítása az utóbbi években külföldön is sürgős igényként jelentkezett. A problémát különösen az oxigén tartalmú szubsztitúciósan beépült szennyezések és az ugyancsak szubsztitúciósan beépült kétvegyértékű fémionok képezik.

Tiszta alkalihalogenid kristályok előállítására és a szennyezések koncentrációjának meghatározására, beépülési módjaik, egymással és a gazdarács hibáival való kölcsönhatásaik tanulmányozására számos módszert alkalmaztunk, ill. dolgoztunk ki. A leghatásosabb tisztítási eljárásunk két lépésből áll. Az első lépésben kloridok esetén klór (pontosabban: pl. széntetraklorid), bromidok esetén bróm (pontosabban: bromoform) stb. gőzöket buborékoltatunk a vékony grafitréteggel bevont kvarccsőben levő olvadékon keresztül (12. ábra). Ezáltal hatásosan csökkenthető az oxigén tartalmú szennyezések koncentrációja és elérhetjük, hogy az olvadék, ill. a megszilárdult anyag nem tapad a kvarcüveghez (a meniszkusz felülről nézve domború), ami kedvező körülményt biztosít a további eljárás számára. — A második lépésben KCl, KBr, RbBr kristályok esetében zónaolvasztásos tisztítást alkalmaztunk (13. ábra) és többszöri zónázás után a kvarccampullába zárt mintát ugyanott egykristállyá növesztettük. A kétértékű fémekkel kapcsolatban 10^{-9} mol/mol-nál kisebb szennyezettségig sikerült eljutnunk. A grafitréteg, amely az eljárás első részében a kvarccső belső falát borítja, belekerül ugyan az olvadékba, de végső soron zavart nem okoz, mert zónázáskor a zónázott anyag tetején összegyűlik. A grafitozás jelentősége abban áll, hogy megakadályozza az olvadéknak a kvarccal való érintkezését a tisztítás kezdeti szakaszában, amikor az olvadék még nedvesíti a kvarcot. Később, amikor a grafit már levált a kvarccsőről, a kvarc nem tapadó olvadékkal érintkezik, amely kevésbé vesz fel szennyezést a kvarcból.

A zónázás nem minden esetben bizonyult hatásosnak. Nem tisztítható zónázással pl. a NaCl a kalcium szennyezéstől, minthogy ebben az esetben az eloszlási tényező értéke közel 1. Ebben az esetben a különböző kémiai és fizikai módszerek közül a leghatásosabbnak mutatkozott az ioncsere. Ezután került sor az előbb



12. ábra. Vázlat az alkalihalogenidek tisztításához (széntetrakloridos kezelés)



13. ábra. Alkalihalogenidek zónázása

ismertetett klórozásra. Ezzel a módszerrel NaCl esetén 10^{-7} mol/mol tisztaságot értünk el. Jelenleg az alkali-halogenidek területén nemzetközileg is a legtisztább egykristályokkal rendelkezünk, és több külföldi intézetből (szovjet és amerikai intézetektől is) érkezik hozzánk megkeresés.

A nagy tisztaságú alkali-halogenid kristályok tulajdonságai sok tekintetben eltérőek az ún. névlegesen tiszta kristályokétól és több régi megfigyelés új megvilágításba kerül, új értelmezést kap. A közelmúltban a színcentrumok vonatkozásában néhány érdekes eredményt értünk el, amelyekkel kapcsolatban most csupán egy folyamatban levő vizsgálatra szeretnék utalni. Úgy látszik, hogy a színcentrumokat tartalmazó kristályok többféle módon is felhasználhatók optikai információ-tárolásra. Amiről most említést teszek, annak lényege abban áll, hogy adott kristály-tartományban egy bizonyos centrumfajta a megfelelő hullámhosszúságú fény hatására átalakul az előbbitől eltérően abszorbeáló centrumfajttá. Ilyen módon történik az információ „beírása”. „Kiolvasáskor” az új centrumfajta abszorpciós sávjában világítjuk meg a kristályt. Célunk, hogy módszerünkkel 10^8 bit/cm² nagyságrendű információsűrűséget érjünk el.

5. Ezek után visszatérek a növesztési módszereket tartalmazó táblázathoz és megkísérlem az egyes eljárásokat nagy vonásokban értékelni.

Az egykomponenses eljárások főbb vonásai:

1. A tápfázisban (amely szilárd, folyékony vagy gőznemű lehet) a növesztendő kristály anyaga dominál, ezért kevesebb a lehetőség idegen anyagok beépülésére.

2. Ugyancsak az egykomponenses jellegből következik, hogy a növekedési határrétegben a diffúzió nem játszik lényeges szerepet, ezért nagyobb növekedési sebességek alkalmazhatók.

3. Kevesebb gondot okoz a felhős, dendrites és más hibás növekedés elkerülése.

4. Nincs szükség előzőleg hosszadalmas és fáradságos tanulmányok elvégzésére, mint amilyen a több-komponenses eljárásoknál pl. a fázisegyensúlyok, oldhatósági viszonyok megismerése.

5. Gyors eredmények érhetők el; pl. kristályhúzással esetleg néhány óra alatt akkora kristály növeszthető, amelyen már elvégezhető különböző krisztallográfiai vizsgálatok. Ez a körülmény igen előnyös akkor, ha új anyagok után kutatunk.

6. Hátrány származhat viszont abból, hogy a növesztés, a rekrisztallizációs eljárástól eltekintve, viszonylag magas hőmérsékleten megy végbe, amely körülmény növeli a kristályosító térben levő szerkezeti anyagok és az atmoszféra szennyező hatását. Ez a hátrány is elkerülhető azonban a tégelymentes eljárásoknál, amelyek közül különösen elterjedt és magas színvonalra fejlődött az ún. lebegő zónázás. (Ebben az esetben az olvadákszónát a felületi feszültség tartja a helyén.) Újabban több húzásos eljárást is kidolgoztak, amely a tégelymentessel egyenértékű.

7. A rekrisztallizációs eljárások sajnos gyakorlati szempontból jelenleg még kevésbé kidolgozottak, pedig számos előnyük van: nem igényelnek túl magas hőmérsékleteket és a további szennyeződés is viszonylag egyszerűen elkerülhető. A fő nehézséget jelenleg az okozza, hogy nem tudjuk eléggé kézben tartani a magszámot. Érdemes lenne számba venni azokat az ötleteket és tapasztalatokat, amelyeket más eljárások esetén sikerrel alkalmazunk. Ilyenek lennének pl. a *Bridgman* módszerhez hasonló és nagy hőmérsékletgradiensben alapuló eljárások, vagy a magok kiszűrésére és az iktelenítésre vonatkozó módszerek és tapasztalatok.

A *többkomponenses eljárások* legfontosabb előnye, hogy lehetővé teszik a növesztésnek az olvadáspontnál alacsonyabb hőmérsékleten való végrehajtását. Alkalmazásuk tehát főként a következő esetekben indokolt:

- alacsony hőmérsékletű módosulat előállítás;
 - ha a növesztendő anyag inkongruensen olvad, vagy olvadáskor bomlik;
 - ha a növesztendő anyag göznyomása magasabb hőmérsékleten kedvezőtlen kísérleti feltételeket teremt;
 - ha más módon nem kerülhetők el egyszerűen a vakanciákat, diszlokációkat, kisszögű szemcsehatárokat keltő termikus feszülések;
 - ha más módon nem küszöbölhetők ki a magas hőmérséklettel együttjáró fokozott szennyeződés-lehetőségek és kémiai reakciók a kristályosító edénnyel, valamint az atmoszférával;
 - ha nem lehetséges magas hőmérsékleten megvalósítani a kívánt adalékanyag eloszlását, pl. azért, mert az adalékanyag nagymértékben illékony.

E rövid áttekintésből is következik, hogy a többkomponenses eljárásokat csak szükségéből alkalmazzuk. Jelenleg az a helyzet, hogy az esetek nagy részében a legjobb eredményeket olvadékból való növesztéssel érjük el és érdemes külön figyelmet fordítani a húzásos eljárásokra. Számos előnyük miatt az utóbbi években a magas olvadáspontú oxid-kristályok előállításával kapcsolatban sok gondot fordítottak fejlesztésükre és ennek kapcsán sikerült tisztázni számos növekedési hiba kialakulásának és kiküszöbölésének feltételeit is (l. pl. [2]). Az oxidok olvadékból való növesztésénél nyert tapasztalatok természetesen jól felhasználhatók más anyagok és más növesztési módszerek vonatkozásában is.

6. Növekedési hibák. A következőkben az irodalom alapján összefoglalom a fontosabb növekedési hibákat, és pedig az előidéző okok szerint csoportosítva. Csak a „finom” hibákkal foglalkozom, és feltételezem, hogy az előidéző okok között korszerűtlen hőmérséklet-szabályozás, rossz minőségű magkristály, tisztátlan nyersanyag és más durva szennyeződési lehetőség nem szerepel.

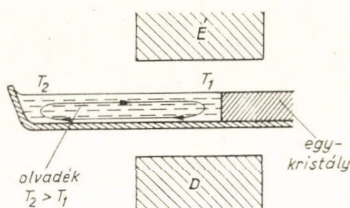
1. Olvadék áramlása. Ha húzással való növesztéskor az olvadékba merülő kristályt forgatjuk, a kristály által az olvadékban létrehozott áramlás következtében az adalékanyag és a visszamaradt szennyezés a növekvő kristályban *spirálok* mentén helyezkedhet el (14. ábra) és az inhomogén eloszlás feszüléseket hozhat létre. E jelenség a forgatási sebesség csökkentésével kevésbé lép fel, de kisebb sebességek esetében is kialakulhat, amint a növekvő kristály megközelíti a tégely falát.

Hasonló jelenséget az olvadékban levő hőmérsékletgradiens által létrehozott *konvekciós áramlás* is előidézhet, ha a túl nagy gradiens következtében az áramlás turbulenssé válik (15. ábra). A turbulencia hőmérséklet-ingadozásokat okoz az olvadék-kristály határfelületénél, ezek pedig a növekedési sebességben hoznak létre oszcillációkat. A különböző növekedési sebességek esetében különböző az idegen anyagok beépülési koncentrációja és a növekmény *barázdássá, sávozottá* válik (16. ábra).



14. ábra. Kyropoulos-módszerrel növesztett és közben forgatott NaCl kristályba spirális mentén beépült szennyezés

Azokban az esetekben, amikor az olvadék töltéshordozókat tartalmaz, a konvekciós áramlás megfelelő irányú konstans mágneses tér alkalmazásával mintegy fékezhető és a turbulencia megszüntethető (15. ábra). Kedvező viszonyokat teremthetünk azáltal is, hogy pl. pótfűtések alkalmazásával az olvadékban a hőmérsékletgradienst csökkentjük anélkül, hogy a gradiens az olvadék-kristály határfelületnél is csökkenne.

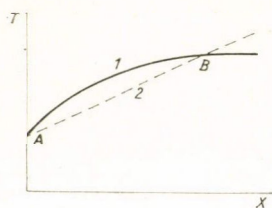


15. ábra. Turbulens olvadék-áramlás által előidézett sávok növekedés kiküszöbölése mágneses tér segítségével. A nyilak a konvekciós áramlás irányát jelzik

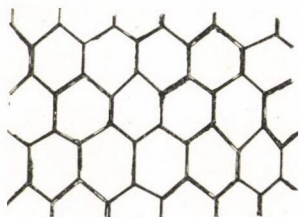


16. ábra. Sávok növekedés InSb esetében (150x). Az adalékanyag tellur. A baloldalon látható, nem-sávok tartomány mágneses térben nőtt [3]

2. **Konstitúciós túlhűlés.** Ha az adalékanyagra vagy a szennyezésekre vonatkozólag az eloszlási tényező 1-nél kisebb, az idegen anyagok koncentrációja az olvadékban a fázishatárnál nagyobb lehet, mint a határtól távolabb az olvadékban.



17. ábra. A konstitúciós túlhűléshez



18. ábra. Kristály-olvadék határfelületen kialakuló sejtes szerkezet; a sötét vonalak mélyedések jelölnek

Ennek következtében az olvadék egyes tartományaihoz egyre magasabb fagyáspont tartozik, amint a fázishatártól távolodunk az olvadék belseje felé. Ezt szemlélteti a 17. ábrán az 1 görbe. A 2 görbe pedig a fázishatár közelében az olvadékban fennálló hőmérsékleteloszlást mutatja. Nyilvánvaló, hogy az A és B pontoknak megfelelő helyeken az olvadék az olvadásponton, de a közti tartományban túlhűlt állapotban van. Ez az ún. konstitúciós túlhűlés, amely kiküszöbölhető, ha elég lapos az 1 és elég meredek a 2 görbe, ami azt jelenti, hogy kis növekedési sebességet, nagy hőmérsékletgradienst és fokozott keverést kell alkalmazni. A konstitúciós túlhűlés többféle jelenség forrása lehet, amelyek közös vonása egyrészt az, hogy a sima (lépcsős) növekedési felület feldurvul, másrészt az, hogy az idegen anyag a növekményben inhomogénen oszlik el. A feldurvult határfelület a konstitúciós túlhűlés mértékétől függően különböző mikrostruktúrát mutathat. Egy ilyen szemléltet a 18. ábra. A sejt alakú formák kevésbé szabályosak is lehetnek, sőt szélső esetben egyenes vonalszakaszok helyett görbe vonalak alakulnak ki, amelyek a sejtek belseje felé többszörösen elágazódnak és a sejtek közepéből dendrites növekedés indul ki. (A dendritek tengelye nem szükség-

képpen merőleges a határfelületre.) A konstitúciós túlhűlés következményeinek vizsgálata jelentősen hozzájárult ahhoz, hogy megismerjük azokat a jelenségeket, amelyek átmenetet képeznek a sima (lépcsős) növekedéstől a dendrites növekedésig.

3. *Fazettás növekedés.* A fagyásponthoz tartozó izoterm felület általában nem sík, hanem görbült. Előfordul azonban, hogy a növekmény nem veszi fel pontosan az izoterma alakját, hanem a kristályon különböző szögben hajló sík felületek alakulnak ki. Ekkor beszélünk fazettás növekedésről. Ez azért ártalmas, mert a különböző indexű síkokon a szennyezések, ill. az adalékanyagok különböző koncentrációban helyezkednek el és feszüléseket is létrehozhatnak. Ezt az inhomogenitást elkerülhetjük megfelelő izoterm felületek kialakításával, húzásos növesztéskor a kristály gyors forgatásával (120—150 fordulat/perc) is.

4. *Szennyezések, adalékanyagok és a sztöchiometriai aránytól való eltérések.* Idegen anyagokkal kapcsolatos hibákról az előzőekben már szóltam. Most továbbiakat is említék.

Ilyen pl. a visszaszennyeződés lehetősége zónás kristályosításnál. Ismert jelenség az is, hogy a lebegő zónázásnál a zónázandó rúd felületére került mikroszkopikus szennyezés új kristálygócot képezhet, ill. orientáció változást okozhat.

Ha az idegen anyag koncentrációja a kristályban meghaladja az oldékonyság határát, az idegen anyag finom eloszlású csapadékot képez, pl. rubin kristályban a Cr^{3+} adalék. A csapadék nemcsak fényszórást okoz, hanem a laserként használt rubin kristály megrepedésére is vezethet, ha intenzív sugárzásnál a kristály túlságosan felmelegszik.

A szennyezések a ferroelektromos anyagokban sokdomenes növekedést okoznak.

A többkomponensű oxidokban a sztöchiometriai aránytól való eltérések az előzőkhöz hasonló problémákat okozhatnak. Pontosán kell tehát beállítani a kémiai összetételt, sajnos azonban ezt számos esetben még gátolja a fázisviszonyok hiányos ismerete. Gyakran az is ismeretlen, hogy a vegyület egyetlen összetételben létezik-e, vagy a homogén összetételek egész sorát mutatja.

5. *Feszülések.* A kristályban feszülések több ok folytán jöhetnek létre. A kémiai összetétel helyi változásainak szerepéről már tettem említést. A leggyakoribbak a termikus eredetű feszülések. Ilyenek lépnek fel, ha a növekvő kristályra nagy hőmérsékletgradiens esik, vagy a kristályt gyorsan és ennek következtében inhomogénen hűtjük. A termikus feszülések csökkenthetők, ha a hőmérsékletgradienst a növekvő kristály mentén megfelelő pótűtőelemek alkalmazásával csökkentjük és lassú, egyenletes lehűlést biztosítunk. A termikus feszülések elkerüléséhez ismerni kell természetesen a kristály mechanikai tulajdonságainak a hőmérséklettől függő változását. Egyelőre ismereteink a legtöbb anyaggal kapcsolatban ilyen vonatkozásban igen hiányosak.

Feszülést okoznak a polimorf fázisátalakulások, ikerképződések. Ezek pedig alacsony hőmérsékletű növekedési eljárás alkalmazásával, vagy utólag megfelelő hőmérsékleten létrehozott feszítéssel (ikertelenítés) eliminálhatók, ill. csökkenthetők.

6. *Hőmérséklet.* A hőmérsékletről is volt már szó több vonatkozásban. Most arra a hibaforrásra szeretném felhívni a figyelmet, ami abból származik, hogy a kristály növesztésével megváltozik a növesztő rendszer geometriája és ennek következtében változik a kristály és a környezete közötti sugárzó energia-csere. A hőmér-

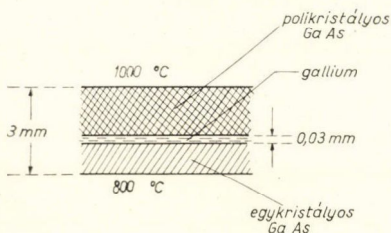
sékleti viszonyokat tehát a növesztés előrehaladtával folyamatosan változtatni kell, vagy a kristály végméretéhez képest is nagy mennyiségű olvadékot kell alkalmazni.

A mondottakból nyilvánvaló, hogy adott esetben egymással ellentétes követelmények közepette kell kikísérletezni a legmegfelelőbb növesztési eljárást. A növekedés mechanizmusa sem ismeretes még kellő részletességgel.

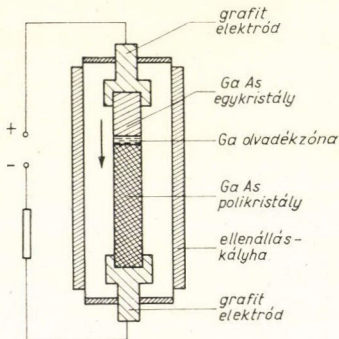
Ilyen körülmények között érthető, hogy még nem is nagyon régen a kristálynövesztők azon tréfálkoztak, hogy a kristálynövesztés inkább művészet, mint tudomány. A *J. J. Gilman* szerkesztésében 1963-ban megjelent könyvnek is a címe: *A kristálynövesztés művészete és tudománya*.

7. Néhány érdekes és újabb módszer.

1. A többkomponensű eljárások egyik előnyös változata a *hőmérsékletgradienses zónavándorlás*, amelyet először félvezető vegyületek oldatból való növesztésére alkalmaztak. Példaként a GaAs növesztését említem [4] (19. ábra). A növesztő rendszer 3 rétegből áll. Alul van a növesztendő egykristály, felül a polikristályos



19. ábra. Hőmérsékletgradienses zónavándorlás



20. ábra. Peltier-féle hatáson alapuló zónavándorlás

tápanyag, közöttük az olvadékszóna, amely jelen esetben galliumarzenidet oldva tartalmazó gallium-olvadék. A rendszer olyan térben helyezkedik el, amelyben konstans hőmérsékletgradiens áll fenn. Az ábrán vázolt esetben a hőmérséklet fölfelé haladva nő. A vékony zóna felső széle tehát magasabb hőmérsékleten van, mint az alsó, következésképp az oldott GaAs koncentrációja nagyobb az olvadékszóna tetején, mint az alján. A felső határfelületről GaAs diffundál a zónán keresztül az alsó határfelülethez. A hidegebb alsó határfelületnél a zóna a galliumarzenidre nézve túltelítetté válik és a főlegesen levő GaAs az egykristályon kiválik. Ugyanakkor a zónának a galliumarzenidben elszegényedett felső része tovább oldja a polikristályos tápanyagot. A zóna tehát spontán felfelé vándorol, miközben az alsó egykristály növekszik.

Ha a kísérletet adalékolt galliummal végezzük el, az adalékanyag beépül a növekvő galliumarzenid kristályba és így *n*- vagy *p*-típusú kristályokat is növeszthetünk.

A 20. ábra a spontán zónázás olyan esetét szemlélteti, amikor a hőmérsékletgradienst Peltier-féle hőhatás felhasználásával hozzuk létre [4]. Megfelelő áramirányt alkalmazva,

elérhetjük, hogy a zóna felső határa melegebb, az alsó hidegebb lesz és a zóna most is, miként az előbb, fölfelé vándorol.

Az említett eljárásnak nemcsak az az előnye, hogy sem edényre, sem mechanikus mozgató berendezésre nincs szükség, hanem az is, hogy segítségével különböző tulajdonságú átmenetek már a kristálynövesztés alatt létrehozhatók.

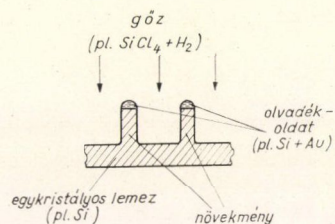
2. Ez ideig még kevésbé alkalmazott többkomponensű eljárás a *gőz-folyadék*

rendszerből való kristálynövesztés, amelyet a vapor-liquid-solid szavak kezdőbetűiből röviden VLS módszernek neveznek. Lényegét szilíciumtűk, ill. vékony rudak növesztésén szemléltetem [5] (21. ábra). A tűket szilícium egykristály-lemezre növesztjük. A lemez felületén azokra a helyekre, ahová tűket kívánunk növeszteni, arany-korongocskákat helyezünk. A hőmérsékletet fokozatosan emeljük, míg a szilíciummal ötvöződött arany megolvad. Ezután a preparátumhoz SiCl_4 tartalmú hidrogén-gázt vezetünk. A gőztérben képződő szilícium megfelelő viszonyok között nem rakódik le a lemezre, de behatol a megolvadt arany-ötvözetbe. Az ötvözet szilíciumra nézve túltelítetté válik és a lemezen szilícium válik ki, amely tovább építi a lemez kristályrácsát. Az olvadékcsepp a növekvő tű hegyén helyezkedik el és közvetíti a szilícium-transzportot a gőztérből a kristályhoz. A módszer eddig még kevésbé kihasznált érdekes lehetőségeket rejt magában.

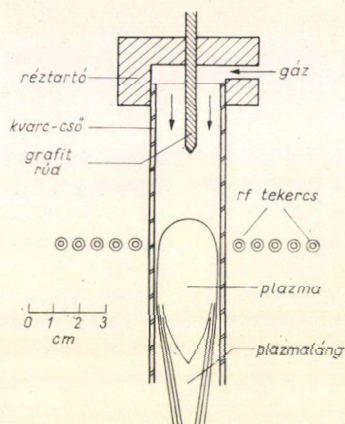
3. Az utóbbi években magas hőmérséklet előállítására plazmafáklyát is használnak. Indukciós plazmafáklyát szemléltet a 22. ábra [6]. A felhevítendő gáz (pl. tiszta argon) kvarccsőön áramlik keresztül. A plazmát a rádiófrekvenciás (rf) erőterbe tolt és ott felmelegedett grafitrúd vagy volfrám-hurok segítségével gyújtjuk be. A begyújtás után a rudat, ill. a hurkot a plazmatérből eltávolítjuk. A hőmérséklet a plazma közepén kb. 15000°C , a szélén kb. 10000°C . — A 23. ábra indukciós plazma-fáklyával működő Verneuil-féle kristálynövesztő berendezést mutat. Az ábra alsó részén látható a magkristály. A por alakú tápanyag a középső kvarccsőön, majd a plazmán áthaladva és itt megolvadva hullik a magkristály fejére.

Az indukciós plazmafáklyának nagy előnye, hogy inert, redukáló és oxidáló gázokban egyaránt működtethető. A gázt természetesen mindenkor a növesztendő kristálynak megfelelően választjuk meg.

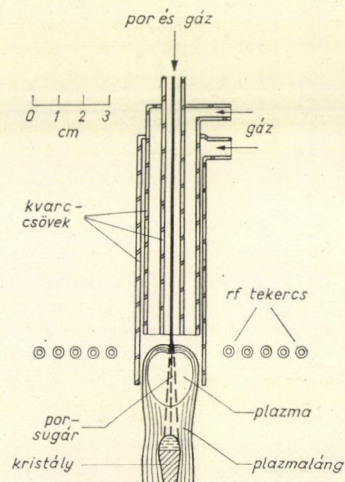
4. A fókuszált fénynyaláb felhasználható számos szilárd anyag megolvasztására. Xenon-lámpák segítségével minden nehézség nélkül elérhető 3000°C . A 24. ábra két fényforrással működő fénykályhát szemléltet [7]. Mindegyik fényforráshoz két egymással szemben álló homorú tükör tartozik. A nyilakkal ellátott vonalak jelzik a fény útját.



21. ábra. Szilícium-tűk növesztése VLS módszerrel

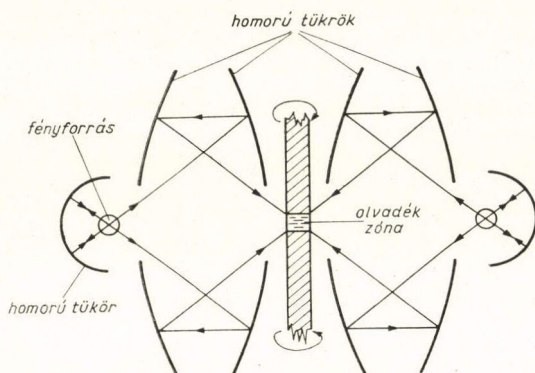


22. ábra. Indukciós plazmafáklya



23. ábra. Verneuil-féle eljárás indukciós plazmafáklyával

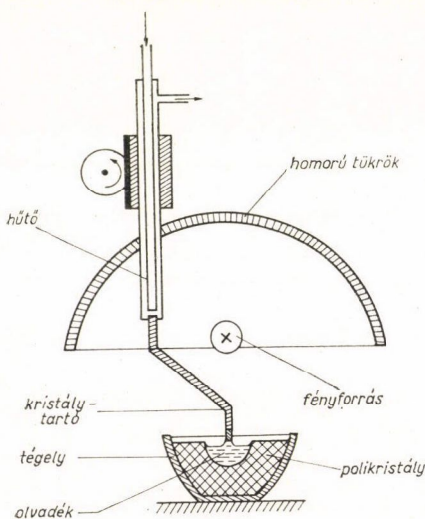
Gazdaságossági okokból célszerű a fényforrások mögé is tükröt helyezni. — Az ábra lebegő olvadékszóna létrehozását szemlélteti rúd alakú minta (pl. rubin) esetében. Az ábra a rúd felső és alsó felének ellentétes irányú forgását is



24. ábra. Zónázás fénykályhával

5. A 25. ábrán Czochralski-módszerrel való növesztést szemléltetünk. A tégelyben levő polikristályos anyagot fókuszált fényvel olvasztjuk meg. Az ábrán vázolt eljárás azonban más szempontból is érdekes [8]. A tégelyben levő tápanyagnak ui. csak egy részét olvasztjuk meg és így az *olvadékot ugyanazon anyagból való szilárd kéreg veszi körül*. Ez az eljárás ugyanolyan előnyökkel jár a tisztaság szempontjából, mint a tégelymentes növesztések.

A tégelyprobléma egyébként más módon is megoldható. Tégelyként alakíthatjuk ki pl. a vörösrézről készült vízűtéses



25. ábra. Fénykályha és saját-anyaggal bélelt tégely

rádiófrekvenciás tekercset. Ilyen esetben négyszög-keresztmetszetű meneteket használunk és azokat szorosan egymás mellé illesztjük. A tégelybe helyezett por alakú tápanyagnak csak a középső része olvad meg a nagyfrekvenciás térben, a vízűtés az olvadék körül szilárd kérget biztosít.

8. A kristálynövesztéssel kapcsolatos *időszerű gyakorlati feladatokkal* a közelmúltban részletesen foglalkozott K. Hoselitz [9], most csak néhány gondolatot szeretnék kiemelni.

Az elmúlt években a *félvezető anyagok* területén különösen nagy gondot fordítottak világszerte a jól bevált és széles körben felhasználásra kerülő Ge, Si és GaAs tömb- és réteg-kristályainak előállítására. A közvetlen feladat jelenleg minél több olyan módszer kifejlesztése, amely segítségével a kristályok a

felhasználáshoz szükséges alakban és méretben állíthatók elő és a továbbiakban már kevés megmunkálást és szerelést igényelnek. Ezzel javítható a gazdaságosság és a minőség. A különböző kezelések, megmunkálások (vágás, csiszolás, polírozás stb.) ui. hibákat hoznak létre a kristályban és rontják annak minőségét. Kevésbé jó a helyzet más félvezető anyagokkal kapcsolatban és további kutatást, ill. fejlesztést kíván pl. a II—VI típusú félvezető anyagok, továbbá az ólom-, ón-kalkogenidek (szulfidok, szelenidek, telluridok) és általában a három- vagy többkomponensű félvezető anyagok kristályainak előállítása. Egészen újszerű feladatok előtt állunk a szerves és az amorf félvezető anyagok vonatkozásában.

Nőnek a követelmények a *szilárdtest-laserekkel*, a *nem-lineáris optika*, az *infravörös távolságmérés*, *tárolás és feldolgozás* területén felhasználásra kerülő anyagokkal kapcsolatban is. Ez utóbbi területeken megfelelő méretű és minőségű kristályok előállítása messze kevésbé megoldott probléma, mint a félvezetők területén. A megfelelő anyagok felkutatása sem zárult le.

Fémek és ötvözetek tulajdonságaival kapcsolatban fontos volna egyes intersticiális ötvözetek és intermetallikus vegyületek egykristályainak előállítása és tanulmányozása. Ezekhez csatlakoznak a karbidok is, amelyek a magas hőmérsékletet tűrő acélok szerkezetében ugyancsak fontos szerepet játszanak. Nagy gyakorlati jelentőségük van továbbá azoknak az ötvözeteknek, amelyekben a kristallitok megfelelő rendben helyezkednek el. Pl. a magas hőmérsékletű acélok mechanikai tulajdonságai befolyásolhatók a kristályos elemek rendezettségével. Ugyanez vonatkozik a permanens mágnesek vagy a vas-szilícium szalagok tulajdonságaira is.

Fémekkel és nem fémes anyagokkal kapcsolatban egyaránt új alkalmazási lehetőségeket rejtenek magukban a tűkristályok, amelyek vonatkozásában — egyelőre főként az alkali-halogenideket illetően — értékes hazai tapasztalatok vannak.

A hazai problémáktól jelenleg kissé távol áll, de említést tesz azokról az anyagokról, amelyek kristályainak mechanikai, elektromos és termikus tulajdonságai nagymértékű anizotrópiát mutatnak és ezért érdekes alkalmazási lehetőségeket rejtenek magukban. Ilyen anyag pl. a grafit, amelynek némelyik tulajdonsága 10^4 — 10^5 faktorban különbözik a szélsőséges értékeket képviselő irányokban mérve. Réteges szerkezetű anyagok a molibdén-szulfid, bizmut-tellurid, óndiszulfid stb. kristályai is.

Az organikus anyagok (különösen a polimerek) egykristályainak tudományos és gyakorlati fontossága nehezen megjósolható, de biztosan nőni fog.

Végezetül még egy megjegyzés. Mindentudó módszer nem létezik, sőt egyazon anyag esetében is többféle növesztési eljárással kell kísérletezni, míg eljutunk egy jobbhöz, megfelelőbbhöz. Nem elégedhetünk meg adott esetben egyetlen speciális eljárással, amelyhez a készülék éppen rendelkezésre áll, vagy amelyet valamilyen, gyakran szubjektív ok folytán favorizálunk. Fel kell tehát készülni valamennyi ismert módszer alkalmazására adott esetben. Ez nélkülözhetetlen feltétel akkor is, ha valamilyen területen megjelenik egy új érdekes anyag és azt gyorsan kívánjuk előállítani, és még inkább akkor, ha új anyagok felderítésével is foglalkozni akarunk. Úgy vélem, hogy ezt a körülményt különösen hangsúlyozni kell mindenütt, és ez a helyzet hazánkban is, ahol súlyt helyezünk a szilárdtestek kutatására.

IRODALOM

1. *R. A. Laudise*, in: *Crystal Growth*, Ed. H. S. Peiser Pergamon Press, London 1967 p. 3—15.
2. *B. Cockayne*, *Journal of Crystal Growth*, 3, 4, 60, 1968.
3. *H. P. Utech* and *M. C. Flemings*, *Journal of Applied Physics*, 37, 2021, 1966.
4. *A. I. Mlavsky* and *M. Weinstein*, *Journal of Applied Physics*, 34, 2885, 1963.
5. *R. S. Wagner* and *C. Y. Doherty*, *Journal of the Electrochemical Soc.*, 113, 1300, 1966.
6. *T. B. Reed*, *Journal of Applied Physics*, 32, 2534, 1961.
7. *W. G. Field* and *R. W. Wagner*, *Journal of Crystal Growth*, 3, 4, 799, 1968.
8. *R. Nitsche*, *Journal of Applied Physics*, 36, 2358, 1965.
9. *K. Hoselitz*, *Journal of Crystal Growth*, 3, 4, 5, 1968.

A húszesztendő múltja visszatekintő MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT megalapítása óta rendszeresen közöl a fizika fejlődésében alapvető szerepet betöltő dolgozatokat tudományunk klasszikusainak tollából.

A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL rovat új, tizenkettedik sorozatának tárgya: a homogén és inhomogén Lorentz-csoport (utóbbit újabban legtöbbször Poincaré-csoportnak nevezik), valamint a Galilei-csoport ábrázolásainak elmélete, és néhány ezzel összefüggő kérdés, így a kvantummechanikai rendszerek lokalizálhatósága, a csoportok és ábrázolásaik kontrakciója.

Gyűjteményünkben a következő munkák magyar fordítását közöljük:

- E. Wigner*, On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group, *Ann. of Math.* **40**, 149, 1939;
V. Bargmann, Irreducible Unitary Representations of the Lorentz Group, *Ann. of Math.* **48**, 568, 1947;
E. P. Wigner, Relativistische Wellengleichungen, *Z. f. Physik* **124**, 665, 1948.
V. Bargmann és E. P. Wigner, Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **34**, 211, 1948.
T. D. Newton és E. P. Wigner, Localized States for Elementary Systems, *Revs. of Mod. Phys.* **21**, 400, 1949;
E. Inonu és E. P. Wigner, Representations of the Galilei Group, *Nuovo Cimento* **9**, 705, 1952;
E. Inonu és E. P. Wigner, On the Contraction of Groups and their Representations, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **39**, 510, 1953;
V. Bargmann, On Unitary Ray Representations of Continuous Groups, *Ann. of Math.* **59**, 1, 1954;
A. S. Wightman, On the Localizability of Quantum Mechanical Systems, *Revs. of Mod. Phys.* **34**, 845, 1962.

Györgyi G.

AZ INHOMOGEN LORENTZ-CSOPORT UNITÉR ÁBRÁZOLÁSAIRÓL*

WIGNER JENŐ

1. A probléma eredete és jellemzése

A kvantummechanikának talán legalapvetőbb elve, hogy az állapotok rendszere *lineáris sokaságot* képez,¹ amelyben unitér *skaláris szorzat* van definiálva.² Az állapotokat általában hullámfüggvény³ reprezentálja, oly módon, hogy φ , és φ állandósorozói ugyanazon fizikai állapot reprezentánsai. A hullámfüggvényt eszerint normálhatjuk (azaz megszorozhatjuk egy állandó számmal), úgyhogy önmagával képezett skalárszorzata 1 legyen. Ekkor csupán egy 1 abszolút-értékű állandó tényező, az úgynevezett fázis marad meghatározatlan a hullámfüggvényben. A hullámfüggvény lineáris jellegére mint a szuperpozíció-elvre hivatkozunk. A ψ és φ normált hullámfüggvények (ψ , φ) unitér skaláris szorzata abszolút értékének négyzetét a ψ , φ állapotok közötti átmenet valószínűségének mondjuk. A feltevés szerint ez adja meg annak a valószínűségét, hogy egy kísérlet, melyet a φ állapotú rendszeren végzünk annak eldöntésére, hogy a rendszer a ψ állapotban van-e vagy sem, azt az eredményt adja, hogy az állapot ψ . Ha két vagy több különböző kísérlet van, melyekkel ezt eldönthetjük (ilyen pl. két, lényegében azonos kísérlet, amelyeket különböző időkben végzünk el), ezekről feltesszük, hogy ugyanazt az eredményt adják, azaz: az átmeneti valószínűségnek invariáns fizikai jelentése van.

A leírás azonban, amelyet a hullámfüggvény az állapotról ad, nem invariáns. Ugyanazt az állapotot különböző koordinátarendszerekben különböző hullámfüggvények írják le. Azért, hogy ezt kifejezésre juttassuk, a hullámfüggvényt indexszel látjuk el, mely megjelöli azt a Lorentz-féle vonatkoztatási rendszert, amelyre vonat-

* Megjelent: Ann. of Math. 40, 149, 1939.

¹ Természetesen el kell ismernünk: lehetséges, hogy a jövőben a kvantummechanika nemlineáris lesz. Ilyen jelek vannak a pozitron elméletben, melyet P. A. M. Dirac dolgozott ki (Proc. Camb. Phil. Soc. 30, 150, 1934, vö. ezen kívül W. Heisenberg, Zeits. f. Phys. 90, 209, 1934; 92, 623, 1934; W. Heisenberg és H. Euler, uo. 98, 714, 1936 és R. Serber, Phys. Rev. 48, 49, 1935; 49, 545, 1936), mely nem használ hullámfüggvényt és nemlineáris.

² Vö. P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, Oxford 1935, I. és II. fejezet; J. v. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quatenmechanik, Berlin 1932, 19–24. old.

³ A hullámfüggvény e dolgozatban mindenütt a „Heisenberg-kép” értelmében képviseli az állapotokat az egész múlt és jövőre nézve. Másrésztől az operátor, mely egy bizonyos t időbeli mérésre vonatkozik, ezt a t -t mint paramétert tartalmazza. (Vö. pl. Dirac, i. m.², 115–123. old.) A Schrödinger-kép $\varphi_S(t)$ hullámfüggvényét a Heisenberg-kép φ_H hullámfüggvényéből a $\varphi_S(t) = \exp(-iHt/\hbar)\varphi_H$ képlet szerint kapjuk. A Heisenberg-képben az operátor

$$Q(t) = \exp(iHt/\hbar)Q \exp(-iHt/\hbar),$$

ahol Q , mely nem függ az időtől, az operátor a Schrödinger-képben. Vö. még E. Schrödinger, Sitz. d. Kön. Preuss. Akad. 418. old., 1930.

A hullámfüggvény komplex mennyiség és a benne fellépő határozatlan tényező is komplex. Legutóbb próbálkozások történtek valós hullámfüggvénnyel dolgozó elmélet irányában. Vö. E. Majorana, Nuovo Cim. 14, 171, 1937 és P. A. M. Dirac, nyomdában.

kozóan a hullámfüggvényt megadtuk. Így φ_l és $\varphi_{l'}$ ugyanazt az állapotot reprezentálják; a két függvény azonban különböző. Az előbbi az l koordinátarendszerben, az utóbbi az l' koordinátarendszerben írja le az állapotot. Ha $\varphi_l = \psi_{l'}$, a φ állapot az l koordinátarendszerben pontosan olyan viselkedést mutat, mint a ψ állapot az l' koordinátarendszerben. Ha φ_l adott, ezzel a $\varphi_{l'}$ függvények állandó tényező erejéig mind meg vannak határozva. Az átmeneti valószínűség invarianciája folytán fennáll:

$$|(\varphi_l, \psi_l)|^2 = |(\varphi_{l'}, \psi_{l'})|^2. \quad (1)$$

Meg lehet mutatni,⁴ hogy az előbb említett állandók a $\varphi_{l'}$ függvényekben oly módon választhatók, hogy a $\varphi_{l'}$ függvényeket φ_l -ből lineáris unitér operáció alkalmazásával kapjuk meg, amely természetesen függ l -től és l' -től:

$$\varphi_{l'} = D(l', l) \varphi_l. \quad (2)$$

A D unitér operátorokat — ismét egy állandó szorzó erejéig, amely függhet l -től és l' -től — az elmélet fizikai tartalma határozza meg. Az említett állandótól eltekintve azonban a $D(l', l)$ és $D(l'_1, l_1)$ operációknak azonosaknak kell lenniök, ha csak az l' rendszert l -ből s az l'_1 -t l_1 -ből ugyanazon Lorentz-transzformáció segítségével kapjuk meg. Ha ez nem így lenne, az l és l_1 rendszerek között reális különbség volna. Eszerint a $D(l', l) = D(L)$ unitér operátorokat (az állandó tényezőtől, melynek fizikai jelentése nincs, eltekintve) az l -et $l' = Ll$ -be transzformáló L Lorentz-transzformáció teljesen meghatározza. Írhatjuk tehát (2) helyett:

$$\varphi_{Ll} = D(L) \varphi_l. \quad (2a)$$

Ha először az l rendszerről az $l' = L_1 l$ rendszerre és ezután egy harmadik $l'' = L_2 L_1 l$ rendszerre térünk át, vagy közvetlenül az $l'' = (L_2 L_1) l$ rendszerbe transzformálunk — a fent említett állandótól eltekintve —, a hullámfüggvények ugyanazon rendszerét kell kapnunk. Eszerint

$$\varphi_{l''} = D(l'', l') D(l', l) \varphi_l$$

és

$$\varphi_{l''} = D(l'', l) \varphi_l$$

fennállásából következik

$$D(l'', l') D(l', l) = \omega D(l'', l) \quad (3)$$

vagy

$$D(L_2) D(L_1) = \omega D(L_2 L_1), \quad (3a)$$

ahol ω egységnyi abszolút-értékű szám, mely függhet L_2 -től és L_1 -től. A $D(L)$ -ek tehát, egy tényező erejéig, az inhomogén Lorentz-csoport lineáris, unitér operátorok segítségével megvalósított ábrázolását képezik.

Látjuk tehát,⁵ hogy minden egyes invariáns kvantummechanikai egyenletrendszerhez az inhomogén Lorentz-csoportnak egy-egy ilyen ábrázolása tartozik. Másrészről az ábrázolás, bár arra nem elegendő, hogy a kvantummechanikai egyenleteket teljesen helyettesítse, az egyenletek szerepét jórészt betöltheti. Ha például ismerjük a K operátort, mely adott fizikai mennyiség mérésének felel meg a $t=0$ időpontban, akkor nyomon követhetjük: mint változik ez a mennyiség az időben.

⁴ E. Wigner, Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atom-spektren. Braunschweig 1931, 251—254. old.

⁵ E. Wigner, i. m. XX. fejezet.

Abból a célból, hogy megkapjuk ezen mennyiség értékét a $t=t_1$ időben, az eredeti φ_1 hullámfüggvényt $D(I', I)$ segítségével olyan I' koordináta-rendszerbe transzformálhatjuk, melynek időskáája később kezdődik t_1 -gyel. Ebben a koordináta-rendszerben a szóban forgó mennyiség 0 időpontbeli mérésének — mint az eredeti rendszerben is — a K operátor felel meg. Ez a mérés azonban azonos a kérdéses mennyiség t_1 időbeli mérésével az eredeti rendszerben. Azt mondhatjuk, hogy az ábrázolás helyettesítheti a mozgásegyenletet, nem helyettesítheti azonban az operátorok között egy időpillanatban fennálló összefüggéseket.

Végül megemlítjük, hogy ez a gondolatmenet nem csak a kvantummechanikában alkalmazható, hanem minden lineáris elméletre, pl. a Maxwell-féle vákuumegyenletekre is. Az egyetlen különbség, hogy ebben az esetben tetszőleges tényező nincs, a (3a) képletben az ω elhagyható, és a tényező erejéig meghatározott ábrázolások helyett igazi ábrázolásokat kapunk. Másrészről az ábrázolás unitér volta nem következik az alapfeltevésekből.

Jelen eljárásunk nagyobb általánossága, szemben a szokásos tenzorelmélettel, abban áll, hogy szükségtelen bármilyen feltevés az alapul vett egyenletekben szereplő mennyiségek erőter-jellegére vonatkozóan. A jelen tárgyalás így általánosabb egyenletekre (amennyiben ilyenek léteznek; pl. olyanokra, amelyekben a koordináta kvantált stb.) is kiterjed. Annak azonban tudatában kell lennünk, hogy a klasszikus értelemben vett Lorentz-rendszerek feltételezésével a tér folytonosságát illetően bizonyos feltevéseket tettünk. Másrészről meg kívánjuk említeni, hogy a megfigyelhető fizikai mennyiségekben fellépő időparaméterre vonatkozóan fent tett megjegyzések csupán illusztratív jellegűek; olyan feltevést, hogy a fizikai mennyiségek mérése pillanatszerűen elvégezhető, nem teszünk.

A következő szakaszokban törekvésünk célja: meghatározni az inhomogén Lorentz-csoport valamennyi folytonos,⁶ unitér, tényező erejéig meghatározott ábrázolását, vagyis a (3a) összefüggést kielégítő lineáris, unitér operátorok összes folytonos rendszerét.

2. Összehasonlítás a korábbi tárgyalásokkal. Néhány előzetes egyszerűsítés

A. Korábbi tárgyalások

A Lorentz-csoport ábrázolásait ismételten tanulmányozták. Az első vizsgálat Majoranának⁷ köszönhető, aki a jelen dolgozatban tárgyalandó osztály összes ábrázolását megtalálta, kivéve az ábrázolások két sorozatát. Dirac⁸ és Proca⁸ elegánsabban származtatták le Majorana eredményeit és könnyebben kezelhető alakra hozták őket. Klein munkájának⁹ nem irreducibilis ábrázolások levezetése volt a célja, és — úgy látszik — kevésbé áll szoros kapcsolatban a jelen munkával.

Majorana és Dirac cikkeitől a jelen dolgozat — az új ábrázolások megtalálásától eltekintve — főként a matematikai szigorúság nagyobb fokában különbözik.

⁶ A tényező erejéig adott ábrázolás folytonosságának egzakt definícióját az 5A. szakaszban fogjuk megadni. Az inhomogén Lorentz-csoport definícióját a 4A. szakasz tartalmazza.

⁷ E. Majorana, Nuovo Cim. 9, 335, 1932.

⁸ P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A. 155, 447, 1936. Al. Proca, J. de Phys. Rad. 7, 347, 1936.

⁹ Klein, Arkiv f. Matem. Astr. och Fysik, 25A, No. 15, 1936. Köszönettel tartozom Mr. Darlingnak egy ezen dolgozatról folytatott érdekes beszélgetésért.

Majorana és Dirac szabadon használja az infinitezimális operátorok fogalmát, s a függvényhalmazt, melynek mindegyik elemére az infinitezimális operátorok bármelyike alkalmazható. Ez az eljárás jelenleg matematikailag nem igazolható, és ebben a dolgozatban nem használunk ilyen feltevést. Azonkívül a reducibilitás és az irreducibilitás feltételei általában valamivel bonyolultabbak lehetnek, mint ahogy azt Majorana és Dirac feltételezi. Végül a korábbi tárgyalások kezdettől fogva feltételezik, hogy a tér- és az időkoordináták a szokott módon folytonos változói a hullámfüggvénynek. Ebben a munkában természetesen ilyen feltevést nem teszünk.

B. Néhány előzetes egyszerűsítés

Két ábrázolás *fizikailag ekvivalens*, ha kettejük állapotai között olyan egyértelmű megfelelés áll fenn, amely 1. Lorentz-transzformációkkal szemben invariáns és 2. olyan tulajdonságú, hogy a megfelelő állapotok közötti átmeneti valószínűségek megegyeznek.

A második feltételből következik,⁵ hogy létezik egy S unitér operátor, amelynek segítségével a második ábrázolás $\Phi^{(2)}$ hullámfüggvényét megkaphatjuk az első ábrázolás megfelelő $\Phi^{(1)}$ hullámfüggvényéből:

$$\Phi^{(2)} = S\Phi^{(1)} \quad (4)$$

vagy hogy ugyanez $\Phi^{(2)}$ komplex konjugáltjára igaz. Habár a két ábrázolás az utóbbi esetben fizikailag ugyancsak ekvivalens, a matematikában szokásos megállapodással összhangban ekkor nem fogjuk őket ekvivalensnek nevezni.

Az első feltétel mármint azt jelenti, hogyha $\Phi^{(1)}$ és $\Phi^{(2)} = S\Phi^{(1)}$ egy koordináta-rendszerben megfelelő állapotok, akkor a $D^{(1)}(L)\Phi^{(1)}$ és $D^{(2)}(L)\Phi^{(2)}$ állapotok egymásnak ugyancsak megfelelnek. Ekkor fennáll:

$$D^{(2)}(L)\Phi^{(2)} = SD^{(1)}(L)\Phi^{(1)} = SD^{(1)}(L)S^{-1}\Phi^{(2)}. \quad (4a)$$

Minthogy ez minden $\Phi^{(2)}$ -re érvényes, a $D^{(1)}$ -et $D^{(2)}$ -be transzformáló S unitér operátor létezése a két ábrázolás ekvivalenciájának a feltétele. Az ekvivalens ábrázolásokat nem tekintjük igazán különbözőknek; elegendő lesz, ha az ekvivalens ábrázolások minden egyes végtelen osztályából egy-egy „mintapéldányt” meghatározunk.

Ha van egy zárt lineáris állapotsokaság, mely minden Lorentz-transzformációval szemben invariáns, vagyis amely ψ -vel együtt tartalmazza $D(L)\psi$ -t is, úgy az erre merőleges lineáris sokaság ugyancsak invariáns lesz. Valóban, ha φ a második sokasághoz tartozik, a $D(L)\varphi$ állapot, $D(L)$ unitér jellege folytán, merőleges lesz $D(L)\psi'$ -re, hacsak ψ' az első sokasághoz tartozik. Mivel azonban ψ -vel együtt $D(L^{-1})\psi$ is hozzátartozik az első sokasághoz, $D(L)\varphi$ ortogonális lesz $D(L)D(L^{-1})\psi = \psi$ -re, vagyis az első sokaság minden elemére, és így szintén a második sokasághoz tartozik. Az eredeti ábrázolás ekkor „felbomlik” két ábrázolásra, a két lineáris sokaságnak megfelelően. Világos, hogy megfordítva, ábrázolást képezhetünk oly módon, hogy több ábrázolást egyszerűen „összeadunk”, azaz állapotokként több ábrázolás állapotainak lineáris kombinációit tekintjük, és feltesszük, hogy a különböző ábrázolásokból származó állapotok egymásra merőlegesek.

Az olyan ábrázolás, amely ekvivalens már ismert ábrázolások összegével, nem igazán új, és ahhoz, hogy az összes ábrázolást áttekinthessük, elegendő, ha

azokat határozzuk meg, amelyekből az összes többi megkapható oly módon, hogy az előbbiekből véges számút vagy végtelen sokat „összeadunk”.

Itt megemlítünk két egyszerű tételt, melyeket később bizonyítunk (a 7A, ill. a 8C szakaszban). Az első tetszőleges zárt csoport unitér ábrázolásaira vonatkozik, a második bármely (zárt vagy nyitott) csoport unitér ábrázolásaira.

Valamely zárt csoport unitér operátorokkal megvalósított ábrázolása véges dimenziós mátrixokkal létesített unitér ábrázolások összegébe transzformálható.

Legyen adott egy tetszőleges csoport két nem-ekvivalens unitér ábrázolása. Ha a hullámfüggvényekből képezett skaláris szorzat invariáns a csoport operációival szemben, akkor az első ábrázoláshoz tartozó²⁸ hullámfüggvények ortogonálisak a második ábrázoláshoz tartozó valamennyi hullámfüggvényre.

C. Az unitér ábrázolások osztályozása Neumann és Murray szerint¹⁰

Ha valamely unitér ábrázolás, vagy tényező erejéig meghatározott ábrázolás $D(L)$ operátorai adottak, tekinthetjük ezen operátorok algebráját, azaz a $D(L)$ operátorok valamennyi

$$a_1 D(L_1) + a_2 D(L_2) + a_3 D(L_3) + \dots$$

lineáris kombinációját és az ilyen lineáris kombinációk minden olyan limeszét, amelyek korlátos operátort állítanak elő. Ezen ábrázolási algebra tulajdonságaitól függően az unitér ábrázolások három osztályát különböztethetjük meg.

Az első osztályba *irreducibilis* ábrázolások tartoznak, amelyek ábrázolási algebrája magában foglal minden korlátos operátort, azaz ha ψ és φ két tetszőleges állapot, van olyan A operátor az ábrázolási algebraban, amelyre $A\psi = \varphi$ és $A\psi' = 0$, hacsak a ψ' a ψ -re ortogonális. Nyilvánvaló, hogy az algebra centruma csak az egységoperátort és annak többszöröseit tartalmazza. Valóban, ha C a centrumba tartozik, $C\psi$ -t felbonthatjuk az $\alpha\psi + \psi'$ alakban, ahol a ψ' a ψ -re ortogonális. A ψ' -nek azonban el kell tűnnie, másként C nem kommutálna a ψ -t változtatlanul hagyó s minden rá ortogonális függvényt zérusba transzformáló operátorral. Hasonló okok folytán α értékének minden ψ -re ugyanakkorának kell lennie. Irreducibilis ábrázolások esetében nincs olyan zárt lineáris állapotsokaság (kivéve az összes állapot sokaságát), amely minden Lorentz-transzformációval szemben invariáns. A fent adott definíció értelmében akármely φ -t tetszőlegesen megközelítő φ' állapot előállítható véges

$$a_1 D(L_1)\psi + a_2 D(L_2)\psi + \dots + a_n D(L_n)\psi$$

lineáris kombináció alakjában. Egy zárt lineáris sokaság tehát minden állapotot tartalmaz, ha egyiküket tartalmazza. Éppen ez az irreducibilis ábrázolások legmegszokottabb definíciója; a következőkben ezt fogjuk használni. Jól ismert, hogy minden végesdimenziós ábrázolás irreducibilis ábrázolásoknak az összege. Ez végtelen dimenziós ábrázolás esetén nem igaz általában.¹⁰

Az ábrázolások második osztályának elnevezése: *faktoriális*. Ebben az esetben is az ábrázolási algebra centruma csak az egységoperátor többszöröseit tartalmazza. Nyilvánvalóan minden irreducibilis ábrázolás faktoriális; ez azonban megfordítva nem igaz. Véges dimenzió esetén a faktoriális ábrázolások egy irreducibilis ábrázo-

¹⁰ F. J. Murray és J. v. Neumann, Ann. of Math. 37, 116, 1936; J. v. Neumann, megjelenés előtt.

lást többször is tartalmazhatnak. Ez végtelen dimenzió esetén is lehetséges; ezenkívül azonban itt vannak még Murray és Neumann „folytonos” ábrázolásai is.¹⁰ Ezek nem irreducibilisek, minthogy most vannak invariáns lineáris állapotsokaságok. Másrésztől azonban a felbontást lehetetlen olyan mértékig keresztülvinni, hogy a kapott részek mind irreducibilisek legyenek. Az eddig ismert összes példában azok az ábrázolások, amelyekre ezek a folytonos ábrázolások felbonthatók, ekvivalensek az eredeti ábrázolással.

A harmadik osztály minden lehetséges unitér ábrázolást tartalmaz. A véges dimenziós esetben ezeket először felbonthatjuk faktoriális ábrázolásokra, majd ezeket pedig irreducibilis ábrázolásokra. Neumann János¹⁰ megmutatta, hogy az első lépés végtelen dimenzióban is elvégezhető. Feltehetjük tehát, hogy kezdettől fogva faktoriális ábrázolásokkal van dolgunk.

A véges dimenziós ábrázolások elméletében elegendő az irreducibilis ábrázolásokat meghatározni; minden más ábrázolás ekvivalens ezeknek egy összegével. Itt szükséges lesz, hogy valamennyi faktoriális ábrázolást meghatározzuk. Neumann János fent idézett tételéből tudjuk ugyanis, hogy minden ábrázolás elvvalens a faktoriális ábrázolások valamely véges vagy végtelen összegével.

A részletes vizsgálat egyik eredménye az lesz, hogy az inhomogén Lorentz-csoportnak nincs „folytonos” ábrázolása; az ábrázolások mind felbonthatók irreducibilis ábrázolásokra. Majorana és Dirac munkája ily módon ebből a szempontból a posteriori igazolást nyer.

D. Az unitér ábrázolások osztályozása az infinitezimális operátorok szempontjából

Az infinitezimális operátor létezését egyparaméteres (ciklikus, Abel-féle) unitér csoport esetére Stone kimutatta¹¹. Bebizonyította, hogy az ilyen csoportok operátorai az $\exp(iHt)$ alakban írhatók fel, ahol H (korlátos vagy nem-korlátos) hermitikus operátor és t a csoportparaméter. A Lorentz-csoportnak sok egyparaméteres alcsoportja van, és a megfelelő H_1, H_2, \dots infinitezimális operátorok valamennyien nem-korlátosak. Minden egyes H -hoz található a φ függvényeknek egy-egy mindenütt sűrű halmaza oly módon, hogy azon $H_i\varphi$ definiálható. Nem nyilvánvaló azonban, hogy lehet találni olyan mindenütt sűrű halmazt, amelynek mindegyik elemére valamennyi H alkalmazható. Még az sem nyilvánvaló, hogy akár csak egy ilyen φ -t is találhatunk.

Csakugyan, érdekes megjegyezni, hogy irreducibilis ábrázolás esetében egy olyan φ létezése, amelyre mindegyik infinitezimális operátor alkalmazható, maga után vonja az ilyen függvények mindenütt sűrű halmazának létezését. Ennek pedig az a következménye, hogy az infinitezimális operátorok messzemenően alkalmazhatók a szokásos módon.

Bizonyítás: Legyen $Q(t)$ egyparaméteres csoport, amelyre fennáll $Q(t)Q(t') = Q(t+t')$. Ha valamennyi alcsoport infinitezimális operátora alkalmazható φ -re, akkor

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(Q(t) - 1)\varphi \quad (5)$$

¹¹ M. H. Stone, Proc. Nat. Acad. 16, 173, 1930. Ann. of Math. 33, 643, 1932, továbbá J. v. Neumann, uo. 33, 567, 1932.

létezik. Ebből következik, hogy az infinitezimális operátorok $R\varphi$ -re is alkalmazhatók, ahol R az ábrázolás tetszőleges operátora. Minthogy ugyanis $R^{-1}Q(t)R$ szintén egyparaméteres alcsoport,

$$\lim_{t=0} t^{-1}(R^{-1}Q(t)R - 1)\varphi = \lim_{t=0} R^{-1}t^{-1}(Q(t) - 1)R\varphi$$

ugyancsak létezik, és így létezik

$$\lim_{t=0} t^{-1}(Q(t) - 1)R\varphi$$

is (R unitér). Mindegyik infinitezimális operátor alkalmazható tehát $R\varphi$ -re is, ha φ -re alkalmazhatók; ugyanez igaz az

$$a_1 R_1 \varphi + a_2 R_2 \varphi + \dots + a_n R_n \varphi$$

összegekre is. Ezek azonban irreducibilis ábrázolás esetében mindenütt sűrű függvényhalmazt képeznek.

Ha az ábrázolás nem irreducibilis, tekinthetjük az olyan hullámfüggvények N_0 halmazát, amelyekre mindegyik infinitezimális operátor alkalmazható. Ez a halmaz nyilvánvalóan lineáris és — az előző bekezdés értelmében — invariáns a csoport operációval szemben (azaz: φ -vel együtt tartalmazza valamennyi $R\varphi$ -t is). Ugyanez igaz az N_0 halmaz által generált N zárt halmazra, valamint azon függvények P halmazára is, amelyek az N halmazba tartozó összes függvényre merőlegesek. Valóban, ha φ_p merőleges minden, N -be tartozó φ_n -re, akkor merőleges minden $R^{-1}\varphi_n$ -re is; minthogy R unitér, az $R\varphi_p$ függvény merőleges minden φ_n -re, azaz szintén benne van a P halmazban.

Így tehát minden unitér ábrázolást felbonthatunk egy unitér transzformáció segítségével egy „normális” és egy „patologikus” részre. Az előbbihez mindenkor található olyan függvényekből álló mindenütt sűrű halmaz, amelyekre valamennyi infinitezimális operátor alkalmazható. Olyan hullámfüggvény, amelyre valamely „patologikus” ábrázolás valamennyi infinitezimális operátorát lehetne alkalmazni, nincs egy sem.

Murray és Neumann szerint, ha az eredeti ábrázolás faktoriális volt, mindazok az ábrázolások, melyekre azt felbonthatjuk, szintén faktoriális ábrázolások lesznek. Minden ábrázolás ekvivalens tehát faktoriális ábrázolások valamely összegével; ezek egy része „normális”, másik része „patologikus”.

Látni fogjuk azt is, hogy az inhomogén Lorentz-csoportnak nincsenek patologikus ábrázolásai. Így tehát a posteriori Majorana és Dirac ezen feltevése is igazolást nyer. Az inhomogén Lorentz-csoport minden unitér ábrázolása felbontható normális irreducibilis ábrázolásokra. Meg kell azonban állapítani, hogy azokat az ábrázolásokat, amelyekben az egységoperátor felel meg minden translációnak, mindeddig nem határozták meg (vö. még a 3. szakasz végével). Így a fenti állítások ezekre az ábrázolásokra nincsenek bizonyítva; ezek azonban inkább a homogén Lorentz-csoport ábrázolásai, semmint az inhomogén csoportéi.

Jóllehet mindezek az észrevételek talán csak a matematikusokat érdeklik, a Lorentz-csoport új ábrázolása, amelyet a 7. szakaszban írtunk le, a fizikust is érdekelheti. Ez az ábrázolás olyan részecskét ír le, amelynek a spinje folytonos.

Köszönetnyilvánítás. Ezen dolgozat tárgyát P. A. M. Dirac igen régen, 1928-ban javasolta nekem; ő már akkor felismerte az ábrázolások és a kvantummecha-

nikai egyenletek között fennálló kapcsolatot. Rendkívül le vagyok kötelezve neki azért a sok eszmecseréért, melyeket — különösen az 1934/35. évek folyamán — e tárgyról folytattunk s amelyekből ez a dolgozat kinőtt.

Ugyancsak le vagyok kötelezve Neumann Jánosnak segítségéért és baráti tanácsaiért.

3. A következő szakaszok összefoglalása

A 4. szakaszban az inhomogén Lorentz-csoport definíciójával és a homogén (közönséges) Lorentz-transzformációk sajátértékeinek és sajátvektorainak elméletével foglalkozunk. A tárgyalás szorosan fogja követni a közönséges tér mozgásainak megfelelő, jól ismert elméletét és az ortogonális transzformációk sajátértékeinek elméletét.¹² A tárgyalás csak az említett elméletekben szokásosan alkalmazott módszerek közvetlen általánosításából áll.

Az 5. szakaszban bebizonyítjuk, hogy a $D(L)$ -ben fellépő, fizikai jelentéssel nem rendelkező állandók oly módon határozhatók meg, hogy (3a) helyett a speciálisabb

$$D(L_1)D(L_2) = \pm D(L_1L_2) \quad (7)$$

egyenlet lesz érvényes. Ez azt jelenti, hogy a ténylező erejéig meghatározott ábrázolások helyett előjel erejéig meghatározott ábrázolásokat vizsgálhatunk. Arra az esetre, amikor vagy L_1 , vagy L_2 tiszta transláció, Dirac¹³ megadta (7) bizonyítását infinitezimális operátorok felhasználásával. Ehhez nagyon hasonló megfontolást végezhetünk azonban kizárólag véges transzformációk felhasználásával is.

Véges dimenziós ábrázolásokra (melyeknek véges számú lineárisan független állapot felel meg) a (7) összefüggést akkor is be lehetne bizonyítani (Weyl és Schreier módszerének¹⁴ direkt alkalmazásával), ha mind L_1 , mind L_2 homogén Lorentz-transzformáció. A Lorentz-csoportnak azonban nincs végesdimenziós ábrázolása (nem tekintve azt a triviális ábrázolást, melyben minden L -nek az egységoperáció felel meg). Így tehát Weyl és Schreier módszere nem alkalmazható. Ezen módszer első lépése abban áll, hogy a $D(L)$ mátrixok mindegyikében a határozatlan állandókat oly módon normáljuk, hogy $D(L)$ determinánsa 1 legyen. Általános unitér operátorok determinánsa nem definiálható.

Itt a következő módszert alkalmazzuk. Az L -ek mindegyikét két involúció szorzatára bontjuk: $L=MN$, ahol $M^2=N^2=1$. Ezután $D(M)$ -et és $D(N)$ -et oly módon normáljuk, hogy négyzetük egy legyen, azonkívül $D(L)=D(M)D(N)$. Ekkor bebizonyíthatjuk (7)-et anélkül, hogy a csoport topológiájára kellene hivatkoznunk.

A 6., 7. és 8. szakaszokban végezzük el az ábrázolások meghatározását. A tiszta translációk a teljes inhomogén Lorentz-csoport invariáns alcsoportját képezik s a 6. szakaszban Frobenius módszerét¹⁵ fogjuk alkalmazni, hogy az alcsoport ábrá-

¹² Vö. pl. E. Wigner, i. m. III. fejezet. O. Veblen és J. W. Young, Projective Geometry, Boston 1917. 2. kötet, különösen a VII. fejezet.

¹³ P. A. M. Dirac, sokszorosított előadási jegyzet, Princeton University, 1934/35, 5a. old.

¹⁴ H. Weyl, Mathem. Zeits. 23, 271; 24, 328, 377, 789, 1925; O. Schreier, Abhandl. Mathem. Seminar Hamburg, 4, 15, 1926; 5, 233, 1927.

¹⁵ G. Frobenius, Sitz. d. Kön. Preuss. Akad. 501. old., 1898, I. Schur, uo. 164. old. 1906; F. Seitz Ann. of Math. 37, 17, 1936.

zolásából kiindulva felépítsük az egész csoport ábrázolásait a „kis csoport” segítségével. A 6. szakaszban Neumann János egy még meg nem jelent munkája²⁴ alapján megmutatjuk, hogy minden irreducibilis ábrázoláshoz tartozik az „impulzusvektorok”-nak egy karakterisztikus (invariáns) serege. A Lorentz-csoport irreducibilis ábrázolásait négy osztályba fogjuk sorolni. Az impulzusvektorok az

1. *osztályban* időszerűek,
2. *osztályban* fényszerűek (négyzetük zérus, azonban komponenseik nem mind zérusok),
3. *osztályban* eltűnnek (azaz valamennyi komponensük zérus),
4. *osztályban* térszerűek.

A 7. szakaszban csak az első két esettel foglalkozunk, bár az utolsó eset matematikai szempontból igen érdekes lehet. Remélem, hogy egy másik dolgozatban még visszatérhetek rá. Mindeddig nem sikerült megadnom a 3. osztály teljes tárgyalását. (Mindezek a korlátozások a korábbi tárgyalásokban ugyancsak fellépnek.)

A 7. szakaszban újból megkapjuk az inhomogén Lorentz-csoport valamennyi ismert ábrázolását (azaz minden Lorentz-invariáns egyenletet), és két új sorozatot.

Az 5., 6., 7. szakaszok kizárólag a „korlátozott Lorentz-csoporttal” foglalkoznak, vagyis azokkal a Lorentz-transzformációkkal, melyeknek 1 a determinánsa és amelyek az időtengely irányát nem változtatják meg. A 8. szakaszban a kibővített Lorentz-csoport ábrázolásait vesszük szemügyre, amelyeknek transzformációira nincsenek kiróva e feltételek.

4. Az inhomogén Lorentz-csoport leírása

A.

Az $L=(a, A)$ inhomogén Lorentz-transzformáció az a valós vektor által meghatározott

$$x'_i = x_i + a_i \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (8)$$

transzlációnak és a A valós együtthatós

$$x'_i = \sum_{k=1}^4 A_{ik} x_k \quad (9)$$

homogén Lorentz-transzformációnak a szorzata. A transzlációt a homogén transzformáció alkalmazását követően kell elvégezni. A homogén transzformáció együtthatói három feltételnek tesznek eleget: (1) Valóság, és A változatlanul hagyja a $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$ indefinit kvadratikuss alakot:

$$AFA' = F, \quad (10)$$

ahol a vessző a sorok és az oszlopok felcserélését jelenti, F pedig a $-1, -1, -1, +1$ átlós elemekkel rendelkező átlós mátrix. — (2) A $|A_{ik}|$ determináns egyenlő 1-gyel, végül — (3) $A_{44} > 0$.

Az x és y vektorok Lorentz-hermitikus szorzatát a következőképpen fogjuk jelölni:

$$\{x, y\} = -x_1^* y_1 - x_2^* y_2 - x_3^* y_3 + x_4^* y_4. \quad (11)$$

(A csillag a konjugált imaginárius mennyiséget jelzi.) Ha $\{x, x\} < 0$, az x vektort térszerűnek, ha $\{x, x\} = 0$, null-vektornak, ha $\{x, x\} > 0$, időszerűnek mondjuk.

Az x valós időszerű vektor $x_4 > 0$ esetén a pozitív fénykúpban, $x_4 < 0$ esetén a negatív fénykúpban fekszik. Ha $\{x, y\} = 0$, azt mondjuk, hogy x és y ortogonális.

Lineáris transzformációról lévén szó, ha Λv -t négy lineárisan független vektor, $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}$ esetére megadjuk, ez a homogén Lorentz-transzformációt teljesen meghatározza.

A (11) és (10) összefüggésekből következik, hogy $\{v, w\} = \{\Lambda v, \Lambda w\}$ bármely v, w vektorpárra igaz. Ez az egyenlőség fennáll bármely vektorpárra, ha csak a $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}$ lineárisan független vektorokból kiválasztott minden $v^{(i)}, v^{(k)}$ párra teljesül. A realitási feltétel következik, ha $(\Lambda v^{(i)})^* = \Lambda(v^{(i)*})$ a négy lineárisan független $v^{(i)}$ vektorra teljesül.

Az x, y vektorok skalárszorzata pozitív, ha mind a ketten a pozitív, vagy mind a ketten a negatív fénykúpban fekszenek. A skalárszorzat negatív, ha a két vektor egyike a pozitív, másika a negatív fénykúpban fekszik. Mivel x és y mindketten időszerűek, fennáll:

$$|x_4|^2 > |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2, \quad |y_4|^2 > |y_1|^2 + |y_2|^2 + |y_3|^2.$$

A Schwarz-féle egyenlőtlenség folytán tehát

$$|x_4^* y_4| > |x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + x_3^* y_3|$$

és a két időszerű vektor skalárszorzatának előjelét időszerű komponenseik szorzata határozza meg.

Időszerű vektor Lorentz-transzformáltja időszerű vektor. Azonfelül a $\Lambda_{44} > 0$ feltétel folytán a 0, 0, 0, 1 komponensekkel rendelkező $v^{(0)}$ vektor bentmarad a pozitív fénykúpban, minthogy $\Lambda v^{(0)}$ negyedik komponense Λ_{44} . Legyen $v^{(1)}$ egy másik vektor¹⁶ a pozitív fénykúpban: $\{v^{(1)}, v^{(0)}\} > 0$, így tehát $\{\Lambda v^{(1)}, \Lambda v^{(0)}\} > 0$ is fennáll és $\Lambda v^{(1)}$ szintén benne van a pozitív fénykúpban. A Lorentz-transzformációkra érvényes harmadik feltétel a következő követelmény alakjában is megfogalmazható: minden vektor, mely a pozitív fénykúpban benne (vagy azon rajta) fekszik, benne (ill. rajta) is marad.

A harmadik feltételnek ez a megfogalmazása mutatja: két homogén Lorentz-transzformáció szorzata teljesíti a harmadik feltételt, ha az mindkét tényezőre teljesül. Ugyanez az első két feltételre vonatkozóan is nyilvánvaló.

A $\Lambda F \Lambda' = F$ összefüggést balról Λ^{-1} -gyel, jobbról $\Lambda'^{-1} = (\Lambda^{-1})'$ -vel megszorozva kapjuk: $F = \Lambda^{-1} F (\Lambda^{-1})'$, úgyhogy egy homogén Lorentz-transzformáció reciproka ugyancsak homogén Lorentz-transzformáció. A homogén Lorentz-transzformációk ennél fogva csoportot alkotnak.

Könnyű számítással meggyőződhetünk arról, hogy két inhomogén Lorentz-transzformáció: (b, M) és (c, N) szorzata ismét egy (a, A) inhomogén Lorentz-transzformáció:

$$(b, M)(c, N) = (a, A), \quad (12)$$

ahol

$$A_{ik} = \sum_j M_{ij} N_{jk}, \quad a_i = b_i + \sum_j M_{ij} c_j, \quad (12a)$$

vagy rövidebben

$$A = MN, \quad a = b + Mc.$$

¹⁶ Ha fennáll a vektorok és vektorkomponensek összetévesztésének lehetősége, a felső indexet a különböző vektorok, az alsó indexet a vektor komponenseinek jelölésére fogjuk használni.

B. A homogén Lorentz-transzformációk sajátértékeinek és sajátvektorainak elmélete

A homogén lineáris transzformációk a legegyszerűbben sajátértékeik és sajátvektoraik segítségével írhatók le. Mielőtt ezt a homogén Lorentz-csoport esetében megtennénk, szükségünk lesz két — ortogonális vektorokra vonatkozó — szabályra.

[1] Ha $\{v, w\} = 0$ és $\{v, v\} > 0$, akkor $\{w, w\} < 0$; ha $\{v, w\} = 0$, $\{v, v\} = 0$, akkor w vagy térszerű, vagy párhuzamos v -vel (vagy $\{w, w\} < 0$, vagy $w = cv$).

Bizonyítás:

$$v_4^* w_4 = v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3. \quad (13)$$

Ekkor a Schwarz-féle egyenlőtlenség folytán

$$|v_4|^2 |w_4|^2 \leq (|v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2) (|w_1|^2 + |w_2|^2 + |w_3|^2). \quad (14)$$

Ha $|v_4|^2 > |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2$, innen következik, hogy $|w_4|^2 < |w_1|^2 + |w_2|^2 + |w_3|^2$. Ha $|v_4|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2$, az utóbbi egyenlőtlenség ugyancsak következik, hacsak (14) alatt az egyenlőtlenség jele érvényes. Az egyenlőségi jel azonban csak akkor lehet érvényes, ha v és w első három komponense között arányosság áll fenn. Ekkor (13) folytán, mivel mindkét vektor null-vektor, a negyedik komponensek is ugyanolyan arányban állnak.

[2] Ha $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}$ egymásra ortogonálisak és lineárisan függetlenek, egy közülük időszerű, a többi három térszerű.

Bizonyítás: Az előző bekezdésben mondottakból következik, hogy négy egymásra merőleges, lineárisan független vektor közül csak egy lehet időszerű vektor vagy null-vektor. Azt kell tehát még megmutatnunk, hogy az egyik közülük *tényleg* időszerű vektor. Minthogy $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}$ lineárisan függetlenek, bármely időszerű vektor kifejezhető a segítségükkel:

$$v^{(t)} = \sum_{k=1}^4 \alpha_k v^{(k)}.$$

Ezen egyenlet bal oldalának önmagával képezett skaláris szorzata pozitív, ennél fogva

$$\left\{ \sum_k \alpha_k v^{(k)}, \sum_k \alpha_k v^{(k)} \right\} > 0$$

vagy

$$\sum_k |\alpha_k|^2 \{v^{(k)}, v^{(k)}\} > 0 \quad (15)$$

s a $\{v^{(k)}, v^{(k)}\}$ skaláris szorzatok közül egynek pozitívnak kell lennie. Négy, egymásra ortogonális vektor nem szükségképpen lineárisan független, mivel minden null-vektor merőleges önmagára. Ha azonban a négy vektor egyike sem null-vektor, akkor a lineáris függetlenség teljesül.

Most rátérünk a Λ transzformáció λ sajátértékeire. A λ sajátértéket az jellemzi, hogy a $\Lambda - \lambda I$ mátrix $|\Lambda - \lambda I|$ determinánsa eltűnik.

[3] Ha a λ sajátérték, λ^* , λ^{-1} és λ^{*-1} ugyancsak sajátértékek.

Bizonyítás: Ami λ^* -ot illeti, ez abból következik, hogy a A valós. Továbbá ha $|A - \lambda I| = 0$, ebből következik $|A' - \lambda I| = 0$ fennállása is; ezt megszorozva AF , valamint F^{-1} determinánsával, kapjuk:

$$|AF| \cdot |A' - \lambda I| \cdot |F|^{-1} = |AF A' F^{-1} - \lambda A| = |1 - \lambda A| = 0,$$

úgyhogy λ^{-1} ugyancsak sajátérték.

[4] A λ_1 , ill. λ_2 sajátértékekhez tartozó v_1 és v_2 sajátvektorok ortogonálisak, ha $\lambda_1^* \lambda_2 \neq 1$.

Bizonyítás:

$$\{v_1, v_2\} = \{Av_1, Av_2\} = \{\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2\} = \lambda_1^* \lambda_2 \{v_1, v_2\}.$$

Ha tehát $\{v_1, v_2\} \neq 0$, $\lambda_1^* \lambda_2 = 1$.

[5] Ha a λ sajátérték abszolút értéke egytől különbözik: $|\lambda| \neq 1$, a megfelelő v sajátvektor null-vektor, λ maga pedig valós és pozitív.

A $\{v, v\} = \{Av, Av\} = |\lambda|^2 \{v, v\}$ egyenlőségből $|\lambda| \neq 1$ esetén $\{v, v\} = 0$ azonnal következik. Ha λ komplex volna, λ^* szintén sajátérték lenne. A λ, λ^* sajátértékhez tartozó két sajátvektor két különböző null-vektor lenne, amelyek [4] következtében ortogonálisak egymásra. Ez azonban [1] folytán lehetetlen. Így tehát λ valós, v pedig valós null-vektor. Ekkor a homogén Lorentz-transzformációkra vonatkozó harmadik feltétel értelmében λ -nak pozitívnak kell lennie.

[6] A v zérus hosszúságú sajátvektorhoz tartozó λ sajátérték valós és pozitív.

Ha λ nem volna valós, λ^* is sajátérték lenne. A megfelelő v^* sajátvektor különbözne v -től, ugyancsak null-vektor lenne, és [4] értelmében merőleges lenne v -re. Ez azonban [1] folytán lehetetlen.

[7] A λ komplex sajátértékhez (amelynek [5] folytán 1 az abszolút értéke) tartozó v sajátvektor térszerű: $\{v, v\} < 0$.

Bizonyítás: λ^* szintén sajátérték; a megfelelő sajátvektor v^* . Minthogy $(\lambda^*)^* \lambda = \lambda^2 \neq 1$, $\{v^*, v\} = 0$. Minthogy ezek különböző vektorok, legfeljebb egyikük térszerű. Mivel $\{v, v\} = \{v^*, v^*\}$, mind a ketten térszerűek. Ha mind a négy sajátérték komplex volna, a megfelelő sajátvektorok pedig lineárisan függetlenek (ami igaz, kivéve ha A -nak elemi osztói vannak), négy térszerű, egymásra ortogonális vektorunk lenne. Ez [2] folytán lehetetlen. Eszerint:

[8] Egynél több komplex konjugált sajátérték-pár nem létezhet, ha A -nak nincs elemi osztója. Hasonló módon — ugyanezen feltétel mellett — legfeljebb egy olyan λ, λ^{-1} sajátérték-pár létezhet, melyek abszolút értéke 1-től különböző. Ha nem így lenne, sajátvektoraik ortogonálisak volnának, ami azonban lehetetlen, mivel null-vektorokról van szó.

Homogén Lorentz-transzformációk esetében, melyeknek nincs elemi osztójuk, a következő esetek lehetségesek:

a) Van egy egységnyi abszolútértékű komplex sajátérték-pár; [5] folytán

$$\lambda_1 = \lambda_2^* = \lambda_2^{-1}, \quad |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \quad (16)$$

továbbá egy λ_3, λ_4 sajátérték-pár, melyek abszolút értéke különbözik 1-től. Ezek szükségképpen valósak és pozitívak:

$$\lambda_4 = \lambda_3^{-1}, \quad \lambda_3 = \lambda_3^* > 0. \quad (16a)$$

A komplex konjugált sajátértékekhez tartozó sajátvektorok komplex konjugáltak, egymásra merőlegesek és térszerűek, úgyhogy -1 -re normálhatók:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2^*, \quad \{v_1, v_2\} = \{v_1, v_1^*\} = 0, \\ \{v_1, v_1\} &= \{v_2, v_2\} = -1; \end{aligned} \quad (17)$$

a valós sajátértékekhez tartozó sajátvektorok null-vektorok, skalárszorzatukat 1 -re normálhatjuk

$$\begin{aligned} v_3 &= v_3^*, \quad v_4 = v_4^*, \quad \{v_3, v_4\} = 1, \\ \{v_3, v_3\} &= \{v_4, v_4\} = 0. \end{aligned} \quad (17a)$$

Végül az előbbi pár sajátvektorai merőlegesek az utóbbi fajta sajátvektorokra:

$$\{v_1, v_3\} = \{v_1, v_4\} = \{v_2, v_3\} = \{v_2, v_4\} = 0. \quad (17b)$$

Ki fog tűnni, hogy minden más eset, amikor A -nak nincs elemi osztója, speciális esete a)-nak.

b) Van egy $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_1^{-1} = \lambda_1^*$, $\lambda_1 \neq \lambda_1^*$, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ komplex sajátérték-pár. Nincs viszont $|\lambda_3| \neq 1$ tulajdonságú sajátérték-pár. Fennáll [8] szerint továbbra is $\lambda_3 = \lambda_3^*$; innen $|\lambda_3| = 1$ felhasználásával kapjuk: $\lambda_3 = \pm 1$. Minthogy a homogén Lorentz-transzformációkra vonatkozó második feltétel szerint a $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ szorzat egyenlő 1 -gyel, λ_3 és λ_4 megegyezik: $\lambda_4 = \lambda_3 = \pm 1$. A ± 1 kétszeres sajátértékhez két lineárisan független sajátvektor tartozik: v_3 és v_4 ; ezekről feltehetjük, hogy merőlegesek egymásra: $\{v_3, v_4\} = 0$. Minthogy [2] szerint a négy sajátvektor közül egynek időszerűnek kell lennie, és mivel a λ_1 -hez és λ_2 -höz tartozó sajátvektorok térszerűek, az időszerű sajátvektornak a ± 1 sajátértékhez kell tartoznia. Ennek pozitívnak kell lennie, így tehát $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. A $\{v_3, v_3\} = -1$ időszerű és a $\{v_4, v_4\} = 1$ térszerű vektorból két null-vektort szerkeszthetünk: $v_4 + v_3$ -at és $v_4 - v_3$ -at. Ezt elvégezve, b) speciális esetévé válik a)-nak, ahol a valós pozitív sajátérték $\lambda_3 = \lambda_4^{-1} = 1$ -gyel lesz egyenlő.

c) Valamennyi sajátérték valós, van azonban egy olyan $\lambda_3 = \lambda_3^*$, $\lambda_4 = \lambda_3^{-1}$ sajátérték-pár, amelynek abszolút értéke nem egy. Ekkor $\{v_3, v_3\} = \{v_4, v_4\} = 0$ és $\lambda_3 > 0$, s λ_1 -re és λ_2 -re vonatkozóan, amint előzőleg λ_3 és λ_4 esetében tettük, levonhatjuk a következtetést, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$. Ez ismét speciális esete a)-nak; itt a két, egységnyi abszolútértékű sajátérték egyenlő lesz.

d) Valamennyi sajátérték valós és abszolút értékük egy. Ha mindegyikük $+1$, az egységmátrixot kapjuk, mely nyilvánvalóan a) speciális esetének tekinthető. A másik eset: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = +1$. A λ_1, λ_2 sajátértékekhez tartozó sajátvektoroknak térszerűeknek kell lenniök, tekintettel a homogén Lorentz-transzformációkra vonatkozó harmadik feltételre; feltehető, hogy ortogonálisak és 1 -re normáltak. Ez tehát speciális esete b)-nek és így a)-nak is. Az a), b), c), d) eseteket az 1. ábra szemlélteti.

Azoknak az eseteknek a vizsgálata van hátra, amikor A -nak elemi osztója van. Legyen tehát

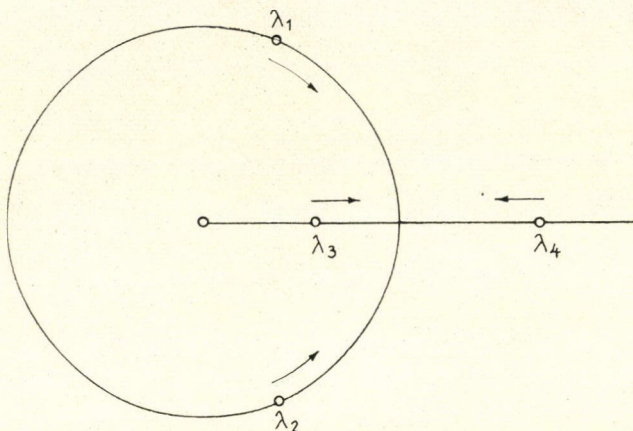
$$A_e v_e = \lambda_e v_e, \quad A_e w_e = \lambda_e w_e + v_e. \quad (18)$$

Figyelembe véve [5]-öt, megállapíthatjuk, hogy vagy $|\lambda_e| = 1$, vagy $\{v_e, v_e\} = 0$. Kapjuk: $\{v_e, w_e\} = \{A_e v_e, A_e w_e\} = |\lambda_e|^2 \{v_e, w_e\} + \{v_e, v_e\}$. Ebből az egyenletből

$$\{v_e, v_e\} = 0 \quad (19)$$

következik, ha $|\lambda_e|=1$, úgyhogy (19) mindenképpen fennáll. Ekkor [6]-ból következik, hogy λ_e valós, pozitív és feltehetjük, hogy v_e, w_e is valós. Az utóbbi egyenlet most a $\{v_e, w_e\} = \lambda_e^2 \{v_e, w_e\}$ alakot ölti; így vagy $\lambda_e=1$, vagy $\{v_e, w_e\}=0$. Végül kapjuk:

$$\{w_e, w_e\} = \{A_e w_e, A_e w_e\} = \lambda_e^2 \{w_e, w_e\} + 2\lambda_e \{w_e, v_e\} + \{v_e, v_e\}.$$



1. ábra. A sajátértékek elhelyezkedése az általános a) esetben a komplex síkban. A b) esetben λ_3 és λ_4 egybeesik és 1-gyel egyenlő; a c) esetben λ_1 és λ_2 egybeesik és +1-gyel vagy -1-gyel egyenlő. A d) esetben mindkét pár egybeesik: $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ és $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$.

Ez az egyenlet most azt mutatja, hogy

$$\{w_e, v_e\} = 0, \quad (19a)$$

még akkor is, ha $\lambda_e=1$. A (19), (19a) képletekből következik, hogy w_e térszerű és ekképp normálható:

$$\{w_e, w_e\} = -1. \quad (19b)$$

A (19a) összefüggést a megelőző egyenletbe behelyettesítve kapjuk végül:

$$\lambda_e = 1. \quad (19c)$$

[9] Ha A_e -nek van elemi osztója, minden sajátértéke 1.

A (19c) egyenletből látjuk, hogy az elemi osztó sajátértéke 1 és hogy ez leg-

alább kétszeres gyök. Ha A -nak volna egy $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$ sajátérték-párja, a megfelelő v_1, v_2 sajátvektorok v_e -re ortogonálisak s így térszerűek volnának. Ekkor [5] értelmében $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ és $\{v_1, v_2\} = 0$. Azonkívül a $\{w_e, v_1\} = \{A_e w_e, A_e v_1\} = \lambda_1 \{w_e, v_1\} + \lambda_1 \{v_e, v_1\}$ és a $\{v_e, v_1\} = 0$ egyenletből következik $\{w_e, v_1\} = 0$ is. Eszerint a négy négyesvektor: v_1, v_2, v_e, w_e egymásra ortogonális lenne. Ezt azonban [2] és (19) kizárja.

Mármost két eset képzelhető el. A négyszeres sajátértékhez vagy csak egy sajátvektor tartozik, vagy pedig v_e -n kívül van (legalább) még egy v_1 sajátvektor. Az előbbi esetben találhatunk négy lineárisan független v_e, w_e, z_e, x_e vektort oly módon, hogy

$$A_e v_e = v_e, \quad A_e w_e = w_e + v_e,$$

$$A_e z_e = z_e + w_e, \quad A_e x_e = x_e + z_e.$$

A $\{v_e, x_e\} = \{A_e v_e, A_e x_e\} = \{v_e, x_e\} + \{v_e, z_e\} = 0$ összefüggésből $\{v_e, z_e\} = 0$ következik. Másrésztől

$$\{w_e, z_e\} = \{A_e w_e, A_e z_e\} = \{w_e, z_e\} + \{w_e, w_e\} + \{v_e, z_e\} + \{v_e, w_e\}.$$

Innen, tekintettel a (19a) (19b) képletekre $\{v_e, z_e\} = 1$ adódik, úgyhogy ezt az esetet ki kell zárni.

c) Van tehát olyan v_1 vektor, hogy (18) mellett

$$\Lambda_e v_1 = v_1, \quad (18a)$$

is fennáll. A $\{w_e, v_1\} = \{\Lambda_e w_e, \Lambda_e v_1\} = \{w_e, v_1\} + \{v_e, v_1\}$ összefüggésből

$$\{v_e, v_1\} = 0 \quad (19d)$$

következik. A (18), (18a) egyenletek változatlanok maradnak, ha w_e -hez és v_1 -hez hozzáadjuk v_e valamely többszörösét. Ily módon elérhetjük, hogy mind w_e , mind v_1 negyedik komponense eltűnjék. Azonkívül v_1 -et normálhatjuk -1 -re és tetszőleges együtthatóval megszorozva hozzáadhatjuk w_e -hez, hogy ily módon v_1 -re ortogonális vektort kapjunk. Eszerint feltehetjük, hogy

$$v_{14} = w_{e4} = 0, \quad \{v_1, v_1\} = -1, \quad \{w_e, v_1\} = 0. \quad (19e)$$

Végül definiálhatjuk a z_e null-vektort oly módon, hogy ortogonális legyen w_e -re és v_1 -re, és v_e -vel képezett skalárszorzata 1 legyen:

$$\{z_e, z_e\} = \{z_e, w_e\} = \{z_e, v_1\} = 0, \quad \{z_e, v_e\} = 1. \quad (19f)$$

Ekkor v_e és z_e — mind a kettő null-vektor — két ellentétes irányú fénynyaláb impulzusát reprezentálja. Legyen $\Lambda_e z_e = av_e + bw_e + cz_e + dv_1$; a $\{z_e, v\} = \{\Lambda_e z_e, \Lambda_e v\}$ feltétel, ha azt rendre a v_e, w_e, z_e, v_1 vektorokra alkalmazzuk, a $c = 1, b = c; 2ac - b^2 - d^2 = 0; d = 0$ feltételeket adja. Így tehát

$$\Lambda_e v_e = v_e, \quad \Lambda_e w_e = w_e + v_e, \quad (20)$$

$$\Lambda_e v_1 = v_1, \quad \Lambda_e z_e = z_e + w_e + \frac{1}{2} v_e.$$

Valamely Lorentz-transzformáció, amelynek elemi osztója van, legjobban azzal a v_e null-vektorral jellemezhető, mely invariáns vele szemben és amelynek térbeli része a két másik vektorral, w_e -vel és v_1 -gyel együtt három, egymásra ortogonális vektort képez a közönséges térben. A w_e, v_1 vektorok normáltak, v_1 invariáns Λ_e -vel szemben, s a w_e vektorhoz Λ_e alkalmazásakor v_e adódik hozzá. Ha a Λ_e transzformációt egy a v_e, w_e, v_1 vektoroktól lineárisan független vektorra alkalmazzuk, a kapott eredményt — mint láttuk — a $\Lambda_e v_e, \Lambda w_e, \Lambda v_1$ vektorokra érvényes kifejezések már meghatározzák.

Azok a $\Lambda_e(\gamma)$ transzformációk, amelyekhez ugyanazon invariáns v_e null-vektor, valamint ugyanazon w_e (és ennél fogva ugyanaz a v_1) tartozik, és amelyek csak abban különböznek egymástól, hogy w_e -hez v_e -nek különböző γv_e többszöröszeit adják hozzá, ciklikus csoportot képeznek, melyben a $\gamma=0$ -hoz tartozó egységtranszformáció az egységelem:

$$\Lambda_e(\gamma) \Lambda_e(\gamma') = \Lambda_e(\gamma + \gamma').$$

Az $M(\alpha)$ Lorentz-transzformáció, amely v_1 -et és w_e -t változatlanul hagyja, v_e -t pedig αv_e -vel (és z_e -t $\alpha^{-1} z_e$ -vel) helyettesíti, $\Lambda_e(\gamma)$ -ra alkalmazva a következőt adja:

$$M(\alpha) \Lambda_e(\gamma) M(\alpha)^{-1} = \Lambda_e(\alpha\gamma). \quad (+)$$

Egy példa $A_e(\gamma)$ -ra és $M(\alpha)$ -ra:

$$A_e(\gamma) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma & \gamma \\ 0 & -\gamma & 1 - \frac{1}{2}\gamma^2 & -\frac{1}{2}\gamma^2 \\ 0 & \gamma & \frac{1}{2}\gamma^2 & 1 + \frac{1}{2}\gamma^2 \end{vmatrix},$$

$$M(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^{-1}) & \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^{-1}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^{-1}) & \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^{-1}) \end{vmatrix}.$$

Ezek a Lorentz-transzformációk fontos szerepet játszanak a térbeli impulzusvektorú ábrázolások esetében.

Véges unitér mátrixok esetében a (+) mintát követő viselkedés nem lehetséges, mivel $M(\alpha)^{-1}A_e(\gamma)M(\alpha)$ és $A_e(\gamma)$ sajátértékei megegyeznek, $A_e(\gamma\alpha) = A_e(\gamma)^2$ sajátértékei viszont $A_e(\gamma)$ sajátértékeinek α -ik hatványával egyeznek meg. Ez igen egyszerűen mutatja, hogy a Lorentz-csoportnak nincs véges dimenziós hű unitér ábrázolása.

C. Homogén Lorentz-transzformáció felbontása elforgatásokra és adott irányú gyorsításra

A homogén Lorentz-transzformáció a fizikus szempontjából: áttérés egy olyan egyenletesen mozgó koordinátarendszerre, amelynek kezdőpontja a $t=0$ időpontban egybeesik az első koordinátarendszer kezdőpontjával. Először elvégezhetünk tehát egy elforgatást, mely a második rendszer mozgásirányát adott irányba — mondjuk a harmadik koordinátatengely irányába — viszi át, ezután sebességet adunk neki ebben az irányban, úgyhogy a nyugalom állapotába jusson. Ez azt jelenti, hogy minden homogén Lorentz-transzformációt fel lehet bontani a következőképpen¹⁷:

$$A = RZS; \quad (21)$$

itt R és S tiszta elforgatás (vagyis $R_{i4} = R_{4i} = S_{i4} = S_{4i} = 0$, ha $i \neq 4$, és $R_{44} = S_{44} = 1$, továbbá $R' = R^{-1}$, $S' = S^{-1}$), Z pedig gyorsítás a harmadik koordinátatengely irányában:

$$Z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix},$$

¹⁷ Vö. pl. L. Silberstein, The Theory of Relativity, London 1924, 142. old.

ahol $a^2 - b^2 = 1$, $a > b > 0$. A (21) felbontás nyilvánvalóan nem egyértelmű. Meg fogjuk azonban mutatni, hogy Z egyértelműen meg van határozva, vagyis ugyanazt a transzformációt jelenti minden (21) alakú felbontásban.

Abból a célból, hogy ezt matematikailag bebizonyítsuk, R -et úgy választjuk, hogy $R^{-1}A = I$ -ben a negyedik oszlop első két komponense zérussá váljon: $I_{14} = I_{24} = 0$; R^{-1} a A_{14} , A_{24} , A_{34} komponensekkel rendelkező vektort a harmadik koordinátatengely irányába forgatja be. Ezután b -t és a -t Z -ben $I_{34} = (A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2)^{\frac{1}{2}}$ -nel, ill. $I_{44} = A_{44}$ -gyel választjuk egyenlőnek; ezek eleget tesznek az $I_{44}^2 - I_{34}^2 = 1$ egyenletnek. Ennek folytán $J = Z^{-1}I = Z^{-1}R^{-1}A$ negyedik oszlopának első három komponense zérussal lesz egyenlő, J_{44} pedig eggyel, tekintettel a $J_{44}^2 - J_{14}^2 - J_{24}^2 - J_{34}^2 = 1$ egyenlőségre. Azonkívül J negyedik sorának első három komponense is eltűnik, $J_{44}^2 - J_{14}^2 - J_{24}^2 - J_{34}^2 = 1$ folyományaképpen, azaz: $J = S = Z^{-1}R^{-1}A$ tiszta elforgatás. Ezzel igazoltuk a (21) felbontás lehetőségét.

A $AA' = RZ^2R^{-1}$ transzformáció átlósösszege egyenlő Z^2 átlósösszegével, azaz $2a^2 + 2b^2 + 2 = 4a^2 = 4b^2 + 4$ -gyel, ami mutatja, hogy a Z transzformáció a , b elemei egyértelműen meg vannak határozva. A $AA' = 1$ speciális esetben, vagyis ha A tiszta elforgatás, $a = 1$, $b = 0$ és Z az egységmátrix.

Könnyű mármost megmutatni, hogy a homogén Lorentz-transzformációk csoporttere csak kétszeresen összefüggő. Ha adott a homogén Lorentz-transzformációk $A(t)$ folytonos serege, mely mind $t = 0$, mind $t = 1$ esetén az egységtranszformációt adja, alkalmazhatjuk rá a (21) felbontást:

$$A(t) = R(t)Z(t)S(t). \quad (21a)$$

A fentiekből kitérünk továbbá: hogy $R(t)$ folytonos t -ben, kivéve t -nek azon értékeit, melyekre $A_{14} = A_{24} = A_{34} = 0$, vagyis amelyekre A tiszta elforgatás. Hasonlóképpen, $Z(t)$ is folytonos függvénye t -nek, még akkor is, ha $A(t)$ tiszta elforgatás. Végezetül, $S = Z^{-1}R^{-1}A$ szintén folytonos, kivéve ha $A(t)$ tiszta elforgatás.

Tekintsük most a

$$A_s(t) = R(t)Z(t)^s S(t) \quad (21b)$$

Lorentz-transzformációk seregét, ahol a $Z(t)^s$ mátrixot jellemző b a $Z(t)$ mátrix b -jének s -szerese. Folytonosan csökkentve s -et 1-től 0-ig, a Lorentz-transzformációk $A_1(t) = A(t)$ seregét folytonosan az elforgatások $A_0(t) = R(t)S(t)$ seregébe deformálhatjuk. E seregnek mind a kezdete, mind a vége az egységmátrix marad: $A_0(0) = 1$, $A_s(1) = 1$, és a $A_s(t)$ seregek mind folytonosak maradnak s minden értékére. Ez az utóbbi tény nyilvánvaló t minden olyan értékére, amelyre $A(t)$ nem elforgatás; az ilyen t mellett (21b) minden tényezője folytonos. Igaz azonban az olyan t_0 mellett is, melyre $A(t_0)$ elforgatás, és amelyre így $Z(t_0) = 1$ és $A_s(t_0) = A_1(t_0) = A(t_0)$. Minthogy $Z(t)$ mindenütt folytonos, t_0 -nak van olyan környezete, melyben $Z(t)$ és így $Z(t)^s$ is tetszőlegesen megközelíti az egységmátrixot. Ebben a környezetben $A_s(t) = A(t) \cdot S(t)^{-1}Z(t)^{-1}Z(t)^s S(t)$ tetszőlegesen megközelíti $A(t)$ -t, s ha a környezet elég kicsiny, ez tetszőlegesen megközelíti $A(t_0) = A_s(t_0)$ -t.

Eszerint (21b) a Lorentz-transzformációk $A(t)$ folytonos seregét az elforgatások folytonos seregével helyettesíti. Mivel ezek csupán kétszeresen összefüggő sokaságot képeznek, a Lorentz-transzformációk sokasága sem lehet kettőnél többszörösen

összefüggő. A csoport kétértékű ábrázolásának¹⁸ létezése azt mutatja, hogy ténylegesen kétszeresen összefüggő, nem pedig egyszeresen.

A Lorentz-csoportból képezhetünk egy új csoportot¹⁴, melynek elemei a Lorentz-csoport elemei, hozzájuk véve a $\Lambda(t)$ utat, amely összeköti $\Lambda(1)=A$ -t a $\Lambda(0)=E$ egységmátrixszal. Megjegyezzük, hogy két olyan utat, amely folytonosan egymásba deformálható, azonosnak tekintünk. A „ Λ és a $\Lambda(t)$ út” elemnek az „ I és az $I(t)$ út” elemmel képezett szorzata az elem, valamint az az út, amely E -től $\Lambda(t)$ mentén Λ -hoz, s így $\Lambda I(t)$ mentén ΛI -hez vezet. Nyilvánvaló, hogy a Lorentz-csoport izomorf ezzel a csoporttal, és ennek a csoportnak két eleme (melyek a Λ -hoz vezető két — lényegesen különböző — útnak felelnek meg) feleltethető meg a Lorentz-csoport egy elemének. Jól ismert,¹⁸ hogy ez a csoport holomorf az unimoduláris komplex kétdimenziós transzformációk csoportjával.

A Lorentz-csoport minden „előjel erejéig adott” folytonos ábrázolása folytonos, egyértékű ábrázolása ennek a csoportnak. A „ Λ és a $\Lambda(t)$ út” elemnek az a $d(\Lambda)$ transzformáció felel meg, amelyet úgy kapunk, hogy $d(E)=d(\Lambda(0))=1$ -től $d(\Lambda(t))$ mentén folytonosan haladunk $d(\Lambda(1))=d(\Lambda)$ -ig.

D. A homogén Lorentz-csoport egyszerű

Először megmutatjuk, hogy a homogén Lorentz-csoport egy invariáns alcsoportja tartalmaz elforgatást (azaz olyan transzformációt, amely x_4 -et változatlanul hagyja). — Az invariáns alcsoport valamely tetszőleges eleme felírható a (21) alatt megadott RZS alakban. Ezzel együtt eleme az invariáns alcsoportnak $S \cdot RZS \cdot S^{-1} = SRZ = TZ$ is. Ha X_π az első koordinátatengely körül π szöggel elvégzett elforgatás, $X_\pi Z X_\pi = Z^{-1}$ és $X_\pi T Z X_\pi^{-1} = X_\pi T X_\pi X_\pi Z X_\pi = X_\pi T X_\pi Z^{-1}$ ugyancsak benne foglaltatik az invariáns alcsoportban s így az utóbbinak Z -vel képezett $Z^{-1} X_\pi T X_\pi$ transzformáltja is. Ennek TZ -vel képezett szorzata $T X_\pi T X_\pi$ és ez x_4 -et változatlanul hagyja. Ha $T X_\pi T X_\pi = 1$, választhatjuk $T Y_\pi T Y_\pi$ -t. Ha ez is egyenlő az egységgel, akkor $T X_\pi T X_\pi = T Y_\pi T Y_\pi$ és T felcserélhető $X_\pi Y_\pi$ -vel, azaz: a harmadik koordinátatengely körül végrehajtott elforgatás. Ebben az esetben TZ térszerű (komplex) sajátvektorai benne fekszenek az első két koordinátatengely síkjában. Ha TZ -t az első koordinátatengely irányába eső gyorsításnak vetjük alá, az invariáns alcsoport új elemét kapjuk; ezen elem térszerű sajátvektorainak negyedik komponense zérustól különböző lesz. Válasszuk ezt RZS -nek s transzformáljuk ismét S segítségével; az eredmény egy új $SRZ = TZ$ lesz. Minthogy azonban S változatlanul hagyja x_4 -et, ezen TZ térszerű sajátvektorainak negyedik komponense zérustól különböző lesz s az imént leírt eljárás segítségével olyan elforgatást kaphatunk belőle, amely szükségképpen benne foglaltatik az invariáns alcsoportban.

Még meg kell mutatnunk, hogy egy invariáns alcsoport, amely tartalmaz elforgatást, tartalmazza az egész homogén Lorentz-csoportot. Minthogy a háromdimenziós forgáscsoport egyszerű, minden elforgatás szükségképpen eleme az invariáns

¹⁸ Vö. H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, 1. kiadás, Leipzig 1928, 110—114. old., 2. kiadás, Leipzig 1931, 130—133. old. Talán érdekes megjegyezni, hogy lényegében ugyanezt az izomorfizmust már L. Silberstein felismerte, i. m. 148—157. old.

alcsoporthoz. Így tehát az első koordinátatengely körül π szöggel végrehajtott X_π elforgatás, továbbá ennek Z -vel képezett transzformáltja, valamint

$$ZX_\pi Z^{-1} \cdot X_\pi = Z \cdot X_\pi Z^{-1} X_\pi = Z^2$$

is benne foglaltatik az invariáns alcsoporthoz. Azonban a harmadik koordinátatengely irányában való tetszőleges gyorsítás felírható ebben az alakban. Minthogy az invariáns alcsoporthoz az összes elforgatást is tartalmazza, a (21) képlet alapján megállapíthatjuk, hogy ugyanez igaz a homogén Lorentz-csoport valamennyi elemére.

Ebből következik, hogy a homogén Lorentz-csoportnak — eltekintve az egység-mátrixok segítségével létesített ábrázolástól — csak hű ábrázolásai vannak. A B) rész végén tett megjegyzésből következik, hogy ezek mind végtelen dimenziósak. Ez még a kétértékű ábrázolásokra is vonatkozik, melyekkel az 5. szakaszban, (52D) alatt találkozunk majd, minthogy azoknak a csoportelemeknek, amelyeknek a pozitív vagy a negatív egység-mátrix felel meg, invariáns alcsoporthoz kell képezniük, és mivel a B) rész végén közölt érvelés érvényes a kétértékű ábrázolásokra is. Könnyen belátható továbbá az (52B), (52C) egyenletek alapján, hogy az inhomogén Lorentz-csoportra szintén vonatkozik.

5. A tényező erejéig adott ábrázolások visszavezetése kétértékű ábrázolásokra

A tényező erejéig adott ábrázolásokat oly módon vezetjük vissza kétértékű ábrázolásokra, hogy megadjuk az egyes unitér transzformációkat, melyeket az elmélet fizikai tartalma s a csupán egységnyi abszolút-értékű tényező — a „fázis” — erejéig adott megfeleltetés létesítése határoz meg, s látni fogjuk, hogy ezek a fázisok az ábrázolási operátoroknak csupán az előjelét hagyják meg határozatlannak. Az a eltolásnak megfelelő unitér operátort $T(a)$ -val, a A homogén Lorentz-transzformációnak megfelelő operátort $d(A)$ -val jelöljük. Az általános inhomogén Lorentz-transzformációnak ekkor $D(a, A) = T(a)d(A)$ felel meg. A (12) összefüggések helyett a következőket fogjuk használni:

$$T(a)T(b) = \omega(a, b)T(a+b), \quad (22B)$$

$$d(A)T(a) = \omega(A, a)T(Aa)d(A), \quad (22C)$$

$$d(A)d(I) = \omega(A, I)d(AI). \quad (22D)$$

Az ω számok egységnyi abszolútértékűek. Ezek azért lépnek fel, mert a (12) szorzási szabályok a reprezentáló operátorokra csak egy tényező erejéig érvényesek. Ettől eltekintve a (22) összefüggések következményei a (12) összefüggéseknek, ill. maguk helyettesítik azokat. A $T(a)$, $d(A)$ operátorokat $\Omega(a)T(a)$ -val, ill. $\Omega(A)d(A)$ -val fogjuk helyettesíteni; ezekre a (22) összefüggésekhez hasonló egyenletek érvényesek, most azonban

$$\omega(a, b) = 1, \quad \omega(A, a) = 1, \quad \omega(A, I) = \pm 1. \quad (22')$$

A.

Először is meg kell mutatnunk, hogy a $D(L)$ ábrázolásban fellépő határozatlan tényezőket olyan alakúaknak feltételezhetjük, hogy az $\omega(a, b)$, $\omega(A, a)$, $\omega(A, I)$ faktorok — alacsonyabb dimenziós tartományoktól eltekintve — argumentumaik

folytonos függvényei legyenek. Ez következménye az ábrázolás folytonos voltának; ezt tárgyaljuk először.

a) A fizikus szempontjából, a tényező erejéig adott ábrázolás folytonosságának természetes definíciója a következő. Az $L_0 = (b, I)$ Lorentz-transzformáció δ környezete tartalmazza mindazokat az $L(a, A)$ transzformációkat, amelyekre $|a_x - b_x| < \delta$ és $|A_{ik} - I_{ik}| < \delta$ teljesül. A $D(L)$ tényező erejéig adott ábrázolás folytonos, ha minden pozitív ε számhoz, minden normált φ hullámfüggvényhez és minden L_0 Lorentz-transzformációhoz megadható L_0 -nak egy olyan δ környezete, hogy ezen környezetbe eső bármely L -hez található olyan 1 abszolút értékű Ω (ez az Ω függvénye L -nek és φ -nek), hogy $(u_\varphi, u_\varphi) < \varepsilon$, ahol

$$u_\varphi = (D(L_0) - \Omega D(L))\varphi. \quad (23)$$

Válasszunk most egy L_0 pontot a csoporttérben és keressünk olyan normált φ hullámfüggvényt, amelyre fennáll $|(\varphi, D(L_0)\varphi)| > 1/6$. Ilyen φ mindig létezik, ha ugyanis $|(\varphi, D(L_0)\varphi)| < 1/6$, akkor $\psi = \alpha\varphi + \beta D(L_0)\varphi$ alkalmasan választott α és β mellett normált lesz és fennáll $|(\psi, D(L_0)\psi)| > 1/6$. Tekintsük most L_0 -nak mindazon L -ekből álló \mathfrak{R} környezetét, amelyekre $|(\varphi, D(L)\varphi)| > 1/12$. Jól ismert¹⁹, hogy az egész csoporttér lefedhető ilyen környezetekkel. Meg kívánjuk mármost mutatni, hogy $D(L)\varphi$ megszorozható olyan egységnyi abszolút-értékű fázisfaktorokkal (ezek függnek L -től), hogy az \mathfrak{R} tartományon erősen folytonossá válik.

Ezt a fázistényezőt oly módon választjuk, hogy $(\varphi, D(L)\varphi)$ valós és pozitív legyen. Vezessük be a

$$(D(L_1) - D(L))\varphi = U_\varphi \quad (23')$$

jelölést; (U_φ, U_φ) tetszőlegesen kicsinnyé tehető azáltal, hogy L -lel eléggé megközelítjük L_1 -et, ahol L_1 eleme \mathfrak{R} -nek. Valóban, tekintettel a folytonosságra, ahogy azt fent definiáltuk, van olyan $\Omega = e^{i\kappa}$, hogy $(u, u) < \varepsilon$, ha L elég közel van L_1 -hez, ahol

$$u = (D(L_1) - e^{i\kappa} D(L))\varphi.$$

Képezve u és φ skalárszorzatának abszolút értékét, kapjuk:

$$|(\varphi, D(L_1)\varphi) - \cos \kappa (\varphi, D(L)\varphi) - i \sin \kappa (\varphi, D(L)\varphi)| = |(\varphi, u)| \leq \sqrt{\varepsilon},$$

tekintettel a Schwartz-féle egyenlőtlenségre. Ha $\sqrt{\varepsilon} < 1/12$, κ -nak kisebbnek kell lennie, mint $\pi/2$, minthogy az abszolút érték bizonyosan nagyobb, mint a valós rész, és mind $(\varphi, D(L_1)\varphi)$, mind $(\varphi, D(L)\varphi)$ valós és nagyobb, mint $1/12$.

Minthogy az abszolút érték a képzetes résznél ugyancsak nagyobb, fennáll:

$$\sin \kappa < 12\sqrt{\varepsilon}.$$

Másrésről

$$U_\varphi = u + (e^{i\kappa} - 1)D(L)\varphi,$$

és így

$$(U_\varphi, U_\varphi)^{\frac{1}{2}} \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} + |e^{i\kappa} - 1| \leq \sqrt{\varepsilon} + 2 \sin \kappa/2,$$

$$(U_\varphi, U_\varphi) \leq 625\varepsilon.$$

¹⁹ Ez a feltétel a csoport „szeparabilitásának” feltétele. Vö. pl. A. Haar, Ann. of Math., 34, 147, 1933.

b) Most megmutatjuk: Ha $D(L)\varphi$ erősen folytonos valamely tartományban és $D(L)$ folytonos a szakasz kezdetén definiált értelemben, akkor $D(L)\psi$ tetszőleges ψ mellett (erősen) folytonos a szóban forgó tartományban. Látni fogjuk, hogy ennél fogva $D(L)$, bármely normálás mellett, amely $D(L)\varphi$ -t erősen folytonossá teszi, folytonos a közönséges értelemben: Minden L_1 -hez, ε -hoz és minden ψ -hez található olyan δ , hogy $(U_\psi, U_\psi) < \varepsilon$, ahol

$$U_\psi = (D(L_1) - D(L))\psi,$$

hacsak L benne van az L_1 transzformáció δ környezetében.

Elegendő megmutatni $D(L)\psi$ folytonosságát, ahol ψ ortogonális φ -re. Valóban, minden ψ' felbontható két tagra: $\psi' = \alpha\varphi + \beta\psi$, melyek közül az egyik párhuzamos φ -vel, a másik merőleges rá. Minthogy $D(L)\varphi$ a feltevés szerint folytonos, $D(L)\psi' = \alpha D(L)\varphi + \beta D(L)\psi$ szintén az, ha $D(L)\psi$ folytonos.

A tényező erejéig folytonos ábrázolás folytonossága megköveteli, hogy lehetséges legyen elérni

$$(u_\psi, u_\psi) < \varepsilon \quad \text{és} \quad (u_{\psi+\varphi}, u_{\psi+\varphi}) < \varepsilon$$

teljesülését, ahol

$$u_\psi = (D(L_1) - \Omega_\psi D(L))\psi, \quad (23a)$$

$$u_{\psi+\varphi} = (D(L_1) - \Omega_{\psi+\varphi} D(L))(\psi + \varphi), \quad (23b)$$

alkalmasan választott Ω faktorokkal. Az előzők szerint L és L_1 is egymáshoz oly közel választhatók, hogy $(U_\psi, U_\psi) < \varepsilon$ legyen.

Ha (23')-t és (23a)-t levonjuk (23b)-ből és $D(L)^{-1}$ -et alkalmazzuk mindkét oldalra, kapjuk:

$$(\Omega_\psi - \Omega_{\psi+\varphi})\psi + (1 - \Omega_{\psi+\varphi})\varphi = D(L)^{-1}(u_{\psi+\varphi} - u_\psi - U_\varphi).$$

A jobboldal skalárszorzata önmagával kisebb, mint 9ε . Így tehát mind $|\Omega_\psi - \Omega_{\psi+\varphi}| < 3\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, mind pedig $|1 - \Omega_{\psi+\varphi}| < 3\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ vagy $|1 - \Omega_\psi| < 6\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ teljesül. Minthogy $U_\psi = u_\psi - (1 - \Omega_\psi)D(L)\psi$, fennáll: $(U_\psi, U_\psi)^{\frac{1}{2}} < (u_\psi, u_\psi)^{\frac{1}{2}} + |1 - \Omega_\psi|$ és így $(U_\psi, U_\psi) < 49\varepsilon$.

Ez teljessé teszi a b) alatt megfogalmazott tétel bizonyítását. Látható, hogy nemcsak $D(L)\varphi$ folytonosságát értük el L_0 környezetében az a) alatt használt normálás segítségével, hanem $D(L)\psi$ -ét is bármely ψ mellett, azaz: $D(L)$ folytonosságát.

Az is nyilvánvaló, hogy a csoporttér minden véges része lefedhető véges számú környezettel, melyekben $D(L)$ folytonossá tehető. Könnyen látható, hogy a (22) alatt fellépő ω tényezők is folytonosak lesznek ezekben a környezetekben, úgyhogy el lehet érni, hogy argumentumaik számánál kisebb dimenziószámú tartományoktól eltekintve folytonossá tehető. A következőkben csupán azt a tényt használjuk fel, hogy bármely a , b és A környezetében folytonossá tehető.

B.

a) Most megmutatjuk, hogy a $T(a)$ operátorok mind kommutálnak. A (22B) egyenletből kapjuk:

$$T(a)T(b)T(a)^{-1} = c(a, b)T(b), \quad (24)$$

ahol

$$c(a, b) = \omega(a, b)/\omega(b, a)$$

és így

$$c(a, b) = c(b, a)^{-1}. \quad (24a)$$

A (24) egyenletet $T(a')$ -vel transzformálva kapjuk:

$$\begin{aligned} & T(a')T(a)T(b)T(a)^{-1}T(a')^{-1} = c(a, b)T(a')T(b)T(a')^{-1} \\ \text{vagy} & \omega(a', a)T(a' + a)T(b)\omega(a', a)^{-1}T(a' + a)^{-1} = c(a, b)c(a', b)T(b) \\ \text{vagy} & c(a, b)c(a', b) = c(a + a', b). \end{aligned} \quad (25)$$

A (25) összefüggésből és $c(a, b)$ részleges folytonosságból következik,²⁰ hogy

$$c(a, b) = \exp \left(2\pi i \sum_{\kappa=1}^4 a_{\kappa} f_{\kappa}(b) \right) \quad (26)$$

és minthogy ez egyenlő $c(b, a)^{-1} = \exp(-2\pi i \sum_{\kappa} b_{\kappa} f_{\kappa}(a))$ -val,

$$\sum_{\kappa=1}^4 (a_{\kappa} f_{\kappa}(b) + b_{\kappa} f_{\kappa}(a)) = n(a, b), \quad (27)$$

ahol $n(a, b)$ egész. A (27) képletbe b helyére az $e^{(\lambda)}$ vektort behelyettesítve (melynek λ komponense 1, a többi zérus) és az $f_{\kappa}(e^{(\lambda)}) = -f_{\kappa\lambda}$ jelölést alkalmazva írhatjuk:

$$f_{\lambda}(a) = n(a, e^{(\lambda)}) + \sum_{\kappa} a_{\kappa} f_{\kappa\lambda},$$

ezt visszahelyettesítve (27)-be kapjuk:

$$\sum_{\kappa, \lambda=1}^4 f_{\kappa\lambda}(a_{\lambda} b_{\kappa} + b_{\lambda} a_{\kappa}) + \sum_{\kappa=1}^4 a_{\kappa} n(b, e^{(\kappa)}) + b_{\kappa} n(a, e^{(\kappa)}) = n(a, b). \quad (28)$$

Feltételezzünk a és b komponensei számára olyan értékeket, amelyek egymáshoz és az $f_{\kappa\lambda}$ fix számokhoz viszonyítva transzcendensek; látható, hogy (28) csak akkor állhat fenn, ha mindegyiknek az együtthatója eltűnik:

$$f_{\kappa\lambda} + f_{\lambda\kappa} = 0; \quad n(b, e^{(\kappa)}) = 0, \quad (29)$$

úgyhogy (26) a következő alakot ölti:

$$c(a, b) = \exp \left(2\pi i \sum_{\kappa, \lambda=1}^4 f_{\kappa\lambda} a_{\lambda} b_{\kappa} \right). \quad (30)$$

Most azzal kell foglalkozunk, hogy létezik-e a (22C) feltételt teljesítő $d(A)$ operátor. Transzformáljuk ezt az egyenletet azon analóg egyenlet segítségével, mely b helyett a -t tartalmazza:

$$\begin{aligned} & d(A)T(b)d(A)^{-1}d(A)T(a)d(A)^{-1}d(A)T(b)^{-1}d(A)^{-1} = \\ & = \omega(A, b)T(Ab)\omega(A, a)T(Aa)\omega(A, b)^{-1}T(Ab)^{-1} = \omega(A, a)c(Ab, Aa)T(Aa); \end{aligned}$$

²⁰ G. Hamel, Math. Ann. 60, 460, 1905, idézi H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen. Berlin 1921, 581—583. old.

itt az első sor nyilvánvalóan $d(A)c(b, a)T(a)d(A)^{-1} = \omega(A, a)c(b, a)T(Aa)$; innen azt kapjuk, hogy

$$c(b, a) = c(Ab, Aa) \quad (31)$$

minden A Lorentz-transzformációra teljesül. Ezt (30)-cal egybevetve kapjuk:

$$\sum_{\kappa\lambda} (f_{\kappa\lambda} a_{\kappa} b_{\lambda} - \sum_{\nu\mu} f_{\nu\mu} A_{\nu\kappa} A_{\mu\lambda} a_{\kappa} b_{\lambda}) = n'(a, b)$$

ahol $n'(a, b)$ ismét egész szám. Minthogy ez az egyenlet a, b minden értékére fennáll, az

$$f_{\kappa\lambda} = \sum_{\nu\mu} f_{\nu\mu} A_{\nu\kappa} A_{\mu\lambda}, \quad f = A' f A$$

összefüggésnek is minden Lorentz-transzformációra teljesülnie kell. Minden Lorentz-transzformációval szemben azonban csak a (10) összefüggésben fellépő F többszörösei invariáns alakúak. Így (29) folytán f -nek el kell tűnnie, $c(a, b) = 1$, és a transzformációknak megfelelő operátorok kommutálnak:

$$T(a)T(b) = T(b)T(a). \quad (32)$$

Jó észben tartani, hogy ennek az eredménynek a leszámraztatásához fel kellett használnunk a (22C) feltételt kielégítő $d(A)$ létezését.

b) A (32) egyenlet nyilvánvalóan független a $T(a)$ operátorok normálásától. Ha az eltolásoperátorokat az $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}$ lineárisan független irányok esetére meg tudnánk határozni oly módon, hogy ezen irányok mindegyikére

$$T(ae^{(\kappa)})T(be^{(\kappa)}) = T((a+b)e^{(\kappa)}) \quad (33)$$

tetszőleges a, b mellett teljesüljön, akkor a

$$T(a_1 e^{(1)} + a_2 e^{(2)} + a_3 e^{(3)} + a_4 e^{(4)}) = T(a_1 e^{(1)})T(a_2 e^{(2)})T(a_3 e^{(3)})T(a_4 e^{(4)}) \quad (33a)$$

normálás, valamint (32) biztosítaná, hogy

$$T(a)T(b) = T(a+b) \quad (34)$$

általánosan érvényes legyen.

Az $e^{(1)}, \dots, e^{(4)}$ lineárisan független irányok meghatározására négy null-vektort választunk. Ha e null-vektor, a 3. szakasz értelmében van olyan A_e homogén Lorentz-transzformáció,²¹ amelyre fennáll: $A_e e = 2a$.

A $T(e)$ operátort oly módon normáljuk, hogy

$$d(A_e)T(e)d(A_e)^{-1} = T(e)^2 \quad (35)$$

teljesüljön. Ez nyilvánvalóan független $d(A_e)$ normálásától. Valamennyi n (pozitív és negatív) egész értékre a normálás legyen

$$d(A_e)^n T(e) d(A_e)^{-n} = T(2^n e). \quad (35a)$$

Ezen egyenletből következik továbbá, hogy

$$T(2^n e)^2 = d(A_e)^n T(e)^2 d(A_e)^{-n} = d(A_e)^n d(A_e) T(e) d(A_e)^{-1} d(A_e)^{-n} = T(2^{n+1} e). \quad (36)$$

²¹ Az e index itt azt az e vektort jelöli, amelyre $A_e e = 2e$ teljesül; ennek a A_e -nek nincs elemi osztója.

Ez lehetővé teszi, hogy bármely pozitív egész k számra a

$$T(k \cdot 2^{-n}e) = T(2^{-n}e)^k \quad (35b)$$

normálást vezessük be oly módon, hogy a normálás megmarad, ha k -t $2^m k$ -val és n -et $n+m$ -mel helyettesítjük. Ez, (36)-tal együtt, biztosítja

$$\begin{aligned} T(ve)T(\mu e) &= T((v+\mu)e), \\ d(\Lambda_e)T(ve)d(\Lambda_e)^{-1} &= T(2ve) \end{aligned} \quad (36a)$$

fennállását minden v, μ diadikus tört esetére.

Legyen v_1, v_2, v_3, \dots a diadikus törtek egy 0-hoz tartó sorozata; meg kell mutatnunk, hogy ekkor $\lim T(v_i e) = 1$. A $T(a) \cdot T(0) = \omega(a, 0)T(a)$ egyenletből következik, hogy $T(0)$ állandó. Az A rész b) pontjában közölt tétel szerint $T(ve)$, ha alkalmas Ω_v konstansokkal megszorozzuk, 1-hez konvergál, azaz: tetszőleges φ -t választva, mind $(1 - \Omega_v T(ve))\varphi = u$ -t, mind pedig $(1 - \Omega_v T(ve))d(\Lambda_e)^{-1}\varphi = u'$ -t tetszés szerint kicsinnyé tehetjük azáltal, hogy v -nek kicsiny értékeket adunk. Ha $d(\Lambda_e)$ -t a második kifejezésre alkalmazzuk, (36a) folytán azt kapjuk, hogy $(1 - \Omega_v T(2ve))\varphi = d(\Lambda_e)u'$, ugyancsak kicsiny. Másrésztől, ha $T(ve)$ -t alkalmazzuk az első kifejezésre, látjuk, hogy $(T(ve) - \Omega_v T(2ve))\varphi = T(ve)u$ ugyancsak zérushoz tart, így e két mennyiség $(1 - T(ve))\varphi$ különbsége is, azaz $T(v_i e)\varphi$ konvergál φ -hez, hacsak v_1, v_2, v_3, \dots 0-hoz tartó diadikus törtek sorozata.

Legyen most v_1, v_2, v_3, \dots az a tetszőleges számhoz konvergáló diadikus törtek sorozata. Megmutatjuk, hogy ekkor $T(v_i e)$ a $T(ae)$ operátor többszöröséhez konvergál; a normálás legyen olyan, hogy $T(ae)$ ezen többszöröse egyenlő legyen $T(ae)$ -vel. A folytonosságból ismét következik olyan Ω_i -k létezése, hogy $\Omega_i T(v_i e)\varphi$ konvergál $T(ae)\varphi$ -hez. Az $\Omega_j^{-1}T(v_j e)^{-1}\Omega_i T(v_i e)\varphi$ kifejezés ennél fogva φ -hez konvergál, ha i és j egyaránt végtelenhez tart. Az előző bekezdésben mondottak szerint azonban a $T((v_i - v_j)e)\varphi$ kifejezés φ -hez tart és így $\Omega_j^{-1}\Omega_i$ tart az 1-hez. Ebből következik, hogy Ω_i^{-1} egy meghatározott Ω számhoz tart. Ennél fogva $\Omega_i^{-1} \cdot \Omega_i T(v_i e)\varphi$ az $\Omega T(ae)\varphi$ -hez konvergál; ezt az operátort fogjuk a következőkben $T(ae)$ -vel jelölni. Az ily módon normált $T(ae)$ -re (33) teljesülni fog, mivel ha $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ b -hez konvergáló diadikus törtek, (36a) segítségével kapjuk:

$$T(ae)T(be)\varphi = \lim_{i,j \rightarrow \infty} T((v_i + \mu_j)e)\varphi = T((a+b)e)\varphi.$$

Ez a gondolatmenet nem csak azt mutatja meg, hogy a $T(ae^{(k)})$ -kat és ennél fogva (33a) folytán $T(a)$ -t oly módon normálhatjuk, hogy (34) érvényes lesz rájuk, hanem ezenkívül azt is, hogy ez a $T(a)$ folytonos lesz a szó közönséges értelmében.

C.

Nyilvánvaló, hogy (34) érvényes marad, ha $T(a)$ -t $\exp(2\pi i\{a, c\})T(a)$ -val helyettesítjük, ahol c tetszőleges vektor. Ezt a $T(a)$ normálásában fennmaradó szabadságot arra használjuk fel, hogy $\omega(A, a)$ -t kiküszöböljük (22C)-ből.

Transzformáljuk a (22C)-ből következő $d(A)T(a)d(A)^{-1} = \omega(A, a)T(Aa)$ egyenletet $d(M)$ -mel; a baloldalon az $\omega(M, A)d(MA)T(a)\omega(M, A)^{-1}d(MA)^{-1} =$

$= \omega(M\Lambda, a)T(M\Lambda a)$ kifejezést kapjuk, a jobboldalon pedig $\omega(\Lambda, a)\omega(M, \Lambda a) \cdot T(M, \Lambda a)$ jelenik meg. Így tehát

$$\omega(M\Lambda, a) = \omega(M, \Lambda a)\omega(\Lambda, a). \quad (37)$$

Másrészről két (22C) típusú egyenlet szorzata, melyekben a Λ ugyanaz, a helyén azonban a , ill. b áll, (34) felhasználásával az

$$\omega(\Lambda, a)\omega(\Lambda, b) = \omega(\Lambda(a+b))$$

összefüggést szolgáltatja. Eszerint

$$\omega(\Lambda, a) = \exp(2\pi i\{a, f(\Lambda)\}),$$

ahol az $f(\Lambda)$ vektor függhet Λ -tól. Ezt a (37) egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk:

$$\{a, f(M\Lambda)\} = \{\Lambda a, f(M)\} + \{a, f(\Lambda)\} + n,$$

$$\{a, f(M\Lambda) - \Lambda^{-1}f(M) - f(\Lambda)\} = n,$$

ahol n egész, melynek azonban el kell tűnnie, mivel a -tól lineárisan függ. Így tehát

$$f(M\Lambda) = \Lambda^{-1}f(M) + f(\Lambda). \quad (38)$$

Ha meg tudjuk mutatni, hogy ezen egyenlet legáltalánosabb megoldása

$$f(\Lambda) = (\Lambda^{-1} - 1)v_0, \quad (39)$$

ahol a v_0 vektor független Λ -tól, úgy $\omega(\Lambda, a)$ az $\omega(\Lambda, a) = \exp(2\pi i\{(\Lambda - 1)a, v_0\})$ alakot fogja kapni. Ekkor $\omega(\Lambda, a)$ a (22C) egyenletből el fog tűnni, hacsak $T(a)$ -t $\exp(2\pi i\{a, v_0\})T(a)$ -val helyettesítjük.

Annak bizonyítása, hogy (39) következménye (38)-nak, meglehetősen fáradságos. Kiindulásképpen tekintsük a következő homogén Lorentz-transzformációkat:

$$X(\alpha_1, \gamma_1) = \begin{vmatrix} C_1 & 0 & 0 & S_1 \\ 0 & c_1 & s_1 & 0 \\ 0 & -s_1 & c_1 & 0 \\ S_1 & 0 & 0 & C_1 \end{vmatrix}, \quad Y(\alpha_2, \gamma_2) = \begin{vmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & S_2 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & C_2 \end{vmatrix},$$

$$Z(\alpha_3, \gamma_3) = \begin{vmatrix} c_3 & s_3 & 0 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & S_3 \\ 0 & 0 & S_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad (40)$$

ahol $c_i = \cos \alpha_i$, $s_i = \sin \alpha_i$, $C_i = \cosh \gamma_i$, $S_i = \sinh \gamma_i$. Az $X(\alpha, \gamma)$ -k valamennyien kommutálnak. Válasszunk két olyan α_1, γ_1 szöveget, amelyekre $1 - X(\alpha_1, \gamma_1)^{-1}$ -nek van inverze. Ekkor (38)-ból következik, hogy

$$X(\alpha, \gamma)^{-1}f(X(\alpha_1, \gamma_1)) + f(X(\alpha, \gamma)) = X(\alpha_1, \gamma_1)^{-1}f(X(\alpha, \gamma)) + f(X(\alpha_1, \gamma_1)),$$

vagy

$$f(X(\alpha, \gamma)) = [1 - X(\alpha_1, \gamma_1)^{-1}]^{-1}[1 - X(\alpha, \gamma)^{-1}]f(X(\alpha_1, \gamma_1)),$$

$$f(X(\alpha, \gamma)) = (1 - X(\alpha, \gamma)^{-1})v_X, \quad (41)$$

ahol v_X független α -tól és γ -tól. Hasonló egyenletek érvényesek $f(Y(\alpha, \gamma))$ -ra és $f(Z(\alpha, \gamma))$ -ra. Vezessük be most a következő jelöléseket: $X(\pi, 0)=X$, $Y(\pi, 0)=Y$, $Z(\pi, 0)=Z$. Ezek a transzformációk a (40) transzformációkkal antikommutálnak a következő értelemben:

$$YX(\alpha, \gamma)Y = ZX(\alpha, \gamma)Z = X(\alpha, \gamma)^{-1}. \quad (42)$$

A (38) egyenlet alapján könnyen kapjuk:

$$f(YX(\alpha, \gamma)Y) = (YX(\alpha, \gamma)^{-1} + 1)f(Y) + Yf(X(\alpha, \gamma))$$

vagy, (41) és (42) felhasználásával és néhány triviális transzformációt elvégezve:

$$(1 - X(\alpha, \gamma))(1 - Y)(v_X - v_Y) = 0. \quad (43)$$

Minthogy α és γ tetszés szerint választható, az első tényezőt elhagyhatjuk. Marad: $(1 - Y)(v_X - v_Y) = 0$, vagyis v_X első és harmadik komponense egyenlő v_Y első, ill. harmadik komponensével. Hasonló módon következtethetünk azonban $(1 - X) \cdot (v_Y - v_X) = 0$ fennállására is, és így levonhatjuk a következtetést, hogy v_X, v_Y , valamint v_Z első három komponensei rendre egyenlők egymással.

A $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ értékekre a (40) transzformációk generátorai az összes elforgatásnak, azaz mindazoknak az R Lorentz-transzformációknak, amelyek nem érintik a negyedik koordinátát. Minthogy e transzformációk 4—4 elem 1, az $(1 - R^{-1})v$ kifejezés független v negyedik komponensétől és $(1 - R^{-1})v_X = (1 - R^{-1})v_Y = (1 - R^{-1})v_Z$. A (38) egyenletből következik:

ha $f(R) = (1 - R^{-1})v_X$ és $f(S) = (1 - S^{-1})v_X$, akkor $f(SR) = (1 - R^{-1}S^{-1})v_X$.

Eszerint $f(R) = (1 - R^{-1})v_X$ ugyanazon v_X mellett érvényes minden elforgatásra. Mármost

$$f(X(\alpha, \gamma)R) = R^{-1}(1 - X(\alpha, \gamma)^{-1})v_X + (1 - R^{-1})v_X = (1 - (X(\alpha, \gamma)R)^{-1})v_X;$$

(38) alapján könnyűszerrel következtethetünk arra, hogy az egységoperációnak megfelelő $f(E)$ eltűnik és $f(A^{-1}) = -Af(A)$. Eszerint $f(R^{-1}X(\alpha, \gamma)^{-1}) = (1 - X(\alpha, \gamma)R)v_X$; levonhatjuk továbbá a következtetést, hogy minden $A = RX(\alpha, \gamma)S$ alakú transzformációra érvényes (39), ahol $v_0 = -v_X$, ha R és S elforgatások. Minden homogén Lorentz-transzformációt ilyen alakra hozhatunk azonban (4C szakasz). Ez teljessé teszi a (39) képlet s egyszersmind $\omega(A, a) = 1$ bizonyítását.

D.

Az $\omega(a, b)$ és $\omega(A, a)$ mennyiségek, amelyekről éppen most mutattuk meg, hogy feltehető: értékük egyenlő eggyel, függetlenek $d(A)$ normálásától. Ennélfogva valamennyi $d(A)$ -t tetszőleges 1 abszolút-értékű tényezővel láthatjuk el anélkül, hogy ezzel elrontanánk az eddigiekben meghatározott normálást. Következésképp az alábbiakban egyszerűen a homogén Lorentz-csoport operátorainak normálását tárgyaljuk; az eredmények, amiket kapunk, erre a csoportra is érvényesek lesznek.

Részben mivel a háromdimenziós forgáscsoport tényező erejéig adott ábrázolásai önmagukban is érdekesek, s még inkább azért mert a Lorentz-csoport esetében

követendő eljárás e csoport esetében különösen egyszerűen bemutatható, először a háromdimenziós forgáscsoporttal foglalkozunk.

Jól ismert, hogy a normálás választásával nem lehet elérni, hogy $\omega(A, I) = 1$ legyen (22D)-ben, és hogy vannak olyan jól ismert ábrázolások, melyek esetében $\omega(A, I) = \pm 1$. Éppen ezért erre a kétértékűségre kezdetül fogva tekintettel leszünk.

Először is megjegyezzük, hogy a csoport egységelemének megfelelő operátor konstans. Ez egyszerűen a $d(A)d(E) = \omega(A, E)d(A)$ egyenlőségből következik. Ennélfogva az involúciónak megfelelő operátor négyzete konstans.

Azt az operátort, mely az e tengely körül végrehajtott π szögű elforgatásnak felel meg, és amelyet úgy normáltunk, hogy négyzete 1 legyen, \tilde{e} -vel jelöljük: $\tilde{e}^2 = 1$. Az e operátorok — előjelüktől eltekintve — egyértelműen meg vannak határozva.

A v tengely körül elvégzett α szögű R elforgatás két, e_1 és e_2 körül végrehajtott π szögű elforgatás szorzata, ahol e_1 és e_2 merőleges v -re, és e_2 az e_1 -ből a v tengely körül elvégzett $\alpha/2$ szögű elforgatással áll elő. Minden egyes v -hez önkényesen kiválasztva egy v -re merőleges e_1 -et, a normálást ennélfogva úgy végezhetjük el, hogy

$$d(R) = \pm \tilde{e}_1 \tilde{e}_2 \quad (44)$$

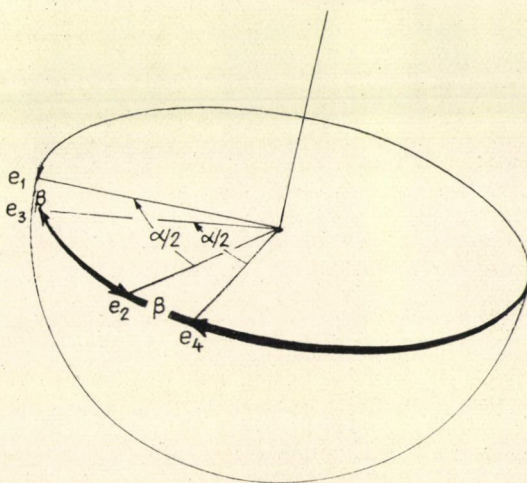
teljesüljön. Mármint $d(R)$ felcserélhető minden $d(S)$ -sel, ahol S szintén a v körül végrehajtott elforgatás. Ez (24)—(30) alapján látható be. A (30) képletben f_{11} -nek el kell tűnnie (29) folytán. (Az R, S elforgatások mindketten tetszőleges pontossággal előállíthatók egy v körül elvégzett igen kis elforgatás hatványai alakjában.) Eszerint (44)-et $d(S)$ -sel transzformálva kapjuk:

$$d(R) = \pm d(S) \tilde{e}_1 d(S)^{-1} \cdot d(S) \tilde{e}_2 d(S)^{-1}. \quad (44a)$$

Mármint $d(S) \tilde{e}_1 d(S)^{-1}$ megfelel egy π szögű elforgatásnak egy v -re merőleges, e_1 -gyel β szöget bezáró tengely körül, ahol β az S elforgatás szöge. Minthogy $d(S) \tilde{e}_1 d(S)^{-1}$ négyzete ugyancsak 1, (44a) egyszerűen másfajta felírása $d(R) = \tilde{e}_3 \tilde{e}_4$ -nek két \tilde{e} szorzata alakjában, és látjuk, hogy a (44) normálás független az e_1 tengely választásától (lásd 2. ábra).

A $d(R)d(T)$ szorzat kiszámítása céljából megtehetjük, hogy megszerkesztjük az R és T forgástengelyeire merőleges síkokat, és $d(R)$ számára olyan előállítást használunk, hogy a második involúció e_C tengelye egybeesék az említett síkok metszésvonalával, ugyanakkor $d(T) = \tilde{e}_C \tilde{e}_T$ -ben az első involúciót választjuk oly módon, hogy forgástengelye ezen metszésvonal legyen (3. ábra). Ekkor a

$$d(R)d(T) = \pm \tilde{e}_R \tilde{e}_C \tilde{e}_C \tilde{e}_T = \pm \tilde{e}_R \tilde{e}_T \quad (45)$$

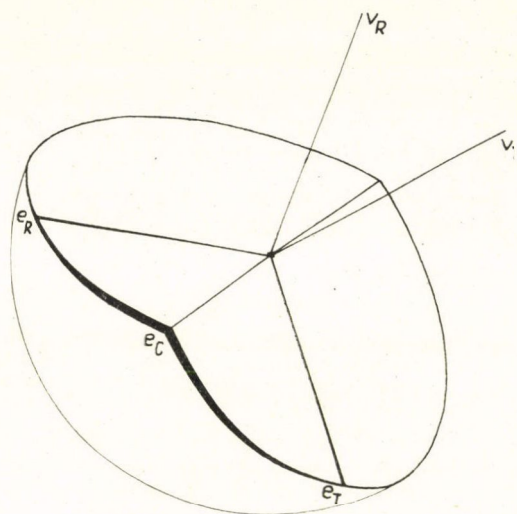


2. ábra

szorzat normálása automatikusan meg fog felelni (44)-nek. Ez azt mutatja, hogy a (44) szerint normált operátorok előjel erejéig adott ábrázolást képeznek.

A Lorentz-csoportra a bizonyítás ugyanezen gondolatmenetet követve adható meg, csupán az alapul szolgáló tények kevésbé nyilvánvalóak. Legyen A elemi osztóktól mentes Lorentz-transzformáció, melynek sajátértékei $e^{2i\gamma}$, $e^{-2i\gamma}$, $e^{2\chi}$, $e^{-2\chi}$, sajátvektorai $v_1, v_2=v_1^*, v_3, v_4$, amint azt a 4B szakaszban leírtuk.

Azt akarjuk, hogy $A=MN$ legyen, ahol $M^2=N^2=1$. Ha $AN=M$, fennáll: $ANAN=1$ és így $ANAN=N$. Írjuk fel Nv_i -t a $\sum_k \alpha_{ik} v_k$ alakban; kapjuk: $ANAv_i =$



3. ábra

$= \sum_k \lambda_k \alpha_{ik} \lambda_i v_i = \sum_k \alpha_{ik} v_k$. A v_k -k lineáris függetlensége folytán ebből $\lambda_i \lambda_k \alpha_{ik} = \alpha_{ik}$ következik: valamennyi α_{ik} zérus, kivéve azokat, amelyekre $\lambda_i \lambda_k = 1$ teljesül. Mint hogy λ_1 vagy λ_2 a 4B szakasz a), b), c), d) esetei egyikében sem reciproka a másik két λ valamelyikének, a v_1, v_2 vektorokat N ismét v_1, v_2 valamely lineárkombinációjába transzformálja, és ugyanez áll a v_3, v_4 vektoraira is. Ez azt jelenti, hogy N felfogható mint két transzformáció szorzata: $N=N_s N_t$, ahol az első transzformáció a $v_1 v_2$, a második a $v_3 v_4$ síkban hat. (A $v_1 v_2$ sík helyett valójában $v_1 + v_2, iv_1 - iv_2$ síkot kellene mondani, mivel v_1 és v_2 maguk is komplexek. Mindig ezt fogjuk érteni, ha $v_1 v_2$ síkról beszélünk.) Ugyanez vonatkozik M -re is.

Mind N_s , mind N_t tartozik eleget tenni a Lorentz-transzformációkra vonatkozó első és harmadik feltételnek (vö. 4A) és mindkét determinánsnak vagy 1-gyel, vagy -1-gyel kell egyenlőnek lennie. Azonkívül mindkettőjük négyzetének egynek kell lennie.

Ha mindkét determináns +1 volna, N_t maga az egységtranszformáció lenne, N_s pedig az egységtranszformáció lehetne, vagy pedig a $v_1 v_2$ síkban végrehajtott π szögű elforgatás. Így tehát v_1, v_2, v_3, v_4 magának N -nek a sajátvektorai lennének.

Ha mindkét determináns -1 (ki fog tűnni, hogy ténylegesen ez a helyzet), N_s tükrözés egy a $v_1 v_2$ síkban fekvő egyenesre, N_t pedig a $v_3 v_4$ síkban végrehajtott tükrözés, mely v_3 -at és v_4 -et egymással felcseréli. Ebben az esetben v_1, v_2, v_3, v_4 nem lesznek mind sajátvektorai N -nek.

Ha v_1, v_2, v_3, v_4 sajátvektorai N -nek, sajátvektorai lesznek $M=AN$ -nek is. Ekkor mind M , mind N vagy az egységtranszformáció, vagy pedig π szögű elforgatás a $v_1 v_2$ síkban. Ha mindkettőjük elforgatás volna a $v_1 v_2$ síkban, szorzatuk, A , az egységtranszformáció lenne, amit jelenleg ki akarunk zárni. A fennmaradó eseteket, melyekben N_s és N_t determinánsa +1, oly módon zárhatjuk ki, hogy kikötjük, sem az M , sem az N ne legyen az egységtranszformáció a $A=MN$ felbontásban.

Eszerint N egy a v_1v_2 síkban végrehajtott

$$Ns'_v = s'_v, \quad Ns_v = -s_v \quad (46a)$$

tükrözésnek — ahol s_v és s'_v két merőleges valós vektor a v_1v_2 síkban:

$$s'_v = e^{iv}v_1 + e^{-iv}v_2, \quad s_v = i(e^{iv}v_1 - e^{-iv}v_2) \quad (46b)$$

— és egy a v_3v_4 síkban végrehajtott

$$Nt'_\mu = t'_\mu, \quad Nt_\mu = -t_\mu \quad (46c)$$

tükrözésnek — ahol t_μ , t'_μ ismét két valós vektor, melyek a v_3v_4 síkban fekszenek, egymásra merőlegesek, s közülük az első térszerű, a második időszerű:

$$t'_\mu = e^\mu v_3 + e^{-\mu} v_4, \quad t_\mu = e^\mu v_3 - e^{-\mu} v_4 \quad (46d)$$

— a szorzata. Így tehát N tisztán térbeli elforgatás π szöggel az $s_v t_\mu$ tisztán térszerű síkban. Az M transzformáció az $M = AN$ összefüggésből számítható ki:

$$\begin{aligned} Ms'_v &= ANs'_v = As'_v = e^{iv+2i\gamma}v_1 + e^{-iv-2i\gamma}v_2 = \\ &= \frac{1}{2}e^{2i\gamma}(s'_v - is_v) + \frac{1}{2}e^{-2i\gamma}(s'_v + is_v) = \cos 2\gamma \cdot s'_v + \sin 2\gamma \cdot s_v, \\ Ms_v &= \sin 2\gamma \cdot s'_v - \cos 2\gamma \cdot s_v, \end{aligned} \quad (46e)$$

$$\begin{aligned} Mt'_\mu &= ANt'_\mu = At'_\mu = e^{\mu+2\chi}v_3 + e^{-\mu-2\chi}v_4 = \\ &= \frac{1}{2}e^{2\chi}(t'_\mu + t_\mu) + \frac{1}{2}e^{-2\chi}(t'_\mu - t_\mu) = \operatorname{ch} 2\chi \cdot t'_\mu + \operatorname{sh} 2\chi \cdot t_\mu, \end{aligned}$$

$$Mt_\mu = -\operatorname{sh} 2\chi \cdot t'_\mu - \operatorname{ch} 2\chi \cdot t_\mu.$$

Így tehát M ugyancsak két tükrözés szorzata: az egyiket a $v_1v_2 = s'_v s_v$, a másikat a $v_3v_4 = t'_\mu t_\mu$ síkban kell végrehajtanunk. Ezzel teljessé tettük A -nak két involúcióra való felbontását. Az involúciók egyikének egy tetszőleges, mind a v_1v_2 , mind a v_3v_4 síkot metsző térszerű síkban végrehajtott π szögű elforgatás választható; a v és μ választásában rendelkezésünkre álló szabadság lehetővé teszi ugyanis, hogy az s_v és t_μ egyeneseket tetszés szerint vegyük fel a szóban forgó síkokban. A (46) jellemezte involúciót a következőkben $N_{v\mu}$ -vel fogjuk jelölni. A másik involúció, az M , hasonló elforgatás lesz ekkor, melynek síkját azonban az $s_v t_\mu$ sík megadása teljesen meghatározza. Ezt $M_{v\mu}$ -vel fogjuk jelölni (fennáll: $M_{v\mu} = N_{v+\gamma, \mu+\chi}$). Ha visszaemlékszünk arra, hogy γ és χ egy-egy elforgatási szög felét jelöli, láthatjuk, hogy teljes a hasonlóság a háromdimenziós esettel.

A $d(M)$ és $d(N)$ operátorokat, melyeket oly módon normálunk, hogy négyzetük legyen egyenlő 1-gyel, jelölje $d_1(M_{v\mu})$, ill. $d_1(N_{v\mu})$. Meg kell mutatnunk, hogy

$$d(A) = \pm d_1(M_{v\mu})d_1(N_{v\mu}) \quad (47)$$

normálása független v -től és μ -tól. Ebből a célból a

$$d(A) = \pm d_1(M_{00})d_1(N_{00}) \quad (47a)$$

operátort transzformációnak vetjük alá $d(A_1)$ segítségével, ahol A_1 -nek ugyanazok a sajátvektorai, mint A -nak, e^{iv} , e^{-iv} , e^μ és $e^{-\mu}$ sajátértékei azonban különbözők. Minthogy $A_1 M_{00} A_1^{-1} = M_{v\mu}$ és $A_1 N_{00} A_1^{-1} = N_{v\mu}$, fennáll: $d(A_1) d_1(M_{00}) d(A_1)^{-1} = \omega d_1(M_{v\mu})$, ahol $\omega = \pm 1$, mivel mindkét oldal négyzete 1. Így tehát (47a)-ból a $d(A_1)$ segítségével elvégzett transzformáció eredményeként kapjuk:

$$d(A_1) d(A) d(A_1)^{-1} = \pm d_1(M_{v\mu}) d_1(N_{v\mu}). \quad (47b)$$

A (47) normálás nyilvánvalóan független lenne v -től és μ -től, ha $d(A_1)$ kommutálna $d(A)$ -val.

Alkalmazhatjuk ismét a (24)–(30) egyenletekben foglalt érvelést. Eszerint

$$d(A_1) d(A) d(A_1)^{-1} = \exp(2\pi i f(2\gamma\mu - 2\chi v)) d(A) \quad (48)$$

fennáll γ, χ, v, μ tetszőleges értékeire. Ha azonban $\gamma = 0$, $v = 2\pi/n$, $\chi = \frac{1}{2}n\mu$, az exponenciálisnak (48) alatt 1-gyel kell egyenlőnek lennie, mivel ebben az esetben $A = A_1^n$. Így tehát $\exp(-4\pi^2 i f\mu) = 1$ minden μ -re, $f = 0$, és (47b) bal oldala helyettesíthető $d(A)$ -val; (47) alatt a normálás független v -től és μ -től.

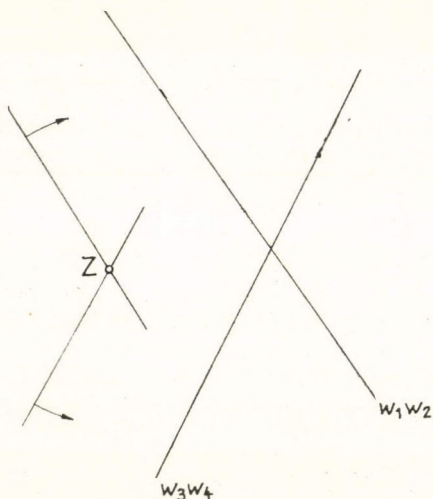
Abból a célból, hogy megkapjuk (45) analogonját, meg kell mutatnunk: ha adott két Lorentz-transzformáció, $A = M_{v\mu} N_{v\mu}$ és $I = P_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}$, v -t és μ -t, α -t és β -t oly módon választhatjuk, hogy teljesüljön az $N_{v\mu} = P_{\alpha\beta}$ egyenlőség, vagyis az $N_{v\mu}$ transzformáció $s_{v\mu}$ forgási síkja egybeesik $P_{\alpha\beta}$ forgási síkjával. Minthogy az utóbbi tetszőleges térszerű sík lehet, mely mind a $w_1 w_2$, mind a $w_3 w_4$ síkot metszi (ahol w_1, w_2, w_3, w_4 sajátvektorai I -nek), meg kell mutatnunk, hogy létezik olyan térszerű sík, mely a $v_1 v_2, v_3 v_4, w_1 w_2, w_3 w_4$ síkok mindegyikét metszi. Mind az első, mind a második síkpár ortogonális.

Meg lehet mutatni²², hogy ha A -nak és I -nek nincs olyan közös sajátvektora, amely null-vektor, akkor mindig van két olyan sík, amelyek egymásra merőlegesek és metszenek négy ilyen síkot. Ezek közül az egyik mindig térszerű. Feltehetjük

²² Először feltesszük, hogy létezik egy valós p sík, mely metszi a $v_1 v_2, v_3 v_4, w_1 w_2, w_3 w_4$ síkok mindegyikét. Ha p metszi $v_1 v_2$ -t, a p -re merőleges q metszeni fogja a $v_1 v_2$ -re merőleges $v_3 v_4$ síkot.

Valóban, az egyenest, mely mind p -re, mind $v_1 v_2$ -re merőleges (van ilyen egyenes, minthogy p és $v_1 v_2$ metszik egymást), mind q , mind $v_3 v_4$ tartalmazza. Ez azt mutatja, hogyha van olyan sík, mely az adott négy sík mindegyikét metszi, akkor az arra merőleges síknak is meglesz ez a tulajdonsága.

Ha a p sík — melynek létezését most feltételezzük — tartalmaz egy időszzerű vektort, q térszerű lesz (4B. szakasz, 1). Mind ebben az esetben, mind pedig akkor, ha p csak térszerű vektorokat tartalmaz, a szövegben megadott tétel fennáll. Van még egy utolsó lehetőség: hogy p érintősíkjá a fénykúpnak, azaz csak térszerű vektorokat, és egy v null-vektort tartalmaz. A p sík térszerű vektorai ortogonálisak v -re, másként p időszzerű vektorokat is tartalmazna. Ebben az esetben a p -re merőleges q sík is tartalmazni fogja v -t. Az egyenes, amelyben $v_1 v_2$ metszi p -t, térszerű és ortogonális



4. ábra. Valamennyi egyenes vetülete az $x_1 x_2$ síkra. Látható, hogy általában két, egymást metsző sík van; csak kivételes esetekben van csupán egy.

tehát, hogy mind $N_{\nu\mu}$, mind $P_{\alpha\beta}$ ebben a síkban végrehajtott π szögű elforgatás. Így tehát

$$\begin{aligned} d(A)d(I) &= \pm d_1(M_{\nu\mu})d_1(N_{\nu\mu})d_1(P_{\alpha\beta})d_1(Q_{\alpha\beta}) \\ &= \pm d_1(M_{\nu\mu})d_1(Q_{\alpha\beta}), \end{aligned} \quad (49)$$

s a $d(A)d(I)$ operátor normálása megfelel két olyan involúció szorzatának, melyek egyike sem egyenlő az egységtranszformációval. Eszerint fennáll:

$$d(A)d(I) = \pm d(AI), \quad (49a)$$

hacsak A , I és AI a 4B szakaszban megismert a), b), c) vagy d) esetek valamelyikének megfelelő Lorentz-transzformációk és ha A -nak és I -nek nincs olyan közös sajátvektora, amely null-vektor. Azonkívül (49a) fennáll akkor is — feltételezve, hogy $d(E) = \pm 1$ —, ha a A , I , AI transzformációk bármelyike egyenlő az egységtranszformációval, vagy ha A és I mindkét null-sajátvektora egyenlő, minthogy ebben az esetben a v_3v_4 és w_3w_4 síkok s a v_1v_2 , w_1w_2 síkok is egybeesnek és sok olyan térszerű sík van, amely valamennyiüket metszi.

Ha A -nak és I -nek egy közös null-sajátvektora van, $v_3 = w_3$, a másik kettő: v_4 és w_4 különböző, egy fogást alkalmazhatunk (49a) bizonyítására, melyet e szakasz későbbi részeiben messzemenően fel fogunk használni. Található olyan J Lorentz-transzformáció, hogy az $I \rightarrow J$, $A \rightarrow IJ$, $AIJ \rightarrow J^{-1}$ transzformáció-párok között egy olyan síncs, melynek közös null-sajátvektora volna. Ez igaz lesz, ha pl. J null-sajátvektora v_4 és egy másik null-vektor, mely különbözik v_3 -tól, w_4 -től és AI sajátvektoraitól. Ekkor (49a) teljesülni fog minden fent említett párra:

$$\begin{aligned} d(A)d(I) &= \pm d(A)d(I)d(J)d(J^{-1}) = \pm d(A)d(IJ)d(J^{-1}) \\ &= \pm d(AIJ)d(J^{-1}) = \pm d(AI). \end{aligned}$$

arra a vektorra, amelyben v_3v_4 metszi p -t. Ennek a metszésvonalnak ennél fogva egybe kell esnie v -vel, minthogy p -nek nincs más olyan vektora, amely ezen sík valamely térszerű vektorára ortogonális volna. Eszerint v a p és v_3v_4 síkok metszésvonala, és vagy v_3 , vagy v_4 . Ugyanílyan módon következtethetünk arra, hogy v vagy w_3 -mal, vagy w_4 -gyel esik egybe, s látjuk: ha p a fénykúp érintősíkjá, a A és I transzformációknak egy közös null-vektor sajátvektoruk van. Eszerint a szövegben közölt tétel helyes, ha meg tudjuk mutatni: létezik olyan tetszőleges valós p sík, amely a négy sík: v_1v_2 , v_3v_4 , w_1w_2 , w_3w_4 mindegyikét metszi.

Rajzoljunk egy koordináta-rendszert négydimenziós térünkben, melynek x_1x_2 síkja a v_1v_2 sík, az x_3 és x_4 tengelyek pedig a v_3-v_4 , ill. v_3+v_4 vektorok irányába mutatnak. Az $x_4=1$ egyenlettel jellemzett háromdimenziós M sokaság minden síkot egy-egy egyenesben metsz: a v_1v_2 síkot az x_1x_2 sík végtelen távoli egyenesében, a v_3v_4 síkot az x_3 tengelyben. Az M háromdimenziós sokaság és a w_1w_2 , ill. a w_3w_4 sík metszetei M -ben fekvő, egymásra merőleges egyenesek lesznek. Lesz egy közös normálisuk, mely áthalad M kezdőpontján; azt reciprokok távolságokra metszik. Ez következik abból, hogy a négydimenziós térben ortogonálisak.

Egy sík, mely v_1v_2 -t és v_3v_4 -et metszi, x_1x_2 -vel párhuzamos, az x_3 tengelyen áthaladó egyenest szolgáltat. Ha megrajzoljuk ezeket az egyeneseket a w_1w_2 -nek megfelelő egyenes valamennyi pontján keresztül, ez az egyenes π -vel el fog fordulni, ha ennek az egyenesnek az egyik végétől a másikig megyünk. Hasonlóképpen, a w_3w_4 -nek megfelelő egyenesen áthaladó egyenesek az *ellentett* irányban fognak elfordulni π -vel. Eszerint az egyenesek első seregében lesz legalább egy olyan egyenes, mely a második sereggel közös és ez az egyenes felel meg annak a valós síknak, mely a négy sík: v_1v_2 , v_3v_4 , w_1w_2 , w_3w_4 mindegyikét metszi. Ez teljessé teszi a szövegben említett tétel bizonyítását.

Ez teljessé teszi (49a) bizonyítását mindazokra az esetekre, amikor A -nak, I -nek és AI -nek nincs elemi osztója. Nyilvánvaló az is, hogy a (47) normálási feltételben d_1 -et helyettesíthetjük d -vel. Könnyen levonhatjuk továbbá a következtetést, hogy ugyanazon ábrázolásban $d(M)^2$ vagy $+1$, vagy -1 bármely M involúció mellett. Az előbbi esetben igazi, az utóbbiban tényező erejéig adott ábrázolással állunk szemben.

Ha A -nak van elemi osztója, a v_e, w_e, z_e, v_1 vektorok rendszerében a

$$A_e = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

mátrix-alakban írható fel [vö. (20)]; előállítható továbbá — ugyanezen vektorok rendszerében — mint két Lorentz-transzformáció szorzata, amelyeknek a négyzete 1:

$$A_e = M_0 N_0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Így tehát $d(A_e) = \pm d(M_0)d(N_0)$ szerint normálhatunk. Ha A két másik involúció szorzata alakjában is felírható: $A_e = M_1 N_1$, a normálás azonos lesz az eredetivel. Ennek bebizonyításához válasszuk a J Lorentz-transzformációt úgy, hogy a $J, N_0 J, N_1 J, A_e J = M_0 N_0 J = M_1 N_1 J$ Lorentz-transzformációk egyikének se legyen elemi osztója. Mivel a szabad paraméterek száma csupán 4 az e) esetben, míg az a) esetben 6, ez mindig lehetséges. Ekkor (45a) folytán

$$\begin{aligned} d(M_0)d(N_0)d(J) &= \pm d(M_0)d(N_0 J) = \pm d(M_0 N_0 J) \\ &= \pm d(M_1 N_1 J) = \pm d(M_1)d(N_1 J) = \pm d(M_1)d(N_1)d(J) \end{aligned}$$

és így $d(M_0)d(N_0) = \pm d(M_1)d(N_1)$. Ez azt mutatja, hogy még akkor is, ha AI az e) esetben tartozik, $\omega(A, I) = \pm 1$, mivel (49) a helyes normálásra vezet.

Ha $A = MN$ -nek van elemi osztója, I -nek pedig nincs, $d(A)d(I)$ továbbra is két involúció szorzatának megfelelően lesz normálva. Ismét találhatunk olyan J -t, hogy a $J, J^{-1}, IJ, NIJ, MNIJ$ transzformációk közül egyiknek sem lesz elemi osztója. Ekkor

$$\begin{aligned} d(M)d(N)d(I) &= \pm d(M)d(N)d(I)d(J)d(J)^{-1} \\ &= \pm d(M)d(N)d(IJ)d(J)^{-1} = \pm d(M)d(NIJ)d(J)^{-1} \\ &= d(AIJ)d(J^{-1}). \end{aligned}$$

Az utóbbi szorzat azonban két involúció szorzatának megfelelően van normálva, amint azt (49a) alatt megmutattuk, minthogy sem AIJ , sem J^{-1} nem tartozik az e) esetben.

Végül meg kell vizsgálnunk azt az esetet, amikor mind A -nak, mind I -nek lehet elemi osztója. Ebben az esetben olyan J -re van szükségünk, hogy sem J -nek, sem

J^{-1} -nek, sem IJ -nek ne legyen elemi osztója. Ekkor, (49a)-nak imént bizonyított általánosítása folytán, amelyben az első tényező az e) esetben tartozik:

$$\begin{aligned} d(A)d(I) &= \pm d(A)d(I)d(J)d(J^{-1}) = \pm d(A)d(IJ)d(J^{-1}) \\ &= \pm d(AIJ)d(J^{-1}); \end{aligned}$$

ez helyesen van normálva.

Ezzel teljessé tettük

$$\omega(A, I) = \pm 1 \quad (50)$$

bizonyítását az összes lehetséges esetre, és az inhomogén Lorentz-csoport tényező erejéig adott ábrázolásának összes $D(L)$ operátorát olyan normálással láttuk el, hogy a normált operátorok előjel erejéig meghatározott ábrázolást képezzenek. Még azt is el tudtuk érni, hogy (22) alatt az első két egyenletben $\omega = 1$ -et írhattunk. A következőkben olyan operátorok rendszerével foglalkozunk, amelyek eleget tesznek (7)-nek, vagy közelebbről, (22B)-nek és (22C)-nek $\omega(a, b) = \omega(A, a) = 1$ mellett és (22D)-nek $\omega(A, I) = \pm 1$ mellett.

E.

Végül mutassuk meg, hogy az újra-normálás nem csak nem rontotta el az ábrázolásnak — a jelen szakasz (A) részében elvégzett első normálás segítségével elért — részlegesen folytonos voltát, hanem az most *mindenütt* fennáll, $T(a)$ -ra a szó közönséges értelmében, és (eltekintve az előjel kétértékűségétől) $d(A)$ -ra is. Ami $T(a)$ -t illeti, ezt ezen szakasz (B) b) részében bizonyítottuk be, $d(A)$ -ra vonatkozóan ez azt jelenti, hogy minden A_1 -hez, ε -hoz és φ -hez van olyan δ , hogy az alábbi egyenlőtlenségek *egyike* teljesül:

$$((d(A_1) \mp d(A))\varphi, (d(A_1) \mp d(A))\varphi) < \varepsilon, \quad (51)$$

hacsak A benne van A_1 -nek δ környezetében. Az (51) egyenlőtlenség ekvivalens az

$$((1 \mp d(A_0))\varphi, (1 \mp d(A_0))\varphi) < \varepsilon \quad (51a)$$

egyenlőtlenséggel, ahol most $A_0 = A_1^{-1}A$ a feltevés szerint az egységelem környezetébe esik. Eszerint $d(A)$ folytonossága $A = E$ helyen maga után vonja, hogy a folytonosság mindenütt fennáll.²³ Valójában elégséges lenne megmutatni, hogy a (40) transzformációknak megfelelő $d(X)$, $d(Y)$, $d(Z)$ operátorok ± 1 -hez konvergálnak, amint α és γ zérushoz tart, minthogy az egységelem környezetében minden transzformáció a $A = Z(0, \gamma_3)Y(0, \gamma_2)X(0, \gamma_1)X(\alpha_1, 0)Y(\alpha_2, 0)Z(\alpha_3, 0)$ szorzatalakban írható fel és az $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ paraméterek 0-hoz konvergálnak, amint A egyhez tart. Mindazonáltal mi a bizonyítást tetszőleges, elemi osztóval nem rendelkező A -ra fogjuk elvégezni.

Ami $d(A)$ -t illeti, a (46) egyenletek azt mutatják, hogy amint A az E egységtranszformációhoz tart (vagyis amint γ és χ zérushoz tart), M_{00} és N_{00} ugyanazon involúcióhoz konvergál; ezt K -nak fogjuk nevezni. Tekintsük most a $\psi = \varphi + d_1(K)\varphi$, vagy ha ez eltűnik, a $\psi = \varphi - d_1(K)\varphi$ hullámfüggvényt. Fennáll: $d_1(K)\psi = \pm \psi$.

²³ J. von Neumann, Sitz, d. kön. Preuss. Akad. 76. old., 1927.

Ha A eléggé megközelíti az egységtranszformációt, $d_1(N_{00})\psi$ elég közel fog esni $\Omega d_1(K)\psi = \pm \Omega\psi$ -hez, s mindössze azt kell megmutatnunk, hogy Ω tart ± 1 -hez. Ugyanez érvényes lesz $d_1(M_{00})$ -ra is. Valóban, ha $d_1(N_{00})\psi - \Omega\psi = u$ mindkét oldalára alkalmazzuk $d_1(N_{00})$ -t, következik $\psi - \Omega^2\psi = (d_1(N_{00}) + \Omega)u$ fennállása. Amint (u, u) zérushoz tart, Ω -nak ± 1 -hez kell tartania, s következésképpen $d_1(N_{00})\psi$ is ψ -hez vagy $-\psi$ -hez tart. Ha erre $d_1(M_{00})$ -t alkalmazzuk, látjuk, hogy $d_1(M_{00}) \cdot d_1(N_{00})\psi = d(A)\psi$ tart $\pm\psi$ -hez, amint A tart az egységtranszformációhoz. Az (A) b) alatt közölt érvelés mutatja, hogy ez nemcsak ψ -re, hanem minden más függvényre is érvényes, vagyis $d(A)$ konvergál $\pm 1 = d(E)$ -hez, amint A tart E -hez. Így tehát $d(A)$ folytonos E környezetében, s így mindenütt folytonos.

A 4. rész utolsó megjegyzése szerint a $\pm d(A)$ operátorok egyértékű ábrázolását képezik a C komplex unimoduláris kétdimenziós mátrixok csoportjának. Jelöljük azt a homogén Lorentz-transzformációt, amelyet az izomorfizmus C -nek megfeleltet, \tilde{C} -vel. Feladatunkat a (22) egyenletek megoldását, visszavezettük az $[a, C = [a, 1][0, C]$ elemekből álló, $[a, C_1][b, C_2] = [a + \tilde{C}_1 b, C_1 C_2]$ szorzási szabálynak engedelmeskedő csoport valamennyi egyértékű unitér ábrázolásának meghatározására. Ezen csoport $D[a, C] = T(a)d[C]$ ábrázolására a következő összefüggések érvényesek:

$$T(a)T(b) = T(a+b),$$

$$d[C]T(a) = T(\tilde{C}a)d[C], \quad (52a)$$

$$d[C_1]d[C_2] = d[C_1 C_2].$$

Matematikai szempontból talán természetesebb volna a következőkben ezt az új jelölést használni az ábrázolásokra és d -t nem mint \tilde{C} vagy A , hanem mint C függvényét vizsgálni. Mégis jobbnak láttam megtartani a régi jelölést, mivel az emlékeztet a csoportelemek geometriai jelentésére. A (22B), (22C), (22D) összefüggések helyett írhatjuk tehát:

$$T(a)T(b) = T(a+b), \quad (52B)$$

$$d(A)T(a) = T(Aa)d(A), \quad (52C)$$

$$d(A)d(I) = \pm d(AI). \quad (52D)$$

6. Az inhomogén Lorentz-csoport ábrázolásainak visszavezetése a „kis csoport” ábrázolásaira

Ebben a szakaszban, eltérően a többitől, többször fogunk olyan módszereket használni, amelyek a fizikában általánosan elfogadottak bár, szigorú matematikai szempontból azonban további megalapozásra szorulnak. Ezt időközben Neumann János egy még publikálatlan cikkében elvégezte és nagyon le vagyok kötelezve neki ezirányú együttműködéséért és készségéért, hogy eredményeit velem közölte. Valahányszor szükségünk lesz az ő munkájára, hogy ezen szakasz nem egzakt megfontolásait szigorúvá tegyük, hivatkozunk a dolgozatára.²⁴

²⁴ J. von Neumann, Ann. of Math., megjelenés előtt.

A.

Minthogy a translációs operátorok mind kommutálnak, a Hilbert-térben be lehet vezetni²⁴ olyan koordináta-rendszert, hogy a $\varphi(p, \zeta)$ hullámfüggvények a p_1, p_2, p_3, p_4 impulzusváltozókat és a ζ diszkrét változót tartalmazzák:

$$T(a)\varphi(p, \zeta) = e^{i\{p, a\}}\varphi(p, \zeta); \quad (53)$$

p a négy változó: p_1, p_2, p_3, p_4 rövid összefoglaló jelölésére szolgál.

Természetesen az, hogy a kitevőben a Lorentz-féle skalárszorzat lép fel a közönséges helyett, teljesen önkényes; p_1, p_2, p_3 előjelének megváltoztatásával az egyikről áttérhetünk a másikra.

Két hullámfüggvény unitér skaláris szorzatát a koordináta-rendszerre vonatkozóan eddig kirótt feltételek még nem határozzák meg teljesen. A skalárszorzat összegezését tartalmaz ζ -ra, tartalmazhat továbbá egy tetszőleges Stieltjes-integrált p komponenseire vonatkozóan:

$$(\psi, \varphi) = \sum_{\zeta} \int \psi(p, \zeta)^* \varphi(p, \zeta) df(p, \zeta). \quad (54)$$

Annak fontossága, hogy a skalárszorzatba egy p -től függő súlyfaktort vezethetünk be, nem annyira abban rejlik, hogy így különböző véges súlyokat tulajdoníthatunk a p -tér különböző tartományainak. Egy ilyen $g(p, \zeta)$ súlyfüggvényt mindenkor beolvasztathatnánk a hullámfüggvénybe, $\varphi(p, \zeta)$ -t $\sqrt{g(p, \zeta)}\varphi(p, \zeta)$ -val helyettesítve. Az $f(p, \zeta)$ függvény bevezetésére inkább azért van szükség, mert ily módon p bizonyos tartományainak zérus súlyt adhatunk, míg ugyanakkor a tér pontjainak súlya másutt lehet véges. A Hilbert-tér definit metrikájának folyományaképpen az $\int df(p, \zeta)$ integrál minden r tartományra, bármely ζ mellett, vagy pozitív, vagy zérus, minthogy az annak a függvénynek az önmagával képezett skalárszorzata, amely a p változók r tartományában és a diszkrét változó ζ értéke mellett 1, egyébként zérus.

Definiáljuk most a

$$P(A)\varphi(p, \zeta) = \varphi(A^{-1}p, \zeta) \quad (55)$$

operátorokat. Az ezen egyenlettel definiált $P(A)\varphi$ függvényt a p, ζ pontban azt az értéket veszi fel, amit a φ függvény a $A^{-1}p, \zeta$ pontban. Az operátor nem szükségképpen unitér, tekintettel az (54)-ben fellépő súlyfaktorra. Könnyű számítással kapjuk:

$$P(A)T(a)\varphi(p, \zeta) = T(a)\varphi(A^{-1}p, \zeta) = e^{i\{A^{-1}p, a\}}\varphi(A^{-1}p, \zeta),$$

$$T(Aa)P(A)\varphi(p, \zeta) = e^{i\{p, Aa\}}P(A)\varphi(p, \zeta) = e^{i\{p, Aa\}}\varphi(A^{-1}p, \zeta);$$

így tehát $\{A^{-1}p, a\} = \{p, Aa\}$ folytán fennáll:

$$P(A)T(a) = T(Aa)P(A). \quad (56)$$

Ez, valamint (52C), azt mutatja, hogy $d(A)P(A)^{-1} = Q(A)$ felcserélhető valamennyi $T(a)$ -val, s így a p bármely függvényével való szorzással, minthogy az exponenciálisok a p_1, p_2, p_3, p_4 változók függvényeinek egy teljes rendszerét alkotják. Eszerint

$$d(A) = Q(A)P(A), \quad (57)$$

ahol $Q(A)$ egy kizárólag a ζ térben²⁴ ható operátor, mely azonban függhet az alapul vett tér pontjától:

$$Q(A)\varphi(p, \zeta) = \sum_{\eta} Q(p, A)_{\zeta\eta} \varphi(p, \eta). \quad (57a)$$

Itt $Q(p, A)_{\zeta\eta}$ egy közönséges, véges vagy végtelen, p -től és A -tól függő mátrix komponenseit jelöli. Az (57) egyenlet felhasználásával kapjuk:

$$\begin{aligned} d(A)\varphi(p, \zeta) &= \sum_{\eta} Q(p, A)_{\zeta\eta} P(A)\varphi(p, \eta) \\ &= \sum_{\eta} Q(p, A)_{\zeta\eta} \varphi(A^{-1}p, \eta). \end{aligned} \quad (57b)$$

Minthogy az exponenciálisok teljes függvényrendszert alkotnak, a p_1, p_2, p_3, p_4 változók bármely függvényével való szorzás approximálható egy

$$f(p)\varphi = \sum_n c_n T(a_n)\varphi \quad (58)$$

lineáris kombinációval. Ha az $f(p)$ függvényt oly módon választjuk, hogy

$$f(p) = f(Ap) \quad (58a)$$

teljesüljön, az $f(p)$ -vel való szorzás operációja kommutálni fog a csoport minden operációjával. Nyilvánvaló, hogy kommutál $T(a)$ -val és $Q(p, A)$ -val, és (56), (58), (58a) folytán $P(A)$ -val is. Az (58) operáció ennél fogva az adott ábrázolás algebrajának centrumához tartozik. Minthogy azonban feltevésünk szerint az ábrázolás faktorális (vö. 2), a centrum csak az egység többszöröseit tartalmazza s így

$$f(p)\varphi(p, \zeta) = c(p, \zeta). \quad (58b)$$

Ez csak akkor lehet igaz, ha φ csak olyan p impulzusok mellett különbözik zérustól, amelyek egymásból homogén Lorentz-transzformációk segítségével kaphatók, minthogy $f(p)$ -nek csak akkor kell egyenlőnek lennie $f(p')$ -vel, ha van olyan A , amely az egyiket a másikba átviszi.

Elegendő, ha a következőkben csupán az olyan ábrázolásokat vizsgáljuk, amelyeknek hullámfüggvényei csak olyan impulzusok mellett különböznek zérustól, amelyek egy adott impulzustól homogén Lorentz-transzformációkkal kaphatók meg. A φ hullámfüggvény értelmezési tartományát azután ezekre az impulzusokra korlátozhatjuk.

Ezek az ábrázolások természetes módon besorolhatók a 3. szakaszban felsorolt négy osztályba; kettő közülük két-két alosztályt tartalmaz. Lesznek olyan ábrázolások, amelyeknek hullámfüggvényei olyan p értékekre vannak értelmezve, hogy

$$\begin{aligned} (1) \quad \{p, p\} &= P > 0, & (3) \quad p &= 0, \\ (2) \quad \{p, p\} &= P = 0; \quad p \neq 0, & (4) \quad \{p, p\} &= P < 0. \end{aligned}$$

Az 1 és 2 osztályok mindegyike két-két alosztályt tartalmaz. A P_+ és 0_+ pozitív alosztályokban mindegyik impulzus időszerű komponense $p_4 > 0$, a P_- és 0_- negatív alosztályokban az impulzusok negyedik komponense negatív. A 3. osztály jele 0_0 lesz. Ha P negatív, nem kap indexet.

Abból a feltételből, hogy $d(A)$ unitér operátor legyen, arra következtethetünk,²⁴ hogy be lehet vezetni a Hilbert-térbe egy koordináta-rendszert oly módon, hogy

$$\int_r df(p, \zeta) = \int_{Ar} df(p, \eta) \quad (59)$$

teljesüljön, ha az r tartomány p pontjaira $Q(p, A)_{\zeta\eta} \neq 0$. Ettől eltekintve r tetszőleges tartomány a p_1, p_2, p_3, p_4 térben és Ar az a tartomány, amely tartalmazza Ap -t, ha r tartalmazza p -t. Az (59) egyenlet minden ζ -ra és η -ra érvényes, kivéve az olyan párokat, amelyekre $Q(p, A)_{\zeta\eta} = 0$. Az eredeti ábrázolást ennél fogva fel lehet bontani oly módon, hogy (59) mindegyik redukált részen belül teljesüljön. Sem $T(a)$ -nak, sem $d(A)$ -nak nem lehetnek mátrixelemei olyan η -k és ζ -k között, amelyekre (59) nem teljesül.

Az ábrázolások harmadik osztályában a p változó teljesen elhagyható; $T(a)\varphi(\zeta) = \varphi(\zeta)$, vagyis valamennyi hullámfüggvény invariáns a translációk alkotta invariáns alcsoport operációival szemben. A $T(a)\varphi(\zeta) = \varphi(\zeta)$ egyenlet invariáns módon jellemzi a harmadik osztály ábrázolásait (azaz: ezen jellemzést nem érinti hasonlósági transzformáció). Így tehát egy a 3. osztályba tartozó ábrázolás redukciójával kapott részek ugyancsak ebbe az osztályba tartoznak.

Mint hogy a többi osztályban nincs olyan hullámfüggvény, amely minden eltolással szemben invariáns volna, a többi osztályok ábrázolásai nem tartalmazhatnak harmadik osztálybeli ábrázolást. A többi osztályban p változási tartománya háromdimenziós marad. Ennél fogva p_1, p_2, p_3, p_4 helyett bevezethetünk három független változót. Az 1. és 2. esetben, amelyekkel a legtöbb dolgunk lesz, megtarthatjuk p_1 -et, p_2 -t és p_3 -at ezen három független változó szerepében. Tekintettel (59)-re, a Stieltjes-integrál az ezen változókra vonatkozó közös integrállal²⁴ helyettesíthető, a $|p_4|^{-1} = (P + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{-\frac{1}{2}}$ súlyfaktor mellett:

$$\{\psi, \varphi\} = \sum_{\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(p, \zeta)^* \varphi(p, \zeta) |p_4|^{-1} dp_1 dp_2 dp_3. \quad (59a)$$

Valóban, a $|p_4|^{-1}$ súlyfaktor mellett az r tartomány súlya: $W_r = \int \int \int_r |p_4|^{-1} dp_1 dp_2 dp_3$, egyenlő a Ar tartomány W_{Ar} súlyával, amint annak (59) szerint lennie is kell.²⁵ Miután így megválasztottuk a skaláris szorzatot, $P(A)$ unitér operátor lesz; unitér lesz ennél fogva $Q(A)$ is.

A következőkben a P adott értékéhez tartozó ábrázolásoknak a Hilbert-térben választott koordináta-rendszertől független jellemzését kívánjuk megadni. Az (53) egyenletből következik, hogy egy ábrázolásban, amelyet P adott értéke jellemez, a ψ_1, ψ_2, \dots hullámfüggvények — melyek csak p egy véges tartományában különböznek zérustól — mindenütt sűrű függvényrendszert képeznek, amelynek valamennyi elemére tetszőlegesen sokszor alkalmazhatjuk az infinitezimális eltolásoperátorokat:

$$\lim_{h=0} h^{-n} (T(he) - 1)^n \psi = \lim_{h=0} h^{-n} (e^{ih(p, e)} - 1)^n \psi = i^n \{p, e\}^n \psi; \quad (60)$$

²⁵ Az (59a) típusú integrálok invarianciáját gyakran felhasználják a relativitáselméletben. Igazolása a

$$p'_i = A_{i1}p_1 + A_{i2}p_2 + A_{i3}p_3 + (P + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

transzformáció Jacobi-determinánsának kiszámításával történhet. Az eredmény $(P + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (P + p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2)^{-\frac{1}{2}}$. Az (59a) egyenletet nem fogjuk felhasználni e dolgozat későbbi részeiben.

itt e a koordinátatengely irányába mutató vagy azzal ellentétes egységvektor. Eszerint ezen mindenütt sűrű rendszer minden tagjára fennáll:

$$\lim_{h=0} \sum_k \pm h^{-2} (T(2he_k) - 2T(he_k) + 1) \psi = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2) \psi = -P\psi, \quad (61)$$

ahol e_k a k -adik koordinátatengely irányába mutató (vagy azzal ellentétes) egységvektor és a $+$ előjel $k=4$, a $-$ előjel pedig $k=1, 2, 3$ mellett érvényes.

Másrésről nincs olyan φ , amely mellett

$$\lim_{h=0} \sum_k \pm h^{-2} (T(2he_k) - 2T(he_k) + 1) \varphi, \quad (61a)$$

amennyiben létezik, $-P\varphi$ -től különbözik. Tegyük fel, hogy a (61a) alatt jelzett limesz létezik és $-P\varphi + \varphi'$ -vel egyenlő. Válasszunk most egy normált ψ -t a fenti rendszerből oly módon, hogy $(\psi, \varphi') = \delta > 0$ legyen. Válasszunk h -t, hogy a \lim jel után álló kifejezés (61a) alatt a $-P\varphi + \varphi' + u$ értéket vegye fel, ahol $(u, u) < \delta/3$ és a (61) alatt a \lim jel után álló kifejezés, ellentétes irányú e_k mellett, $-P\psi + u'$ -vel legyen egyenlő, ahol $(u', u') < \delta/3$. Ekkor $T(a)$ unitér jellege folytán, s a $T(-a) = T(a)^{-1}$ egyenlőséget tekintetbe véve kapjuk, hogy

$$(\psi, \sum_k \pm h^{-2} (T(2he_k) - 2T(he_k) + 1) \varphi) = (\sum_k \pm h^{-2} (T(-2he_k) - 2T(-he_k) + 1) \psi, \varphi)$$

vagy

$$-P(\psi, \varphi) + (\psi, \varphi') + (\psi, u) = -P(\psi, \varphi) + (u', \varphi),$$

ami nyilvánvalóan lehetetlen.

Eszerint ha (61a) alatt a limesz létezik, az $-P\varphi$ -vel egyenlő és ez az ábrázolásnak hasonlósági transzformációktól független jellemzését szolgáltatja. Minthogy a fentiek szerint adott ábrázolás esetében mindig találhatunk olyan hullámfüggvényt, amelyre (61a) alkalmazható, valamely adott P -hez tartozó ábrázolás mindegyik redukált részének ugyanezen P -hez kell tartoznia és ha valamely ábrázolás egy adott P -hez tartozik, akkor lehetetlen, hogy egy olyan ábrázolásban benne foglalassék, amelyet P -nek egy másik értéke jellemez. Ugyanez az érvelés nyilvánvalóan alkalmazható az 1. és 2. osztály pozitív és negatív alosztályaira is.

B.

A csoport minden egyes $L \rightarrow L^\circ$ automorfizmusa lehetőséget nyújt, hogy valamely $D(L)$ ábrázolásból egy másik ábrázolást szerkesszünk:

$$D^\circ(L) = D(L^\circ). \quad (62)$$

Ez az elv lehetővé teszi, hogy véges pozitív vagy negatív P -vel jellemzett ábrázolások esetében P -nek egyetlen értékére szorítkozzunk, mely $+1_+$ -nak, ill. -1 -nek választható. Lehetővé fogja tenni azt is, hogy az 1. és 2. esetekben a negatív alosztályok ábrázolásait a pozitív alosztályok ábrázolásaiából kiindulva szerkesszük meg.

Az első automorfizmus: $a^\circ = \alpha a$, $A^\circ = A$. A (12) egyenletek nyilvánvalóan invariánsak ezen transzformációval szemben. Legyen azonban most

$$T^\circ(a)\varphi = T(\alpha a)\varphi, \quad d^\circ(A)\varphi = d(A)\varphi;$$

ekkor p szerepében a vesszőtlen ábrázolás p -je α -val megszorozva lép fel:

$$T^0(a)\varphi = T(\alpha a)\varphi = e^{i\{p, \alpha a\}}\varphi = e^{i\{p, a\}}\varphi.$$

Ily módon, kiindulva P egy adott számértékéhez tartozó valamennyi ábrázolásból, alkalmas pozitív valós α -t választva, megszerkeszthetjük a P tetszőleges értékéhez tartozó összes ábrázolást. Ha α -t negatívnak választjuk, a pozitív alosztály ábrázolásából megkapjuk a negatív alosztály ábrázolásait.

A $P=0_0$ esetben a (62) transzformáció minden ábrázolást nyilvánvalóan önmagába visz át. A $P=0_+$ és $P=0_-$ esetekben látni fogjuk, hogy pozitív α mellett (62) minden ábrázolást ekvivalens ábrázolásba visz át.

C.

Az (53) és (56), (57) egyenletek folyományaképpen (52B) és (52C) automatikusan teljesülnek; az (52D) egyenlet segítségével határozandó meg. Ily módon kapjuk:

$$\sum_{\eta^3} Q(p, A)_{\zeta\eta} Q(A^{-1}p, I)_{\eta^3} \varphi(I^{-1}A^{-1}p, \vartheta) = \pm \sum_{\vartheta} Q(p, AI)_{\zeta\vartheta} \varphi(I^{-1}A^{-1}p, \vartheta). \quad (63)$$

Mint ahogy ennek minden φ -re teljesülnie kell, kézenfekvő volna

$$\sum_{\eta} Q(p, A)_{\zeta\eta} Q(A^{-1}p, I)_{\eta^3} = \pm Q(p, AI)_{\zeta^3} \quad (63a)$$

fennállására következtetni. Valójában ez a következtetés nem jogos, minthogy két hullámfüggvényt egyenlőnek kell tekintenünk akkor is, ha egy zérus mértékű halmazon különböznek. Így további megfontolás nélkül nem következtethetünk arra, hogy (63a) két oldala minden p pontban egyenlő. Másrésztől azonban²⁴ $Q(p, A)_{\zeta\eta}$ értékét egy zérus mértékű halmazon megváltoztatva, azt minden pont környezetében folytonossá tehetjük, ha az ábrázolás folytonos. Ily módon (63a) mégis igazolható. A (63a) összefüggésből következik, hogy $Q(p, I)_{\zeta\eta} = \delta_{\zeta\eta}$.

Válasszunk most¹⁵ alapul egy önkényes p_0 -t. Tekintsük most valamennyi homogén Lorentz-transzformáció azon alcsoportját, amely ezen p_0 -t változtatlanul hagyja. Ezen „kis csoport” tetszőleges két λ, ι elemére fennáll:

$$\sum_{\eta} Q(p_0, \lambda)_{\zeta\eta} Q(p_0, \iota)_{\eta^3} = \pm Q(p_0, \lambda\iota)_{\zeta^3}, \quad (64)$$

$$q(\lambda)q(\iota) = \pm q(\lambda\iota);$$

itt $q(\lambda)$ a $q(\lambda)_{\zeta\eta} = Q(p_0, \lambda)_{\zeta\eta}$ mátrixot jelöli. Tekintettel $Q(A)$ unitér voltára, $Q(p_0, A)_{\zeta\eta}$ unitér mátrix és $q(\lambda)$ ugyancsak unitér.

Ha az 5. szakasz bekezdésének megfelelően a translációkból és — a Lorentz-transzformációk helyett — az unimoduláris kétdimenziós mátrixokból álló csoportot tekintjük a \pm előjelet (64) alatt a $+$ előjellel helyettesíthetjük. Ebben az esetben λ és ι unimoduláris kétdimenziós mátrixok, és a kis csoportot azok a mátrixok alkotják, amelyeknek megfelelő $\tilde{\lambda}, \tilde{\iota}$ Lorentz-transzformációk p_0 -t változtatlanul hagyják: $\tilde{\lambda}p_0 = \tilde{\iota}p_0 = p_0$.

Elfogadva (64)-nek ezt az értelmezését, megfordítva azt is láthatjuk, hogy a kis csoport $q(\lambda)$ ábrázolása, az egész csoport ábrázolását jellemző P értékkel és az osztállyal együtt, meghatározza ezt az utóbbi ábrázolást, egy hasonlósági transz-

formáció erejéig. Ennek bebizonyítása céljából definiáljunk minden p -re egy $\alpha(p)$ kétdimenziós unimoduláris mátrixot oly módon, hogy a megfelelő Lorentz-transzformáció p_0 -t transzformálja p -be:

$$\tilde{\alpha}(p)p_0 = p. \quad (65)$$

Ez az $\alpha(p)$ tetszőleges lehet, csak legyen p -nek majdnem mindenütt folytonos függvénye, speciálisan legyen folytonos a $p = p_0$ helyen és legyen $\alpha(p_0) = 1$. Ekkor írhatjuk:

$$\begin{aligned} d(\alpha(p)^{-1})\varphi(p_0, \zeta) &= \varphi(p, \zeta), \\ d(\alpha(p))\varphi(p, \zeta) &= \varphi(p_0, \zeta). \end{aligned} \quad (66)$$

Ez ekvivalens a

$$Q(p, \alpha(p)) = 1 \quad (66a)$$

egyenlőséggel, s egy hasonlósági transzformációval érhető el, mely $\varphi(p, \zeta)$ -t $\Sigma_\eta Q(p_0, \alpha(p)^{-1})_{\zeta\eta} \varphi(p, \eta)$ -val helyettesíti. Minthogy a $Q(p_0, \alpha(p)^{-1})$ mátrix unitér, ez unitér transzformáció. Nem érinti azonkívül (53)-at, mivel p -t csak mint paramétert tartalmazza.

Feltételezve ezen transzformáció elvégzését, (66) érvényes lesz, és a $d(\lambda)$ -kkal együtt az összes fennmaradó $Q(p, \lambda)$ -t egyértelműen definiálja. Valóban, $d(\lambda)\varphi(p, \zeta)$ kiszámításakor λ -t három tényezőre bonthatjuk fel:

$$\lambda = \alpha(p) \cdot \alpha(p)^{-1} \lambda \alpha(\tilde{\lambda}^{-1}p) \cdot \alpha(\tilde{\lambda}^{-1}p)^{-1}. \quad (67)$$

A második tényező, $\beta = \alpha(p)^{-1} \lambda \alpha(\tilde{\lambda}^{-1}p)$, eleme a kis csoportnak: $\tilde{\alpha}(p)^{-1} \tilde{\lambda} \tilde{\alpha} \cdot (\tilde{\lambda}^{-1}p)_0 = \tilde{\alpha}(p)^{-1} \tilde{\lambda} \cdot \tilde{\lambda}^{-1}p = \tilde{\alpha}(p)^{-1}p = p_0$. Ennélfogva írhatjuk $(\tilde{\lambda}^{-1}p = p')$:

$$\begin{aligned} d(\lambda)\varphi(p, \zeta) &= d(\alpha(p))d(\beta)d(\alpha(p'))^{-1}\varphi(p, \zeta) \\ &= d(\beta)d(\alpha(p'))^{-1}\varphi(p_0, \zeta) \\ &= \sum_\eta q(\beta)_{\zeta\eta} d(\alpha(p'))^{-1}\varphi(p_0, \eta) = \sum_\eta q(\beta)_{\zeta\eta} \varphi(p', \eta). \end{aligned} \quad (67a)$$

Ez mutatja, hogy a teljes inhomogén Lorentz-csoport minden olyan ábrázolása ekvivalens, amelyhez P ugyanazon értéke és a kis csoport ugyanazon ábrázolása tartozik. Ezen túlmenően ugyanez érvényes akkor is, ha a kis csoport ábrázolása a két ábrázolás esetében nem ugyanaz, hanem csak ekvivalens. Tegyük fel, hogy $q_1(\lambda) = s q_2(\lambda) s^{-1}$. Ekkor $\varphi(p, \zeta)$ -t $\Sigma_\eta s(\zeta, \eta) \varphi(p, \eta)$ -val helyettesítve az ábrázolás új alakját kapjuk, amelyre (53) ugyancsak fennáll, $q_2(\beta)$ helyét azonban $q_1(\beta)$ foglalja el. Ekkor az imént leírt transzformáció segítségével [lásd (66)] $d(\lambda)$ -t mindkét ábrázolás esetében a (67a) alakra hozhatjuk. A kis csoport két ábrázolásának ekvivalenciáját így kell definiálnunk: létezzék olyan unitér transzformáció, amely őket egymásba transzformálja. (A teljes csoport esetében is csak unitér transzformációkat használunk.)

Másrésről, ha az egész csoport ekvivalens ábrázolásaival állunk szemben, a kis csoport ábrázolásai is ekvivalensek: az egész csoport ábrázolása a kis csoport ábrázolását hasonlósági transzformáció erejéig egyértelműen meghatározza.

A kis csoport ábrázolása a definíció szerint: a $Q(p_0, \lambda)_{\zeta\eta}$ mátrixok rendszere, ha az ábrázolás úgy transzformálódik, hogy (53) és (66a) fennáll. Ha van két ekvivalens ábrázolásunk: D és $SDS^{-1} = D^\circ$, melyek mindegyikére fennáll (53) és (66a),

az S unitér transzformációnak, amely az első ábrázolást a másodikba transzformálja, minden eltolásoperátort változatlanul kell hagynia. Így tehát az (57a) alakúnak kell lennie, azaz csak ζ -ra hathat és p -től csak mint paramétertől függhet:

$$S\varphi(p, \zeta) = \sum_{\eta} S(p)_{\zeta\eta} \varphi(p, \eta). \quad (68)$$

A Q mátrixot a két ábrázolás esetében Q -val és Q° -al jelölve, az $SD(A) = D^\circ(A)S$ feltétel azt adja, hogy

$$\sum_{\eta} S(p)_{\zeta\eta} Q(p, A)_{\eta\alpha} = \sum_{\eta} Q^\circ(p, A)_{\zeta\eta} S(A^{-1}p)_{\eta\alpha} \quad (68a)$$

minden A -ra és majdnem minden p -re fennáll. Legyen $A = \alpha(p_1)$; p -vel közeledhetünk p_1 -hez oly módon, hogy (68a) érvényes marad. Minthogy Q folytonos függvénye p -nek, mind $Q(p, A)$, mind $Q^\circ(p, A)$ az 1 határértékhez fog tartani. Ebből következik, hogy nincs olyan tartomány, amelyben

$$S(p_1) = S(\alpha(p_1)^{-1}p_1) = S(p_0) \quad (69)$$

ne teljesülne; azaz: (69) fennáll majdnem minden p_1 -re. Minthogy minden egyenletünknek csak majdnem minden p -re kell teljesülnie, az $S(p)_{\zeta\eta}$ elemekről feltehetjük, hogy függetlenek p -től s ekkor (68a) minden p -re teljesül. Ebből következik, hogy a kis csoport D -ben és D° -ban foglalt ábrázolásait $S_{\zeta\eta}$ transzformálja egymásba.

A kis csoport definíciójában szerepet kapott egy önkényesen választott p_0 vektor. Nyilvánvaló azonban, hogy két különböző p_0, p impulzusnak holomorf kis csoportok felelnek meg. Valóban, $\alpha(p)$ segítségével egymásba transzformálhatók. Ha A azon kis csoport eleme, amely változatlanul hagyja p -t, akkor $\alpha(p)^{-1}A\alpha(p) = \beta$ annak a kis csoportnak az eleme, amellyel szemben p_0 invariáns. Láthatjuk továbbá (67a)-ból, hogy ha A eleme a p -nek megfelelő kis csoportnak, azaz $Ap = p$, akkor a p_0 -nak megfelelő kis csoport β -hoz rendelt $q(\beta)$ ábrázolási mátrixa azonos a p kis csoportjában $A = \alpha(p)\beta\alpha(p)^{-1}$ -nek megfelelő ábrázolási mátrixszal. Ha tehát a teljes inhomogén Lorentz-csoport valamely ábrázolását P -vel és a kis csoport ábrázolásával jellemezzük, nem kell megmondanunk, melyik az a p_0 vektor, amely a kis csoporttal szemben invariáns.

D.

Végül meghatározzuk a kis csoport szerkezetét az egyes esetekben.

1_+ . Az 1_+ esetben p_0 -nak a $0, 0, 0, 1$ komponensű vektort választhatjuk. A kis csoport, amely ezt változatlanul hagyja, nyilvánvalóan tartalmazza az összes elforgatást az első három koordináta terében. Ez az első osztály minden ábrázolásának kis csoportjára áll.

0_0 . A 0_0 esetben a kis csoport az egész homogén Lorentz-csoport.

-1 . A $P = -1$ esetben feltehetjük, hogy p_0 komponensei $1, 0, 0, 0$. A kis csoport ekkor mindazokat a transzformációkat tartalmazza, amelyek a $-x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$ alakot változatlanul hagyják, az tehát a $2+1$ dimenziós homogén Lorentz-csoport. Ugyanez vonatkozik minden $P < 0$ ábrázolásra.

0_+ . A $P = 0_+$ esetben a kis csoport meghatározása valamivel bonyolultabb. Meglehetősen egyszerűen elvégezhető azonban az unimoduláris kétdimenziós mátrixok csoportja esetében. A $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ mátrixnak, ahol $ad - bc = 1$, megfelelő Lorentz-

transzformáció az x_1, x_2, x_3, x_4 komponensű vektort az x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 komponensekkel rendelkező vektorba viszi át:¹⁸

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_4 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_4 + x'_3 & x'_1 + ix'_2 \\ x'_1 - ix'_2 & x'_4 - x'_3 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Annak feltételét, hogy egy p_0 vektor, melynek mondjuk 0, 0, 1, 1 a komponensei, invariáns legyen, könnyen megkaphatjuk: $|a|^2=1$, $c=1$. A kis csoport legáltalánosabb eleme tehát így írható:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\beta/2} & (x+iy)e^{i\beta/2} \\ 0 & e^{i\beta/2} \end{pmatrix}, \quad (71)$$

ahol x, y, β valós számok és $0 \leq \beta < 4\pi$. A (71) általános elem a $t(x, y)\delta(\beta)$ alakban írható fel, ahol

$$t(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x+iy \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta(\beta) = \begin{pmatrix} e^{-i\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\beta/2} \end{pmatrix}. \quad (71a)$$

Ezekre a következő szorzási szabályok állnak fenn:

$$t(x, y)t(x', y') = t(x+x', y+y') \quad (71b)$$

$$\delta(\beta)t(x, y) = t(x \cos \beta + y \sin \beta, -x \sin \beta + y \cos \beta)\delta(\beta), \quad (71c)$$

$$\delta(\beta)\delta(\beta') = \delta(\beta + \beta'). \quad (71d)$$

A β változónak $\delta(\beta)$ -ben 0-tól 2π -ig korlátozhatnánk a változási tartományát. Minthogy $\delta(2\pi)$ kommutál a kis csoport minden elemével, az egyenlő egy konstanssal és $\delta(2\pi)^2 = \delta(4\pi) = 1$ -ből következik, hogy $\delta(2\pi) = \pm 1$. Így tehát $\delta(\beta + 2\pi) = \pm \delta(\beta)$, s a (71d) egyenletbe beírva egy \pm jelet, β változását $0 \leq \beta < 2\pi$ szakaszra korlátozhatnánk.

Ezek az egyenletek hasonlóak az (52)—(52D) egyenletekhez és azt mutatják, hogy a kis csoport ebben az esetben izomorf a kétdimenziós inhomogén forgáscsoporttal, azaz az euklideszi csoporttal két dimenzióban.

Megemlíjtük, hogy a $t(x, y)$ mátrixokhoz rendelt Lorentz-transzformációknak van elemi osztójuk s azok kimerítik a transzformációk 4B alatt leírt e) osztályát, ahol $v_e = p_0$. A $\delta(\beta)$ transzformációk felfoghatók mint elforgatások a közönséges háromdimenziós térben a p_0 vektor térbeli része körül. A (71) egyenleteket így közvetlenül igazolhatjuk.

7. A kis csoport ábrázolásai

A. A háromdimenziós forgáscsoport ábrázolásai unitér transzformációkkal

A háromdimenziós forgáscsoport véges dimenziós térben létesített ábrázolásai jól ismertek. Pontosan egy irreducibilis ábrázolás található az 1, 2, 3, 4, ... dimenziók mindegyikéhez; a páratlan dimenziós ábrázolások egyértékűek, a páros dimenziósak kétértékűek. Az ábrázolások jele $D^{(j)}(R)$ lesz; $2j+1$ a dimenzió. Az egyértékű ábrázolások esetében így j egész, a kétértékűek esetében feles szám. Minden véges

dimenziós ábrázolás ilyen irreducibilis ábrázolásokra bontható. Következésképpen a Lorentz-csoport azon pozitív P -hez tartozó ábrázolásai, melyekben a — (64) alatt definiált — kis csoport ábrázolása véges dimenziós, olyan ábrázolásokra bontható, amelyben a kis csoport ábrázolása megegyezik a forgáscsoport jól ismert irreducibilis ábrázolásainak egyikével. Ez a megállapítás az inhomogén Lorentz-csoport minden, pozitív P -hez tartozó ábrázolására vonatkozik, minthogy látni fogjuk, hogy még a forgáscsoport végtelen dimenziós ábrázolásai is felbonthatók ezen véges irreducibilis ábrázolásokra.

A következőkben célszerűbb lesz, ha a forgáscsoport helyett a kétdimenziós unimoduláris csoport elforgatásoknak megfelelő alcsoportját vesszük szemügyre, mivel ebben az esetben egyértékű ábrázolásokra korlátozódhatunk [vö. (52)]. A (70) képletből könnyen látható:¹⁸ annak feltétele, hogy az $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ mátrix a 0, 0, 0, 1 vektort változtatlanul hagyja, az, hogy ez a mátrix unitér legyen. A forgáscsoport helyett tehát a kétdimenziós unimoduláris unitér csoport ábrázolásait fogjuk vizsgálni.

Vezessünk be az ábrázolási térben egy diszkrét koordinátarendszert és jelöljük az unitér ábrázolás koefficienseit $q(R)_{\kappa\lambda}$ -val, ahol R egy kétdimenziós unitér transzformáció. A $q(R)$ ábrázolás unitér voltának feltételéből kapjuk:

$$\sum_{\kappa} q(R)_{\kappa\lambda}^* q(R)_{\kappa\mu} = \delta_{\lambda\mu}, \quad \sum_{\lambda} q(R)_{\kappa\lambda}^* q(R)_{\nu\lambda} = \delta_{\kappa\nu}, \quad (72)$$

$$\sum_{\kappa} |q(R)_{\kappa\lambda}|^2 = 1, \quad \sum_{\lambda} |q(R)_{\kappa\lambda}|^2 = 1. \quad (72a)$$

Innen látható, hogy $|q(R)_{\kappa\lambda}| \leq 1$ és a $q(R)_{\kappa\lambda}$ -k ennél fogva, mint R függvényei, négyzetesen integrálhatók: az

$$\int |q(R)_{\kappa\lambda}|^2 dR$$

integrálok léteznek; itt $\int \dots dR$ a jól ismert invariáns integrál a csoporttérben. Minthogy ez az integrál a forgáscsoport (vagy az unimoduláris unitér csoport) esetében véges, 1-re normálható. Ekkor tehát

$$\sum_{\kappa} \int |q(R)_{\kappa\lambda}|^2 dR = \sum_{\lambda} \int |q(R)_{\kappa\lambda}|^2 dR = 1. \quad (73)$$

A $(2j+1)^{\frac{1}{2}} D^{(j)}(R)_{kl}$ függvények az R csoporton teljes ortonormált függvényrendszert képeznek.²⁶ Legyen

$$q(R)_{\kappa\lambda} = \sum_{jkl} C_{jkl}^{\kappa\lambda} D^{(j)}(R)_{kl}. \quad (74)$$

Számítsuk ki most $D^{(j)}(R)_{kl}^*$ és

$$q(RS)_{\kappa\mu} = \sum_{\lambda} q(R)_{\kappa\lambda} q(S)_{\lambda\mu} \quad (75)$$

szorzatának a csoporttérre kiterjesztett integrálját. A jobboldalon álló összeg egyenletesen konvergál, minthogy (72a) folytán

$$\sum_{\lambda=N}^{\infty} |q(R)_{\kappa\lambda} q(S)_{\lambda\mu}| \leq \left(\sum_{\lambda=N}^{\infty} |q(R)_{\kappa\lambda}|^2 \sum_{\lambda=N}^{\infty} |q(S)_{\lambda\mu}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{\lambda=N}^{\infty} |q(S)_{\lambda\mu}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

²⁶ H. Weyl és F. Peter, Math. Annal. 97, 737, 1927.

tetszőlegesen kicsinnyé tehető oly módon, hogy egy R -től független N választásával az utóbbi kifejezést kicsinnyé tesszük. Így (75) tagonként integrálható:

$$\int D^{(j)}(R)_{kl}^* q(RS)_{\kappa\mu} dR = \sum_{\lambda} \int D^{(j)}(R)_{kl}^* q(R)_{\kappa\lambda} q(S)_{\lambda\mu} dR. \quad (76)$$

Ha $D^{(j)}(R)_{kl}$ helyére behelyettesítjük $\sum_m D^{(j)}(RS)_{km} D^{(j)}(S^{-1})_{ml}$ -et kapjuk:

$$\sum_m D^{(j)}(S^{-1})_{ml}^* \int D^{(j)}(RS)_{km}^* q(RS)_{\kappa\mu} dR = \sum_{\lambda} q(S)_{\lambda\mu} \int D^{(j)}(R)_{kl}^* q(R)_{\kappa\lambda} dR. \quad (77)$$

A (77) bal oldalán álló integrálban RS helyére R helyettesíthető és (74), valamint az unitér jelleg folytán kapjuk:

$$\sum_m D^{(j)}(S)_{lm} C_{jkm}^{\kappa\mu} = \sum_{\lambda} q(S)_{\lambda\mu} C_{jkl}^{\kappa\lambda}. \quad (78)$$

Megszorozva (78)-at $D^{(h)}(S)_{in}^*$ -nel, a jobb oldalon az integrálás ismét tagonként elvégezhető, minthogy a λ -ra vonatkozó szumma egyenletesen konvergál:

$$\sum_{\lambda=N}^{\infty} |C_{jkl}^{\kappa\lambda} q(S)_{\lambda\mu}| \leq \left(\sum_{\lambda=N}^{\infty} |C_{jkl}^{\kappa\lambda}|^2 \sum_{\lambda=N}^{\infty} |q(S)_{\lambda\mu}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{\lambda=N}^{\infty} |C_{jkl}^{\kappa\lambda}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ez tetszőlegesen kicsinnyé tehető, minthogy (74) és (72a) folytán még $\sum_{\lambda} \sum_{jkl} (2j+1)^{-1} |C_{jkl}^{\kappa\lambda}|^2$ is konvergál. Elvégezve az integrálást (78) alatt, kapjuk tehát:

$$\sum_{\lambda} C_{jkl}^{\kappa\lambda} C_{hin}^{\lambda\mu} = \delta_{jh} \delta_{li} C_{jkn}^{\kappa\mu}. \quad (79)$$

A $q(R)q(E)=q(R)$ összefüggésből $q(E)=1$ következik, továbbá $q(R^{-1})=q(R)^{-1}=q(R)^{\dagger}$. Ez a $D^{(j)}(R)$ -re vonatkozó hasonló egyenlettel a

$$\begin{aligned} \sum_{jkl} C_{jkl}^{\kappa\lambda} D^{(j)}(R^{-1})_{kl} &= q(R^{-1})_{\kappa\lambda} = q(R)_{\lambda\kappa}^* \\ &= \sum_{jkl} C_{jlk}^{\lambda\kappa*} D^{(j)}(R)_{lk}^* = \sum_{jlk} C_{jlk}^{\lambda\kappa*} D^{(j)}(R^{-1})_{kl}, \end{aligned} \quad (80)$$

vagy a

$$C_{jkl}^{\kappa\lambda} = C_{jlk}^{\lambda\kappa*} \quad (81)$$

eredményt adja. Másrésztől $q(E)_{\kappa\lambda} = \delta_{\kappa\lambda}$ a

$$\sum_{jk} C_{jkk}^{\kappa\lambda} = \delta_{\kappa\lambda} \quad (82)$$

összefüggésre vezet.

Ezek a képletek lehetővé teszik, hogy elvégezzük $q(R)$ redukcióját. Válasszunk minden egyes véges $D^{(j)}$ irreducibilis ábrázolás számára egy k indexet; legyen mondjuk $k=0$. Defináljuk most a $q(R)$ ábrázolás eredeti terében a $v^{(\kappa jl)}$ vektorokat, melyeknek komponensei

$$C_{jkl}^{\kappa 1}, C_{jkl}^{\kappa 2}, C_{jkl}^{\kappa 3}, \dots$$

A különböző j -khez és l -ekhez tartozó $v^{(\kappa jl)}$ vektorok ortogonálisak, az ugyanazon j -hez és l -hez tartozók skalárszorzata független l -től. Ez (79)-ből és (81)-ből következik:

$$(v^{(\mu j' l')}, v^{(\kappa jl)}) = \sum_{\lambda} C_{j' l' k}^{\mu \lambda*} C_{jkl}^{\kappa \lambda} = \sum_{\lambda} C_{jkl}^{\kappa \lambda} C_{j' l' k}^{\lambda \mu} = \delta_{jj'} \delta_{ll'} C_{jkk}^{\mu \mu}. \quad (83)$$

A $v^{(\kappa jl)}$ vektorok κ, j, l összes mértékére teljes függvényrendszert képeznek. Ahhoz, hogy ezt megmutassuk, elegendő, ha v minden értékére olyan lineárkombinációt képezünk belőlük, melynek v -edik komponense 1, az összes többi komponense 0. Ez a lineárkombináció

$$\sum_{\kappa jl} C_{jik}^{v\kappa} v^{(\kappa jl)}. \quad (84)$$

Valóban, (84) λ -dik komponense (79) és (82) folytán

$$\sum_{\kappa jl} C_{jik}^{v\kappa} C_{jkl}^{\kappa\lambda} = \sum_{jl} C_{jll}^{v\lambda} = \delta_{v\lambda}. \quad (85)$$

Két olyan v azonban, melyeknek j és l indexei megegyeznek, κ indexei azonban különböznek, nem ortogonális. Kiválasztunk minden egyes j mellett egy l -et, mondjuk az $l=0$ értéket, s végigmehetünk a $v^{(1j0)}$, $v^{(2j0)}$, ... vektorokon és Schmidt módszere szerint ortogonalizálhatjuk és normálhatjuk őket. Az ily módon kapott vektorokat jelölje

$$w^{(nj0)} = \sum_{\lambda} \alpha_{n\lambda}^j v^{(\lambda j0)}. \quad (86)$$

Ekkor minthogy (83) szerint a $(v^{(\kappa jl)}, v^{(\lambda jl)})$ skaláris szorzatok nem függenek l -től, a

$$w^{(njl)} = \sum_{\lambda} \alpha_{n\lambda}^j v^{(\lambda jl)} \quad (86a)$$

vektorok ortogonálisak és normáltak lesznek. A $w^{(njl)}$ vektorok n, j, l összes értékére teljes ortonormált vektorrendszert képeznek. Ugyanez érvényes a $w^{(njl)*}$ konjugált vektorok rendszerére is. Ha ezeket a vektorokat koordinátatengelyekként használjuk az eredeti $q(R)$ ábrázolás számára, azt találjuk, hogy $q(R)$ teljesen ki-redukált alakot ölt. A $q(R)v^{(\kappa jl)*}$ vektornak, amit úgy kapunk, hogy $q(R)$ -et $v^{(\kappa jl)*}$ -ra alkalmazzuk, a v -edik komponense

$$\sum_{\mu} q(R)_{v\mu} (v^{(\kappa jl)*})_{\mu} = \sum_{\mu} q(R)_{v\mu} C_{jik}^{\mu\kappa}. \quad (87)$$

A jobboldal egyenletesen konvergens. Így $(2h+1)D^{(h)}(R)_{in}^*$ -nel képezett szorzata tagonként integrálható. Az eredmény:

$$\sum_{\mu} \int (2h+1) D^{(h)}(R)_{in}^* q(R)_{v\mu} C_{jik}^{\mu\kappa} dR = \sum_{\mu} C_{hin}^{v\mu} C_{jik}^{\mu\kappa} = \delta_{hj} \delta_{in} C_{jik}^{v\kappa}. \quad (88)$$

Így tehát majdnem minden R -re fennáll:

$$\sum_{\mu} q(R)_{v\mu} (v^{(\kappa jl)*})_{\mu} = \sum_i C_{jik}^{v\kappa} D^{(j)}(R)_{il} = \sum_i D^{(j)}(R)_{il} (v^{(\kappa ji)*})_v, \quad (88a)$$

vagy

$$q(R) v^{(\kappa jl)*} = \sum_i D^{(j)}(R)_{il} v^{(\kappa ji)*}. \quad (88b)$$

Minthogy a feltevés szerint mindkét oldal erősen folytonos függvénye R -nek, (88b) minden R -re fennáll. A (86a) képletben n egy-egy értéke mellett összegezni véges számú λ -ra kell. Közvetlenül írhatjuk tehát:

$$q(R) w^{(njl)*} = \sum_i D^{(j)}(R)_{il} w^{(nji)*}. \quad (89)$$

Ez mutatja, hogy az eredeti ábrázolás a w - k koordinátarendszerében a jól ismert $D^{(j)}(R)$ irreducibilis ábrázolásokra bomlik fel. Minthogy a w - k teljes ortonormált vektorrendszert képeznek, az áttérés unitér transzformációnak felel meg.

Ezzel teljessé vált annak a bizonyítása, hogy a forgáscsoport és az unimodális unitér csoport valamennyi (véges és végtelen dimenziós) ábrázolása teljesen reducibilis. Nyilvánvaló az is, hogy ugyanez a megfontolás alkalmazható minden zárt csoportra, azaz ha az $\int dR$ invariáns integrál konvergens.

Az inhomogén Lorentz-csoport esetében az eredmény: P bármely pozitív értéke esetében a kis csoport ábrázolása, ha irreducibilis ábrázolásról van szó, csak $D^{(0)}$, $D^{(\frac{1}{2})}$, $D^{(1)}$, ... lehet, mind a P_+ , mind a P_- esetben. Mindezeket az ábrázolásokat már Majorana és Dirac megtalálta; pozitív P -re ezeken kívül más ábrázolás nincs.

B) A kétdimenziós euklideszi csoport ábrázolásai

Ez a csoport, amint azt a 6. szakaszban megjegyeztük, igen hasonló az inhomogén Lorentz-csoportéhoz. Most is bevezethetjük²⁴ az „impulzusokat”, azaz a ξ , η és ν változókat, ζ helyett oly módon, hogy

$$t(x, y)\varphi(p_0, \xi, \eta, \nu) = e^{i(x\xi + y\eta)}\varphi(p_0, \xi, \eta, \nu) \quad (90)$$

teljesüljön. Hasonlóképpen, most is definiálhatók az $R(\beta)$ operátorok:

$$R(\beta)\varphi(p_0, \xi, \eta, \nu) = \varphi(p_0, \xi', \eta', \nu), \quad (91)$$

ahol

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi \cos \beta - \eta \sin \beta, \\ \eta' &= \xi \sin \beta + \eta \cos \beta. \end{aligned} \quad (91a)$$

Ekkor $\delta(\beta)R(\beta)^{-1} = S(\beta)$ — (71c) folytán — kommutálni fog $t(x, y)$ -nal és ξ -t és η -t ismét csak mint paramétert fogja tartalmazni. Az (57a)-nak megfelelő egyenlet:

$$\delta(\beta)\varphi(p_0, \xi, \eta, \nu) = \sum_{\omega} S(\beta)_{\nu\omega}\varphi(p_0, \xi', \eta', \omega). \quad (92)$$

A (90), (92) egyenletek alapján ismét megállapíthatjuk: ξ és η változási tartománya oly módon korlátozható, hogy minden ξ, η pár egy ξ_0, η_0 párból kapható meg, (91a) szerint, elforgatással. Így tehát két lényegesen különböző eset van:

- a) $\xi^2 + \eta^2 = \Xi \neq 0$
 b) $\xi^2 + \eta^2 = \Xi = 0$, azaz $\xi = \eta = 0$.

A ξ, η tér pozitív definit metrikája kizárja a 6. szakaszban látott többi lehetőséget, melyeket az impulzusok (55) megkövetelte Lorentz-metrikája tett lehetővé.

A b) eset igen könnyen elintézhető. A „kis csoport” ebben az esetben a síkbeli elforgatások csoportja, és bennünket az egy- és kétértékű irreducibilis ábrázolások érdekelnek. Ezek valamennyien egydimenziósak ($e^{is\beta}$):

$$S(\beta) = e^{is\beta}, \quad (93)$$

ahol s egész vagy feles szám. Ezeket az ábrázolásokat Majorana és Dirac is mind megtalálta. Az $s=0$ esetben egyszerűen a $\square\varphi=0$ egyenletet kapjuk, az $s=\pm\frac{1}{2}$

esetben a Dirac-egyenletet zérus tömeg mellett, az $s = \pm 1$ esetben Maxwell elektromágneses egyenleteit stb.

Az $a)$ esetben a kis csoport csak a kétdimenziós unimoduláris csoport egység-mátrixából és a $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrixból áll. Ennek a csoportnak két irreducibilis ábrázolása van, minthogy a kis csoport fenti kétdimenziós mátrixának megfeleltethetjük az (1) -et és a (-1) -et. Ez az egész inhomogén Lorentz-csoportnak két új ábrázolását adja meg, Ξ minden numerikus értéke mellett. Az ábrázolások e két serege a 0_+ osztályba tartozik, s két hasonló sereg tartozik a 0_- osztályba.

A végeredmény eszerint a következő: Az első, P_+ alosztály P_{+j} ábrázolásai két számmal: P -vel és j -vel jellemezhetők. Közülük P pozitív, egyébként tetszőleges, j pedig egész vagy feles pozitív szám vagy zérus. Ugyanez áll a P_- alosztályra. A 0_+ alosztályba háromfajta ábrázolás tartozik. Az első fajta — a 0_+ ábrázolások — egy s számmal jellemezhető, mely egész vagy feles lehet, pozitív, negatív vagy zérus. A második fajta tartozó 0_+ (Ξ) ábrázolások egyértékűek és egy Ξ tetszőleges pozitív számmal jellemezhetők; a harmadik fajta $0'_+(\Xi)$ ábrázolások kétértékűek és szintén egy pozitív Ξ -vel jellemezhetők. Ugyanez áll a 0_- alosztályra. A többi osztály ábrázolásait (0_0 és $P < 0$) nem határoztuk meg.

8. A kibővített Lorentz-csoport ábrázolásai

A.

Minthogy a legtöbb hullámeqyenlet az előző szakaszokban vizsgálnál nagyobb csoporttal szemben invariáns, és minthogy igen valószínű, hogy a fizika törvényei mind invariánsak ezen nagyobb csoporttal szemben, célszerűnek látszik megvizsgálni, hogy miként módosulnak az előbbi szakaszok eredményei, ha 4A. szakaszban definiált „korlátozott Lorentz-csoport”-ról áttérünk a kibővített Lorentz-csoportra. Ez a kibővített Lorentz-csoport az eltolásokon kívül tartalmazza valamennyi X homogén transzformációt, amely (10) -et teljesíti:

$$XFX' = F; \quad (10')$$

a 4A. szakaszban a homogén transzformációkat két további feltétel korlátozta. A $(10')$ feltételből következik, hogy X determinánsa csak $+1$ vagy -1 lehet. Ha X determinánsa -1 , $X_1 = XF$ -é $+1$. Ha az X_1 transzformáció 44 eleme negatív, $X_2 = -X_1$ -é pozitív. Világos tehát, hogy ha X a kibővített Lorentz-csoport mátrixa, az X , XF , $-X$, $-XF$ mátrixok egyike a korlátozott Lorentz-csoportba tartozik. Megfordítva, ha $F^2 = 1$, a kibővített Lorentz-csoport minden homogén transzformációja megkapható a korlátozott csoport homogén transzformációiból az

$$1, F, -1, -F \quad (94)$$

mátrixok valamelyikével való szorzás útján. Az ezen transzformációknak megfelelő csoportelemek jele legyen rendre E, F, I, IF . A korlátozott csoport a kibővített csoportnak azokat az elemeit tartalmazza, amelyek az egységből kiindulva folytonos úton elérhetők. Ebből következik, hogy a korlátozott csoport egy L elemének F -fel, I -vel vagy IF -fel való transzformációja újra a korlátozott csoport egy elemét adja. Az ennél fogva a kibővített Lorentz-csoportnak invariáns alcsoportja. A ki-

bővített Lorentz-csoport ábrázolásainak felkutatására ismét Frobenius módszerét¹⁵ fogjuk alkalmazni.

Az operátorokat, amelyek adott ábrázolásban a (94) homogén transzformációknak megfelelnek, jelölje $d(E)=1$, $d(F)$, $d(I)$, $d(IF)$. Az (52) egyenletek leszarmaztatásához csak a korlátozott csoport transzformációinak a létezését kellett feltételeznünk; azt nem kellett feltenni, hogy ezek az egyedüli transzformációk. Ezek az egyenletek ennél fogva a kibővített csoport ábrázolásaiban is érvényesek lesznek a korlátozott csoport elemeire. A határozatlan tényezőket $d(F)$ -ben és $d(I)$ -ben úgy fogjuk normálni, hogy a négyzetük egy legyen. Fennáll továbbá: $d(F)d(I) = \omega d(I)d(F)$ vagy $d(I) = \omega d(F)d(I)d(F)$. Ezt négyzetre emelve kapjuk: $\omega^2 = \pm 1$. Írható tehát:

$$d(IF) = d(I)d(F) = \pm d(F)d(I), \quad (95)$$

$$d(F)^2 = d(I)^2 = 1, \quad d(IF)^2 = \pm 1.$$

Végül a

$$d(F)D(L_1)d(F) = \omega(L_1)D(FL_1F) \quad (96)$$

egyenletből kapjuk, megszorozva azt az L_2 -re vonatkozó analóg egyenlettel:

$$\omega(L_1)\omega(L_2) = \omega(L_1L_2).$$

Innen $\omega(L)=1$ következik, mivel az inhomogén Lorentz-csoport [vagy az (52B)–(52D) alatt használt csoport] egyetlen egydimenziós ábrázolása az (1). Ily módon kapjuk:

$$d(F)D(L)d(F) = D(FLF), \quad (96a)$$

$$d(I)D(L)d(I) = D(ILI), \quad (96b)$$

$$d(IF)D(L)d(IF)^{-1} = D(IFLFI). \quad (96c)$$

B.

Ha adott a kibővített Lorentz-csoport egy ábrázolása, a 6A. szakaszban leírt transzformációkat elvégezhetjük oly módon, hogy csak a korlátozott csoport elemeit vesszük tekintetbe. Itt a kibővített csoportnak csak olyan ábrázolásaival foglalkozunk, melyek esetében, miután bevezettük az impulzusokat, a korlátozott csoport összes ábrázolásai vagy az 1, vagy a 2. osztályba esnek (azaz $P \geq 0$), de nem a 0_0 osztályba. A 6. szakasz eljárását követve meghatározhatjuk a hullámfüggvények egy olyan rendszerét, melyben a korlátozott csoport $D(L)$ operátorai a 6. szakaszban leírt irreducibilis ábrázolások egyikének az operátoraival egyeznek meg. Ezután a $d(F)$ operátort határozzuk meg. Vezessük be a korlátozott csoport egy irreducibilis $D(L)$ ábrázolásához tartozó hullámfüggvények egy teljes ortonormált rendszerét: $\psi_1(p, \zeta)$, $\psi_2(p, \zeta)$, Ekkor

$$D(L)\psi_\mu(p, \zeta) = \sum_\mu D(L)_{\mu\kappa} \psi_\kappa(p, \zeta). \quad (97)$$

A (97) alatt definiált végtelen dimenziós $D(L)_{\mu\kappa}$ mátrixok unitérek és a $D(L)$ operátorok alkotta ábrázolással ekvivalens ábrázolást létesítenek. A $D(L)$ -ek, $d(F)$ természetesen operátorok, a $D(L)_{\mu\kappa}$ -k azonban egy mátrix komponensei, azaz szá-

mok. Képezzük most a $d(F)\psi_1, d(F)\psi_2, d(F)\psi_3, \dots$ hullámfüggvényeket és alkalmazzuk $D(L)$ -t ezekre. A (96a), (97) képletek alapján kapjuk:

$$\begin{aligned} D(L)d(F)\psi_\mu &= d(F)D(FLF)\psi_\mu \\ &= d(F) \sum_\mu D(FLF)_{\mu\kappa} \psi_\mu \\ &= \sum_\mu D(FLF)_{\mu\kappa} d(F)\psi_\mu. \end{aligned} \quad (97a)$$

A $D^\circ(L)_{\mu\kappa} = D(FLF)_{\mu\kappa}$ mátrixok a korlátozott csoport egy ábrázolását létesítik (FLF a korlátozott csoport eleme; automorfizmus útján új ábrázolást nyertünk; lásd 6B. szakasz). Megvizsgáljuk, hogy $D^\circ(L)$ ekvivalens-e $D(L)$ -lel vagy sem. Az eltolás operátora D° -ban

$$T^\circ(a) = d(F)T(a)d(F) = T(Fa), \quad (98)$$

mely (53)-mal együtt azt mutatja, hogy D° -hoz ugyanaz a P érték tartozik, mint magához $D(L)$ -hez. Valóban, ha

$$U_1\varphi(p, \zeta) = \varphi(Fp, \zeta), \quad (99)$$

fennáll: $U_1^{-1} = U_1$ és könnyen kapjuk, hogy $U_1T^\circ(a)U_1 = T(a)$. Hasonlóképpen kapjuk $U_1d^\circ(A)U_1$ számára az

$$\begin{aligned} U_1d^\circ(A)U_1\varphi(p, \zeta) &= U_1d(FAF)U_1\varphi(p, \zeta) = d(FAF)U_1\varphi(Fp, \zeta) = \\ &= \sum_\eta Q(Fp, FAF)_{\zeta\eta} U_1\varphi(FA^{-1}p, \eta) = \sum_\eta Q(Fp, FAF)_{\zeta\eta} \varphi(\Lambda^{-1}p, \eta) \end{aligned} \quad (99a)$$

kifejezést. Eszerint az U_1 segítségével elvégzett hasonlósági transzformáció $T^\circ(a)$ $T(a)$ -ba, $d^\circ(A)$ -t $Q(Fp, FAF)P(\Lambda)$ -ba viszi át. A „kis csoport” ábrázolása $U_1d^\circ(A)U_1$ -ben így

$$q^\circ(\lambda) = Q(Fp_0, F\lambda F).$$

Az utóbbi mátrixot (67a) segítségével számíthatjuk ki:

$$q^\circ(\lambda) = Q(Fp_0, F\lambda F) = q(\alpha(Fp_0)^{-1}F\lambda F\alpha(Fp_0)) = q(\lambda^\circ), \quad (100)$$

ahol λ° az $F\alpha(Fp_0)$ transzformációval kapható meg λ -ból.

A $D^\circ(L)$ és $D(L)$ ábrázolások akkor ekvivalensek, ha $q(\lambda)$ ekvivalens azzal az ábrázolással, amely λ -nak $q(\lambda^\circ)$ -t felelteti meg. Az $\alpha(Fp_0)$ transzformáció a korlátozott csoportnak az az eleme, amely p_0 -t $\alpha(Fp_0)p_0 = Fp_0$ -ba viszi át [vö. (65)]. Ez a transzformáció természetesen nincs egyértelműen meghatározva, de ha $\alpha(Fp_0)$ egy, a legáltalánosabb ilyen transzformáció az $\alpha(Fp_0)\iota$ alakú, ahol $\iota p_0 = p_0$ a kis csoportba tartozó transzformáció. Minthogy $q(\iota^{-1}\alpha(Fp_0)^{-1}\Lambda\alpha(Fp_0)\iota) = q(L)^{-1} \cdot q(\alpha(Fp_0)^{-1}\Lambda\alpha(Fp_0))q(\iota)$, a szabadság, amely $\alpha(Fp_0)$ választásában rendelkezésünkre áll, csupán $q^\circ(\lambda)$ hasonlósági transzformációjának lehetőségét hagyja nyitva, és ez természetesen nem érinti $q^\circ(\lambda)$ és $q(\lambda)$ ekvivalenciáját vagy inekvivalenciáját.

A P_+ esetben p_0 -t úgy választhatjuk, hogy a negyedik tengely irányába essék, komponensei 0, 0, 0, 1 legyenek. Ekkor $Fp_0 = p_0$ és $\alpha(Fp_0) = 1$. A kis csoport a közönséges térbeli elforgatások csoportja és $F\lambda F = \lambda$. Így tehát $q^\circ(\lambda) = q(\lambda)$ és $D^\circ(\Lambda)$ ekvivalens $D(\Lambda)$ -val ebben az esetben. Ugyanez vonatkozik a P_- osztályba tartozó ábrázolásokra.

A 0_+ esetben feltehetjük, hogy p_0 komponensei: 0, 0, 1, 1. Ekkor Fp_0 komponensei: 0, 0, -1, 1. Választhatjuk $\alpha(Fp_0)$ -t a második tengely körül elvégzett π szögű elforgatásnak, és $F\alpha(Fp_0)$ átlós mátrix lesz, melynek átlós elemei: 1, -1, 1, 1; az tehát a második tengely tükrözése. Eszerint ha λ a (70) alatt szereplő transzformáció, $\lambda^\circ = \alpha(Fp_0)^{-1} F \lambda F \alpha(Fp_0)$ az a transzformáció, amelyre

$$\lambda^\circ \begin{pmatrix} x_4 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_4 - x_3 \end{pmatrix} \lambda^{\circ\dagger} = \begin{pmatrix} x'_4 + x'_3 & x'_1 - ix'_2 \\ x'_1 + ix'_2 & x'_4 - x'_3 \end{pmatrix} \quad (101)$$

áll fenn. Nyilvánvaló azonban, hogy $\lambda^\circ = \lambda^*$. A $q^\circ(\lambda)$ operátorokat a $q(\lambda)$ operátorokból eszerint így kapjuk [vö. (71a)]:

$$t^\circ(x, y) = t(x, -y), \quad (101a)$$

$$\delta^\circ(\beta) = \delta(-\beta).$$

A diszkrét s -hez tartozó 0_{+s} ábrázolások esetében $q^\circ(\lambda)$ és $q(\lambda)$ nyilvánvalóan inekvivalensek, minthogy $\delta^\circ(\beta) = (e^{-is\beta})$ és $\delta(\beta) = (e^{is\beta})$; kivételt képez az $s=0$ eset, akkor ekvivalensek. A $0_+(\Xi)$, $0'_+(\Xi)$ ábrázolások esetében $q^\circ(\lambda)$ és $q(\lambda)$ ekvivalensek, az $\eta \rightarrow -\eta$ helyettesítés egyiket a másikba transzformálja. Ugyanez áll a 0_- osztály ábrázolásaira. Ha $D^\circ(L)$ és $D(L)$ ekvivalensek:

$$U^{-1} D^\circ(L) U = D(L), \quad (102)$$

U négyzete minden $D(L)$ -lel kommutál. Ennek folytán U^2 szükségképpen konstans mátrix. Ha nem így volna, jól ismert módon²⁷ idempotens volna képezhető, mely függvénye U^2 -nek és így szintén kommutál $D(L)$ -lel. Az ilyen idempotens a korlátozott csoport $D(L)$ ábrázolásának redukcióját eredményezné. Minthogy az U -ban fellépő konstans szabadon választható, írhatjuk:

$$U^2 = 1. \quad (102a)$$

C.

Visszatérve a (97a) egyenlethez, ha $D^\circ(L) = D(FLF)$ és $D(L)$ ekvivalensek ($P > 0$, vagy 0_+ , 0_- folytonos Ξ mellett, vagy $s=0$), létezik egy $U_{\mu\nu}$ unitér mátrix, mely U -nak felel meg, és amelyre teljesül:

$$\begin{aligned} \sum_\mu D(FLF)_{\mu\mu} U_{\mu\nu} &= \sum_\mu U_{\mu\mu} D(L)_{\mu\nu}, \\ \sum_\mu U_{\mu\mu} U_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (102b)$$

Tekintsük most a

$$\varphi_\nu = \psi_\nu + \sum_\mu U_{\mu\nu} d(F) \psi_\mu \quad (103)$$

függvényeket. Alkalmazzuk ezekre $D(L)$ -t:

$$\begin{aligned} D(L) \varphi_\nu &= D(L) \psi_\nu + \sum_\mu U_{\mu\nu} D(L) d(F) \psi_\mu = D(L) \psi_\nu + \sum_\mu U_{\mu\nu} d(F) D(FLF) \psi_\mu = \\ &= \sum_\mu D(L)_{\mu\nu} \psi_\mu + \sum_{\mu\kappa} U_{\mu\nu} d(F) D(FLF)_{\mu\kappa} \psi_\kappa = \sum_\mu D(L)_{\mu\nu} (\psi_\mu + \sum_\kappa U_{\mu\kappa} d(F) \psi_\kappa) = \\ &= \sum_\mu D(L)_{\mu\nu} \varphi_\mu. \end{aligned} \quad (103a)$$

²⁷ J. von Neumann, Ann. of Math. 32, 191, 1931; ref. 2. 89. old.

Hasonlóképpen

$$d(F)\varphi_v = d(F)\psi_v + \sum_{\mu} U_{\mu v} \psi_{\mu} = \sum_{\mu} U_{\mu v} (\psi_{\mu} + \sum_{\kappa} U_{\kappa \mu} d(F)\psi_{\kappa}) = \sum_{\mu} U_{\mu v} \varphi_{\mu}. \quad (103b)$$

A φ hullámfüggvények eszerint azon ábrázolás szerint transzformálódnak, amelyben $D(L)_{\mu v}$ felel meg L -nek, $U_{\mu v}$ pedig $d(F)$ -nek. Ugyanez vonatkozik a

$$\varphi'_v = \psi_v - \sum_{\mu} U_{\mu v} d(F)\psi_{\mu} \quad (104)$$

hullámfüggvényre is, csak itt $(-U_{\mu v})$ felel meg $d(F)$ -nek. A ψ_v , $d(F)\psi_v$ függvények kifejezhetők φ és φ' segítségével. Ha ψ és $d(F)\psi$ lineárisan függetlenek, φ és φ' is lineárisan függetlenek lesznek. Ha $d(F)\psi$ függvények lineáris kombinációi a ψ -nek, vagy a φ , vagy a φ' függvények eltűnnek.

Gondoljuk el most az L -ek és FL -ek alkotta csoport egy unitér ábrázolását olyan alakban, amely mint az L korlátozott transzformációk ábrázolása teljesen ki van redukálva; a fenti eljárás az L -ek és FL -ek alkotta csoport ábrázolásának kiredukálását fogja eredményezni, hacsak $D(L)$ és $D(FLF)$ ekvivalensek.

Ha $D(L)_{\mu v}$ és $D^{\circ}(L)_{\mu v}$ inekvivalensek, ψ_{κ} és $d(F)\psi_v = \psi'_v$ ortogonálisak. Ez ismét általánosítása a véges unitér ábrázolásokra vonatkozó hasonló szabálynak.²⁸ Ez a következőképpen látható: Vezessük be az $M_{\kappa v} = (\psi_{\kappa}, \psi'_v)$ jelölést. Ekkor

$$\begin{aligned} M_{\kappa v} &= (\psi_{\kappa}, \psi'_v) = (D(L)\psi_{\kappa}, D(L)\psi'_v) \\ &= \sum_{\lambda \mu} D(L)_{\mu \kappa}^* D^{\circ}(L)_{\lambda v} M_{\mu \lambda}; \\ &= D(L)^{\dagger} M D^{\circ}(L). \end{aligned}$$

Eszerint

$$D(L)M = M D^{\circ}(L), \quad M^{\dagger} D(L) = D^{\circ}(L) M^{\dagger} \quad (105)$$

Ezek alapján könnyen megállapítható, hogy MM^{\dagger} kommutál $D(L)$ -lel, $M^{\dagger}M$ pedig $D^{\circ}(L)$ -lel. Így tehát mindkettő konstans mátrix, és ha egyikük sem zérus, M és M^{\dagger} — egy állandótól eltekintve — unitérek. Így tehát $D(L)$ ekvivalens volna $D^{\circ}(L)$ -lel, ellentétben a feltevessel. Ennek folytán $MM^{\dagger}=0$, $M=0$ és a ψ -k ortogonálisak a $d(F)\psi = \psi'$ -kre. Együttvéve a korlátozott Lorentz-csoport és F alkotta csoport ábrázolását szolgáltatják. Ha nem képeznek teljes rendszert, a redukció az előzőkhöz hasonlóan folytatható.

Látjuk tehát, hogy az F operátor bevezetése „megduplázza” azon irreducibilis ábrázolások dimenzióját, amelyek esetében a kis csoport a kétdimenziós forgáscsoport volt; a többi esetben nem növeli meg az ábrázolásban alapul szolgáló lineáris sokaságot. Ez analóg azzal, ami akkor történik, ha a tükrözési operátorokkal magukat a forgáscsoportokat bővítjük ki.²⁹

D.

A $d(I)$ operációk meghatározása ugyanolyan módon történhet, ahogy a $d(F)$ -eket határoztuk meg. Az L -ek és FL -ek alkotta csoport egy irreducibilis ábrázolásának megfelelő ortonormált függvények teljes rendszerét jelölje ψ_1, ψ_2, \dots . Ismét fel-

²⁸ Vö. pl. *E. Wigner*, ref. 4, XII. fejezet.

²⁹ *I. Schur*, Sitz. d. kön. Preuss. Akad. 189. és 297. old. 1924.

tesszük, hogy fennáll (97), habár az ott fellépő $D(L)$ most nem szükségképpen irreducibilis, ha csak a korlátozott csoportot tekintjük, hanem 0_{+s} vagy 0_{-s} és véges s esetén mind s -et, mind $-s$ -et tartalmazza. Írjuk továbbá:

$$d(F)\psi_\kappa = \sum_\mu d(F)_{\mu\kappa}\psi_\mu. \quad (106)$$

Képezzük most a $d(I)\psi_1, d(I)\psi_2, \dots$ függvényeket. A (97a) alatt elvégzett megfontolások azt mutatják, hogy ezek a korlátozott csoport L transzformációi hatására $D(ILI)_{\mu\kappa}$ szerint transzformálódnak:

$$D(L)d(I)\psi_\kappa = \sum_\mu D(ILI)_{\mu\kappa}d(I)\psi_\mu. \quad (106a)$$

Legyen most L tiszta transláció. A (98) alatt elvégzett megfontoláshoz hasonlóan okoskodva azt találjuk, hogy az $L \rightarrow D(ILI)$ ábrázoláshoz tartozó impulzusok előjele a $D(L)$ ábrázolás impulzusaival ellentétes. Ha az utóbbi egy pozitív alosztályba tartozik, az előbbi a megfelelő negatív alosztályba tartozik és megfordítva. Az I transzformáció hozzávétele eszerint az állapotok számának „megduplázódását” eredményezi; a lehetséges állapotok rendszeréhez a „negatív energiájú” állapotok csatlakoznak. Az összes állapotot: $\psi_1, \psi_2, \dots, d(I)\psi_1, d(I)\psi_2, \dots$, oly módon írhatjuk le, hogy bevezetjük a p_1, p_2, p_3, p_4 impulzusokat és p változási tartományát egyedül a $\{p, p\} = P$ feltétellel korlátozzuk anélkül, hogy p_4 számára határozott előjelet kötnénk ki.

Amint korábban láttuk, a $d(I)\psi_1, d(I)\psi_2, \dots$ hullámfüggvények ortogonálisak a hullámfüggvények eredeti ψ_1, ψ_2, \dots rendszerére. A $D(L)$ és $d(F)$ operációk ψ_1 -re, ψ_2 -re, ... való alkalmazásának eredményét (vagyis az L -ekből és az FL -ekből álló csoport ábrázolását) a C. részben adtuk meg. A $D(L)d(I)\psi_\kappa$ függvények kifejezése (106a) alatt látható. Tekintettel $d(I)$ normálására, írható:

$$d(I)d(I)\psi_\kappa = \psi_\kappa. \quad (106b)$$

Ami $d(F)d(I)\psi_\kappa$ -t illeti, két lehetőség áll előttünk, a (95) alatt felírt két lehetőségnek megfelelően. Vagy

$$d(F)d(I)\psi_\kappa = d(I)d(F)\psi_\kappa = \sum_\mu d(F)_{\mu\kappa}d(I)\psi_\mu, \quad (107)$$

vagy

$$d(F)d(I)\psi_\kappa = -d(I)d(F)\psi_\kappa = -\sum_\mu d(F)_{\mu\kappa}d(I)\psi_\mu; \quad (107a)$$

szigorúan véve ily módon két különböző ábrázolást kapunk. A (107) összefüggést kielégítő állapotok rendszerét azonban csak akkor lehetne azoknak az állapotoknak a rendszerétől megkülönböztetni, amelyekre (107a) érvényes, ha valóban elvégezhethetnénk az I transzformáció segítségével való áttérést egy új koordinátarendszerre. Minthogy az a valóságban lehetetlen, a (107) és (107a) képletekkel megkülönböztetett ábrázolások nem ugyanabban az értelemben különböznek, ahogy a korábban leírt ábrázolások különböztek voltak.

Nagymértékben le vagyok kötelezve a Wisconsin Alumni Research Foundation-nak az ezen kutatás elvégzéséhez nyújtott segítségével.

Fordította: Györgyi Géza

Technikai szerkesztő: Turchányi György
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Helle Mária
A kézirat beérkezett: 1972. IV. 6. — Terjedelem: 6,46 (A/5) ív
73-3155 — Szegedi Nyomda

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

Matematikai, fizikai, csillagászati dolgozatokat, referátumokat, könyvismertetéseket, a Tudományos Minősítő Bizottságnak a III. Osztályra vonatkozó híreit s a III. Osztály híreit közli. Évenként egy kötet (kb. 40 ív) jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

A Közlemények előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 60 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488, külföldi megrendelések a „Kultúra”

Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,
1011 Budapest I., Fő utca 32.

(Pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990 útján eszközölhetők.)

Ára: 10,— Ft

Előfizetés kötetenként: 48,— Ft

INDEX: 26491

TARTALOMJEGYZÉK

	oldal
<i>Tarján Imre</i> : Egykristályok előállítása	1

KLASSZIKUS IRODALOM

<i>Wigner Jenő</i> : Az inhomogén Lorentz-csoport unitér ábrázolásairól	21
---	----

30 7226

2

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

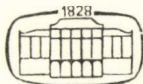
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR,
PÁL LÉNÁRD ÉS SZALAY SÁNDOR
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI
JÁNOSSY LAJOS

XXI. KÖTET

2. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST 1973

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klasszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10–10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóirattól évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Jánossy Lajos akadémikus
1121 Budapest XII. Konkoly Thege út
Központi Fizikai Kutató Intézet

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 48 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, 1011 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmi ismertetőt írnak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közölnék. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írnak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

REKOMBINÁCIÓS FOLYAMATOK SZILÍCIUM ALAPÚ MOS SZERKEZETEK BEN*

DONG VAN THANH**, LŐRINCZY ANDRÁS, PATAKI GYÖRGY***

MTA Műszaki Fizikai Kutató Intézete, Budapest

1. Bevezetés

Az 1950-es évek elején vetette fel *W. Shockley* a tranzisztor Nobel-díjas felfedezője azt a gondolatot, hogy félvezető anyagban külső térelektródák segítségével vezetés-moduláció valósítható meg és így megfelelő elrendezés esetén tranzisztor-hatás érhető el. Sajnos, a félvezetők felületi állapotainak káros hatása megakadályozta az elv közvetlen megvalósítását és csak később az oxidált szilícium felület, pontosabban oxid-félvezető határreteg tulajdonságai bizonyultak megfelelőnek az elv gyakorlati kivitelezéséhez. Ezzel azonban a félvezető technológia új szakaszába lépett: egyre szélesebb területen találkozunk az ún. MOS, MIS szerkezetek alkalmazásával, kutatásával. Az oxidált vagy szigetelővel bevont félvezetőhöz fém kontaktust helyezve, kialakul a Metal-Oxide-Semiconductor (MOS), vagy Metal-Insulator-Semiconductor (MIS) struktúra, amely a jelenlegi integrált áramkör technológia alapját képezi.

A MOS dióda a legegyszerűbb olyan elrendezés, amelyben az oxidált félvezető, általában szilícium, tulajdonságai szisztematikusan vizsgálhatók.

A vizsgálati módszerek és a legfontosabb fizikai eredmények természetesen egyéb MIS szerkezetek vizsgálatára is felhasználhatók.

A továbbiakban egyszerűség végett, mindig termikusan oxidált szilíciumból készült MOS szerkezetekre fogunk gondolni. A vonatkozó, egyre gyarapodó irodalom tematikáját elemezve, a következő területek kaptak különös figyelmet:

- a) a fémzés hatása a MOS szerkezetekre,
- b) az oxid tulajdonságai; az oxidban levő lokalizált és mozgó töltések vizsgálata,
- c) az oxid és félvezető határreteg tulajdonságai,
- d) az oxid alatt, a félvezetőben lejátszódó fizikai (fizikai-kémiai) folyamatok vizsgálata.

Bármelyik területet is választjuk, ma már többszáz dolgozat foglalkozik a kérdés technológiai és fizikai vonatkozásával. A jelen munkában a kisebbségi töltéshordozók szerepét vizsgáljuk, amely a dinamikus üzemmódban működő MOS szerkezetek (kapcsolók) elterjedése miatt vált aktuálissá. Ezt azért célszerű hangsúlyozni, mivel a MOS tranzisztor unipoláris eszköz és így ezekben a kisebbségi töltéshordozók szerepe a szokásos feltételek mellett nem lényeges. Ha azonban egy MOS diódára olyan irányú impulzus-feszültséget kapcsolunk, hogy inverziós réteg alakuljon ki, vagy fordítva, az inverziós réteg megszűnésének ideje fontos, akkor szembe

* Dong van Thanh 1971. októberében benyújtott kandidátusi értékezése felhasználásával készült.

** Jelenlegi címe: Vietbac Pedagógiai Egyetem, Thai-Nguyen.

*** Jelenlegi címe: Távközlési Kutató Intézet, Budapest.

találjuk magunkat a határréteg, ill. a határréteg alatti tartomány rekombinációs folyamatainak problémájával.

A MOS szerkezetek nem-egyensúlyi viselkedésével csak 1966-tól kezdtek foglalkozni Zerbst [1] és Heiman [2] munkái nyomán. Zerbst és Heiman módszerénél egy ugrásfeszültség hatására bekövetkező kapacitásváltozást kell vizsgálni és e folyamat T karakterisztikus idejének méréséből ki lehet számítani a kisebbségi töltéshordozók T-nél sokkal kisebb τ térfogati élettartamát és a $C(t)$ görbe grafikus kiértékeléséből a Si-SiO₂ határréteg S felületi rekombinációs sebességet. Ebből a rövid leírásból is kitűnik, hogy a módszer alkalmazása feltételezi, hogy az ún. impulzus üzemi C₀—U karakterisztika bármely pontját be tudjuk állítani és vizsgálni lehessen a C₀→C átmenet időbeli lefutását, ahol a C értéket a szokásos C—U görbe megfelelő pontja adja. A MOS diódák tranziens viselkedésével kapcsolatos eredményeink leírása előtt röviden kitérünk a töltéshordozók rekombinációjának és a MOS szerkezetek fizikai jellemzésének ismertetésére is.

Ezután a tranziens viselkedés vizsgálata terén eddig megjelent dolgozatok kritikai ismertetése következik, majd saját vizsgálati berendezésünket és a kapott mérési eredményeinket közöljük. Végül az eredmények interpretálásával és diszkussziójával foglalkozunk.

2. A rekombináció fenomenologikus leírása

Ismeretes, hogy a nem túlságosan nagy tilos-sávú félvezetőkben, pl. Si-ban, Ge-ban stb. szobahőmérsékleten a külső zavar, pl. megvilágítás megszűnte után az egyensúlyi állapot viszonylag gyorsan helyreáll. Ez azt jelenti többek között, hogy ebben az esetben az

$$n_0 p_0 = n_i^2$$

összefüggés érvényes, ahol n_i az intrinszc koncentráció, n_0 és p_0 a vezetési sávban levő szabad elektronoknak és a valencia sávban levő szabad lyukaknak az egyensúlyi állapotra vonatkozó koncentrációja. Azonban külső zavar (pl. megvilágítás), vagy egy p—n átmenet injekciója hatására a vizsgált rendszer kikerül az egyensúlyi állapotból. Ilyenkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(n_0 + \Delta n)(p_0 + \Delta p) \neq n_i^2$$

ahol Δn és Δp az ún. többlet koncentrációk. Ilyen esettel igen gyakran találkozunk félvezető eszközök működésénél. Az egyensúlyi állapotban a Fermi—Dirac-eloszlás

$$f_0 = \left[1 + \exp \left(\frac{E_k + E_{F0}}{kT} \right) \right]^{-1} \quad (1)$$

ahol E_{F0} a Fermi-nívó, E_k a vizsgált energia-nívó. A nem-egyensúlyi állapotban nem alkalmazhatjuk ezt a kifejezést. Be kell vezetni az adott állapotra és nívóra jellemző ún. kvázi Fermi-nívót, E_{FK} -t. A vezetési, illetve a valencia sávban a töltéshordozók Boltzmann-eloszlása a következő:

Egyensúlyi állapotban:

$$n_0 = N_c \exp \left(-\frac{E_0 - E_{F0}}{kT} \right); \quad p_0 = N_v \exp \left(-\frac{E_{F0} - E_v}{kT} \right) \quad (2)$$

Nem-egyensúlyi állapotban:

$$n = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_{Fn}}{kT}\right); \quad p = N_v \exp\left(-\frac{E_{Fp} - E_v}{kT}\right) \quad (3)$$

és csak egyensúlyban érvényes, hogy

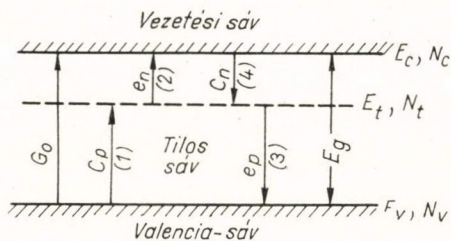
$$E_{Fn} = E_{Fp} = E_{F0}.$$

A termodinamika tételei mutatják, hogy az egyensúlyi állapottól eltérő rendszerek mindig igyekeznek visszatérni az egyensúlyi állapothoz. Létezik tehát az ún. generációs folyamattal ellenkező folyamat is, amely nem a Δn és Δp növekedését, hanem csökkenését okozza. Az ilyen folyamatot nevezik rekombinációnak, amelyet karakterisztikus időkkal, élettartamokkal jellemeznek. Ismeretes, hogy a töltéshordozók élettartama (τ_n , ill. τ_p) a félvezető eszközök egyik legfontosabb paramétere. Ezen felül a rekombináció elmélete [3]—[7] mutatja, hogy a töltéshordozók élettartamának mérése segítségével, megfelelő kísérleti feltételek mellett meg lehet határozni a tilos sávban elhelyezkedő csapdák (rekombinációs centrumok) helyét is. A rekombinációs centrumok jellemző paramétereinek mérési és számítási módszereit különböző konkrét kísérleti feltételek mellett dolgozták ki. A [8] dolgozat az élettartam 29 mérési módszerét mutatja be. A gyakorlatban csak néhány módszert szokás használni, pl. a foto-magneto-elektromos módszert (PEM), a fotovezetés lecsengésének módszerét stb. A jelen dolgozatban az időben változó MOS kapacitás mérését fogjuk használni. A generációt és a rekombinációt leíró dinamikai egyenletek felírása *W. Shockley* nevéhez fűződik [3]. Ezeket megoldhatjuk *Shockley* módszere segítségével, a stacionaritás feltételezése mellett; a lineáris differenciálegyenlet-rendszereknél használható matematikai módszerek segítségével [6]; vagy, ha a nemlineáris tagok lényeges járulékot adnak, numerikus módszerekkel. Mint látni fogjuk, a MOS-kapacitás időbeli változásának vizsgálatánál az egyenletek linearizálása általában nem megengedhető.

3. A generáció-rekombináció dinamikai egyenletei

A rekombináció jelenségének két típusát szokás megkülönböztetni. Az egyik a direkt rekombináció: az elektron egy lépésben megy át a vezetési-sávból a valencia-sávba; a másik pedig az ún. rekombinációs centrumokon keresztül végbe-menő rekombináció: az elektront először egy rekombinációs centrum fogja be, utána ebből az állapotból megy le a valencia-sávba. Ez utóbbi lépést úgy is lehet tekinteni, hogy a rekombinációs centrum nemcsak az elektront tudja befogni, hanem a lyukakat is. A korábbi kísérletek megmutatták, hogy a nem túlságosan kis tilos-sávú félvezetőknl pl. Si-nál és Ge-nál a direkt rekombináció nem játszik fontos szerepet. Ezért feltételezték, hogy ilyen anyagoknál a rekombináció a tilos-sávban elhelyezkedő ún. rekombinációs centrumokon keresztül megy végbe. Ez a felismerés *W. Shockley* és *W. T. Read* [3], illetve *R. N. Hall* [2] nevéhez fűződik és ezt nevezzük S—R—H modellnek. Ha ennek alapján számoljuk az élettartamot, akkor a fenti anyagoknál a kísérletekkel igen jól egyező értéket kapunk. A következőkben ismertetjük a rekombináció elméletének ezt az alapvető modelljét. Mindenekelőtt vizs-

gáljuk meg az S—R—H modellre vonatkozó átmeneteket. Az 1. ábrán a (4) és (1) nyilak az elektronok és lyukak rekombinációját, a (2) és (3) nyilak az elektronok és a lyukak termikus generációját jellemzik. Nyilvánvaló, hogy a (4) és (1) átmenetekre vonatkozó ún. befogási sebességeket a következő alakban kapjuk:



1. ábra. A Shockley-Read-Hall modell

amikor a centrumok N_t koncentrációja elég kicsiny. A (4) egyenletek mutatják, hogy a befogás sebessége (R_n , R_p) arányos a szabad töltéshordozóknak és az adott töltéshordozókra nézve üres centrumok koncentrációjával.

Az elektromos semlegesség és az $N_t = n_t + p_t$ feltételek alapján könnyen felírhatjuk, hogy

$$\Delta n + \Delta n_t = \Delta p \quad (5)$$

$$\Delta n_t + \Delta p_t = 0$$

A n_t és p_t explicit kifejezései:

$$n_t = N_t f_t; \quad p_t = N_t (1 - f_t)$$

ahol az egyensúlyi állapotban

$$f_{t0} = \left[1 + \exp \left(\frac{E_t - E_{F0}}{kT} \right) \right]^{-1}$$

A jelen dolgozatban úgy választjuk az energia zérus pontját, hogy $E_i \equiv 0$ (intrinsic Fermi-nívó), ezért az egyensúlyi Fermi-nívót meghatározó összefüggés n -típusú anyagnál a következő alakú lesz:

$$E_{F0} = kT \ln (N_D / n_i)$$

ahol

$$N_D = N_D^+$$

mivel feltételezzük, hogy az adalék atomok mindig teljesen ionizáltak. Hasonló kifejezés érvényes p -típusú anyagra is.

Ha az elektronok és lyukak spontán generációját g_n -nel és g_p -vel jelöljük, akkor a (2) és (3) átmenetekre vonatkozó egyenlőségekre írhatjuk:

$$g_n = e_n n_t; \quad g_p = e_p p_t \quad (6)$$

ahol e_n és e_p a termikus generációt jellemző két konstans. Az elektronok és lyukak

időbeli változása két részből áll. Egyrészt a külső generációból, másrészt a befogásból és a termikus emisszióból:

$$\frac{dn}{dt} = -(R_n - g_n) + G_0 = -U_{cn} + G_0 \quad (7)$$

$$\frac{dp}{dt} = -(R_p - g_p) + G_0 = -U_{cp} + G_0 \quad (8)$$

ahol

$$U_{cn} = C_n n p_t - e_n n_t; \quad U_{cp} = C_p p n_t - e_p p_t.$$

Az U_{cn} -t és U_{cp} -t nevezzük tiszta befogási sebességnek. Az e_n és e_p a (7) és (8) egyenletekből határozhatók meg, ha azokat az egyensúlyi állapotra alkalmazzuk:

$$e_n = C_n n_1; \quad e_p = C_p p_1$$

és

$$n_1 = n_i \exp\left(\frac{E_t}{kT}\right); \quad p_1 = n_i \exp\left(-\frac{E_t}{kT}\right) \quad (9)$$

Most a (7) és (8) egyenletek a következő alakra hozhatók:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{1}{\tau_{n0}} [n(1-f_t) - n_1 f_t] + G_0 \quad (7')$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\tau_{p0}} [p f_t - p_1(1-f_t)] + G_0 \quad (8')$$

ahol

$$\tau_{n0} = 1/C_n N_t; \quad \tau_{p0} = 1/C_p N_t.$$

A (7)–(8)-at, vagy (7')–(8')-rendszer nevezük a generáció-rekombináció dinamikai egyenleteinek. Ezt megoldhatjuk az (5) mellékfeltételek segítségével, akár stationer állapotban, akár tranziens esetre. A nem-egyensúlyi stationer állapotban az elektronok „tiszta” befogási sebessége egyenlő a lyukakéval, azaz (l. pl. [5], [9]):

$$U = U_{cn} = U_{cp} = (np - n_i^2) [(n + n_1) \tau_{p0} + (p + p_1) \tau_{n0}]^{-1} \quad (10)$$

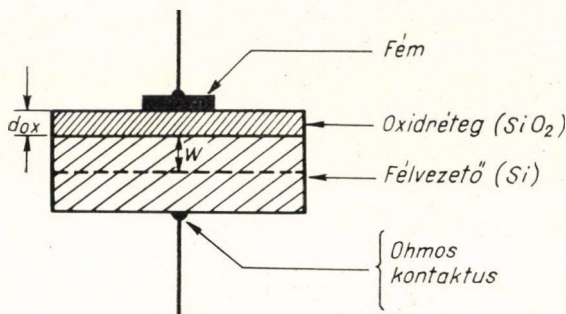
és az élettartamok meghatározása a következő definíció alapján történik

$$\tau_n = \frac{\Delta n}{U}; \quad \tau_p = \frac{\Delta p}{U}. \quad (11)$$

Mielőtt a rekombinációs folyamatoknak a fentebb idézett elméletét MOS szerkezetekre alkalmaznánk, röviden ismertetni kell azokat a fontosabb fizikai paramétereket, amelyekkel pl. egy MOS dióda egyszerűen jellemezhető.

4. A MOS szerkezetek alapvető fizikai jellemzői

A MOS szerkezetek megjelenésével lezártnak lehet tekinteni a klasszikus felületi fizikát és helyébe a határrétegek fizikája lépett. Természetes azonban az, hogy a félvezetők felületi fizikájának alapvető eredményei felhasználásra kerülnek és az új terület az előzőhöz hasonló mennyiségeket használ.



2. ábra. A MOS szerkezet

A leghasznosabb, mérésel könnyen hozzáférhető mennyiség a MOS szerkezetek kapacitása C , mely erősen függ a félvezető felületi potenciáljának értékétől, azaz a külső feszültségtől. Pontosabban a C két részből tevődik össze, egyrészt az oxidkapacitásból (C_{ox}), másrészt a félvezető elszegényedési rétegének tértöltési (space charge) kapacitásából (C_{sp}). Ideális esetben csak az

utóbbi függ a külső feszültségtől. A fenti C kapacitás sztatikus és időbeli változásának vizsgálatából számos értékes információ nyerhető az oxid, a határréteg és a tértöltési tartomány tulajdonságaira vonatkozóan.

A MOS szerkezet 3 különböző anyagból áll, mint azt a 2. ábrán láthatjuk.

- A fém, amely az esetünkben nikkel (Ni), vagy platina (Pt), felülete $A = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2$.
- Az oxid réteg, kísérleteinkben termikus oxidálásból származott. Ennek vastagsága (d_{ox}) 500 Å és 2000 Å között szokott lenni. Esetünkben $d_{ox} = 1000 \text{ Å}$.
- A félvezető, esetünkben mind n-Si, mind p-Si volt. A MOS szerkezet ezen része 2 tartományból áll, egyik a tértöltési tartomány, ennek vastagsága W , a másik a semleges tartomány, ennek vastagsága lényegében megegyezik a használt félvezető lapok vastagságával.

Az alábbiakban néhány gyakran használt fizikai mennyiség definícióját adjuk meg. A kilépési munka az az energia, amely szükséges ahhoz, hogy a fémbe vagy a félvezető belsejében levő elektron ki tudjon lépni a vákuumba. MOS szerkezet esetén a kilépési munkát az egyensúlyi állapotra vonatkozó Fermi-nívótól szokás számolni az oxid vezetési sávjának határáig. Ezt a fémre vonatkozóan W_m -mel és a félvezetőre nézve W_f -el jelöljük. Dimenziójuk eV. Míg a megfelelő potenciálok: $\Phi_m = -W_m/q$; $\Phi_f = -W_f/q$. Használják még az elektron affinitás fogalmát $\chi[\text{eV}]$, vagy $\Phi_\chi[\text{V}]$, ha potenciál dimenziójú mennyiségről van szó. Ez a mennyiség a félvezető vezetési sáv alsó határától a vákuumig terjedő (energia) különbséget jelöli. A fém és félvezető közötti kilépési munka különbséget úgy számoljuk ki, hogy a fém kilépési munkájából a félvezetőét kivonjuk. Az előzőek alapján a következő összefüggéseket kapjuk:

$$W_{mf} = W_m - W_f; \quad \Phi_{mf} = \Phi_m - \Phi_f$$

Innen látjuk, hogy ha $\Phi_{mf} > 0$, akkor a MOS szerkezetben az energia sávok felfelé hajlanak. Ilyen esetben, ha p-típusú anyagról van szó és a MOS szerkezetre kapcsolt feszültség $U_G = 0$, akkor a félvezető felületén akkumulációs réteget kapunk. Ha

$U_G \neq 0$, akkor a helyzet bonyolultabb lesz. Viszont, ha $\Phi_{mf} < 0$, akkor elszegényedési réteget kapunk. Hasonló érvényes n-típusú anyagnál is, az előjelek értelemszerű megváltoztatásával.

A potenciálok előjelének meghatározása. A potenciálok előjele az energiaskála kezdeti pontjának kiválasztásától függ.

Mivel az energiák és potenciálok között az alábbi kapcsolat van:

$$\Phi_K = -E_K/|q|$$

ahol $|q|$ az elemi töltés abszolút értéke és E_K valamely energianívó, ezért nyilvánvaló, hogy ha $E_K > 0$, akkor $\Phi_K < 0$ és fordítva. Az energia zérus pontjának korábbi megválasztása miatt az E_i felett levő energianívókra vonatkozó minden potenciál negatív ($\Phi_K < 0$), s fordítva az E_i alatt levő energianívókra vonatkozó minden potenciál pozitív ($\Phi_K > 0$).

Ezenkívül figyelembe kell venni azt is, hogy a meghajlott vezetési sáv aljára és a meghajlott valencia-sáv tetejére vonatkozó potenciáloknak mindig egyforma előjele van. Ezt elektrosztatikus potenciálnak nevezik (jelölése: $\Phi(x)$). Nyilvánvaló, hogy maximális értékét a felületen veszi fel (Φ_s).

Előjelét úgy határozzuk meg, hogy felfelé hajlás esetében negatív, lefelé hajlás esetében pedig pozitív. Más szóval, ha az elektront akadályozza a potenciálfal, akkor az elektrosztatikus potenciál negatív, viszont, ha a lyukat akadályozza, akkor ez pozitív. Ez megegyezik a felületi potenciálra vonatkozó előjel-konvencióval.

A fentiek figyelembevételével a 3. ábrán bemutatjuk azt az ideális esetet, amikor $\Phi_{mf} = 0$, de a MOS szerkezetre feszültséget $U_G > 0$ kapcsolunk. Az ábra p-típusú anyagra vonatkozik. A MOS szerkezet különböző tartományai közötti potenciál-eloszlást könnyen fel lehet írni arra az esetre is, amikor $\Phi_{mf} \neq 0$ és $U_G \neq 0$.

A külső feszültségre nyilván írhatjuk

$$\begin{aligned} U_G &= V_{ox} + \Phi_s + \Phi_{mf} \quad (p\text{-típus}) \\ U_G &= V_{ox} + \Phi_s - \Phi_{mf} \quad (n\text{-típus}) \end{aligned} \quad (12)$$

ahol az oxidon eső feszültség:

$$V_{ox} = Q_m/C_{ox} = (Q_{sp} + Q_{ss})/C_{ox} \quad (13)$$

és mint látni fogjuk, a Poisson-egyenlet Φ_s -re a következő kifejezést adja

$$\Phi_s = \frac{qN_{A,D}W_{d0}^2}{2\epsilon_0\epsilon_{si}}$$

ahol W_{d0} az ún. elszegényedési réteg vastagsága egyensúlyban, $\epsilon_0\epsilon_{si} = 1,062 \cdot 10^{-12} \text{ F cm}^{-1}$, $N_{A,D}$ az akceptor, ill. donor koncentrációt jelöli.

Az U_G külső feszültség hatására a félvezetőben levő mozgó töltéshordozók átrendeződnek. Most röviden ismertetjük a kísérletileg is könnyen megfigyelhető három esetet. Akkor nevezzük a felületközeli réteget *akkumulációs rétegnek*, ha ott a többségi töltéshordozók feldúsulása ment végbe. Ilyen esetet kapunk, ha p-Si-nál $U_G < 0$, vagy $U_G > 0$ n-típusú anyagnál.

Ha az U_G feszültség hatására a többségi töltéshordozókat a felülethez közeli tartományból eltaszítjuk a térfogatba, akkor a felületnél *kialakul az elszegényedési réteg*: p-típusú anyagnál $U_G > 0$ esetében kapjuk, míg n-típusú félvezetőnél $U_G < 0$

kell hogy legyen. Természetesen csak addig beszélhetünk elszegényedésről, amíg a többségi töltéshordozók koncentrációja nagyobb marad az n_i intrinsic koncentrációnál. Ez korlátozza az U_G nagyságát.

Ha az U_G értékét az előbbi határ fölé emeljük, akkor a felület közvetlen közelében a kisebbségi töltéshordozók jutnak túlsúlyba és *kialakul az inverziós réteg*. Az inverziós réteg és a félvezető homogén térfogati tartománya között egy kiürült réteg van (hasonlóan a p-n átmenethez), amelynek vastagsága a maximális értékét elérve nem változik.

5. A MOS szerkezet fontosabb jellemzőinek kvantitatív leírása

a) Az össztöltés meghatározása

Ebben a pontban felírjuk a felületi potenciál és felületi töltés, illetve az elektromos tér és felületi potenciál közötti összefüggéseket (l. 3. ábra). Tudjuk, hogy a tértöltési tartományban $\varrho(x) \neq 0$. Ha ezt a függvényt integráljuk mindazon tartományban, ahol a $\varrho(x)$ változik, akkor megkapjuk a felületegységre vonatkozó össztöltést. Ez a következő alakú lesz:

$$Q_{sp} = \int_0^{\infty} \varrho(x) dx \quad (14)$$

amelynek dimenziója [Asec cm^{-2}]. Másrészt, $\varrho(x)$ és a sztatikus potenciál között a Poisson-egyenleten keresztül van kapcsolat:

$$\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = -\frac{\varrho(x)}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \quad (15)$$

Ha a (14) integrálba behelyettesítjük a (15) képletet, akkor láthatjuk, hogy a felületi töltés és a felületi potenciál között egyértelmű kapcsolat van. Azonban (14)-et csak akkor tudjuk kiszámítani, ha a $\varrho(x)$ konkrét alakját ismerjük. Mint ismeretes [5] n-típusú anyagnál:

$$\varrho(x) = -|q| [n(x) + N_A - N_D] \quad (15')$$

ahol $N_D \gg N_A$ vagy $N_A \equiv 0$.

Nem elfajult félvezetőnél:

$$p(x) = p_B \exp(-\beta\Phi) = n_i \exp[\beta(\Phi_{Fp} - \Phi)] \quad (16)$$

$$n(x) = n_B \exp(\beta\Phi) = n_i \exp[\beta(\Phi - \Phi_{Fn})] \quad (16')$$

ahol $\beta = q/kT$ és $n_i = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ szobahőmérsékleten; $q\Phi_{Fp}$ és $q\Phi_{Fn}$ a lyukak és elektronok kvázi Fermi-nívója. A $\Phi(x)$ meghatározása most már elvégezhető.

Az n-típusú anyagnál a behelyettesítés után jó közelítésben $\Phi(x)$ -re adódik (egyensúlyban):

$$\Phi(x) = \Phi_s \left(1 - \frac{x}{W_{d0}} \right)^2 \quad (17)$$

ahol

$$\Phi_s = \frac{qN_D W_{d0}^2}{2\epsilon_0 \epsilon_{si}} \quad (17')$$

E levezetésnél az integrációs állandókat a $\Phi(W_{d0})=0$ és $\left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_{W_{d0}} = 0$ feltételből határoztuk meg. Bevezetve a $W = W_{d0} - x$ új változót, végeredményben kapjuk:

$$\Phi(W) = \frac{qN_D W^2}{2\epsilon_0 \epsilon_{si}} \quad (17'')$$

Ez azt mutatja, hogy ha $W=0$, akkor $\Phi(0)=\varrho(0)=0$. Ezt a tartományt nevezzük semleges tartománynak. Teljesen hasonló számítás érvényes p-típusú anyagra. A fentiek alapján nem nehéz felírni Q_{sp} -t. Az egyszerűség kedvéért az egyensúlyi kifejezést adjuk meg, amikor is $\Phi_{Fn} = \Phi_{Fp} = \Phi_{F0}$. A (14) definíció, valamint (16) egyenletek alapján, némi számolás után kapjuk az egyensúlyra vonatkozó Q_{sp}^* értéket

$$Q_{sp}^* = \pm qn_i L_i [\lambda(e^{-y_s} - 1) + \lambda^{-1}(e^{y_s} - 1) + (\lambda - \lambda^{-1}) y_s]^{1/2} \quad (18)$$

ahol az $y_s = \beta \Phi_s$ -re vonatkozó előjel konvenciót figyelembe véve, a $+$ előjel veendő, ha $y_s < 0$ és a $-$ előjel, ha $y_s > 0$. A (18)-ban szereplő $L_i = \left(\frac{2\epsilon_0 \epsilon_i}{qn_i \beta} \right)^{1/2}$ az ún. intrinszc Debye hosszúság. $\lambda = N_A/n_i$ p-típusú anyagnál és $\lambda = n_i/N_D$ n-típusú anyagnál. Ezt a kifejezést Linder [10] és Whelan [11] vizsgálták részletesen. Ezzel a tértöltési tartomány ösztöltése és a (dimenziótlan) felületi potenciál, y_s között a kapcsolat ismert.

b) A MOS szerkezet kapacitása

Q_m -mel jelölve a fém elektródán levő összes töltést a MOS szerkezet kapacitásának definíciója [12]:

$$C_A = \pm \frac{dQ_m}{dU_G} \quad (19)$$

(+) p-típusú, (−) n-típusú esetben és a Gauss-tétel alapján

$$Q_m + Q_{ss} + Q_{sp} = 0 \quad (20)$$

$$\pm Q_m = C_{ox} V_{ox} \quad (20')$$

ahol (+) p-típusú, (−) n-típusú anyag esetében.

A (12) egyenletek alapján további összefüggést találhatunk a dU_G , dV_{ox} és $d\Phi_s$ között, amely mind a p-típusú, mind az n-típusú anyag esetén a következő alakú lesz:

$$dU_G = dV_{ox} + d\Phi_s \quad (21)$$

A (19) és (20') alapján:

$$C_A = \left[\left(\frac{dQ_m}{dV_{ox}} \right)^{-1} + \left(\frac{dQ_m}{d\Phi_s} \right)^{-1} \right]^{-1}$$

A (20) és (20') segítségével kapjuk, hogy

$$C_A = [C_{ox}^{-1} + (C_{ss} + C_{sp})^{-1}]^{-1} \quad (22)$$

ahol a következő definíciókat használtuk fel

$$C_{ss} = \pm \frac{dQ_{ss}}{d\Phi_s} \quad (22')$$

$$C_{sp} = \pm \frac{dQ_{sp}}{d\Phi_s} \quad (22'')$$

(-) p-típusú, (+) n-típusú anyagnál. Továbbá, ha feltételezzük, hogy $(dQ_{ss}/d\Phi_s)=0$, ami azt jelenti, hogy a felületi állapotokban levő Q_{ss} töltés nem függ a Φ_s -től, akkor a MOS szerkezet kapacitása a C_{ox} és C_{sp} kapacitások soros eredője lesz, azaz:

$$C_A = \frac{C_{ox} C_{sp}}{C_{ox} + C_{sp}} \quad (23)$$

Így a C_A dimenziója [pF cm^{-2}] lesz, mivel a C_{ox} definíciója szerint

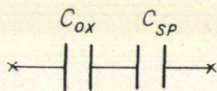
$$C_{ox} = \epsilon_0 \epsilon_{ox} / d_{ox} \quad (24)$$

ahol $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-14} \text{ F cm}^{-1}$ és termikus oxid esetén $\epsilon_{ox} = 4$, d_{ox} dimenziója [cm]. Be lehet látni, hogy jó közelítésben*

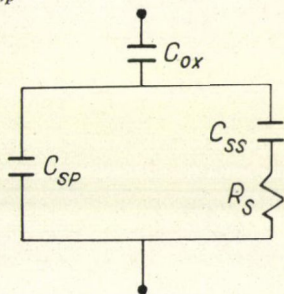
$$C_{sp} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{si}}{W} \quad (25)$$

ahol $\epsilon_{si} = 12$. A kísérlet azonban a kapacitás értékét pF egységben adja. Ezért a kapacitás formuláját a következő alakban célszerű írni:

$$C = \frac{AC_{ox} C_{sp}}{C_{ox} + C_{sp}} \quad (23')$$



4. ábra. A MOS szerkezet kapacitása felületi állapotok nélkül



5. ábra. A MOS szerkezet ekvivalens köre

ahol A a fém elektróda felülete [cm^2]. Innen láthatjuk, hogy a C kísérleti értékének a segítségével ki fogjuk tudni számolni $W(t)$ -t az adott külső feszültségnél. Ilyen feladatnál pontosan kell tudni az A értékét és az oxidréteg vastagságát (d_{ox}). A (23)-ból, illetve a (23')-ből látjuk, hogy C a C_{ox} és C_{sp} kapacitások soros eredője (4. ábra).

Ha a felületi állapotok hatását is figyelembe vesszük, akkor a (22) alapján kapjuk a MOS szerkezet ekvivalens körét (l. 5. ábra). A szereplő R_{ss} , C_{ss} a rekombiná-

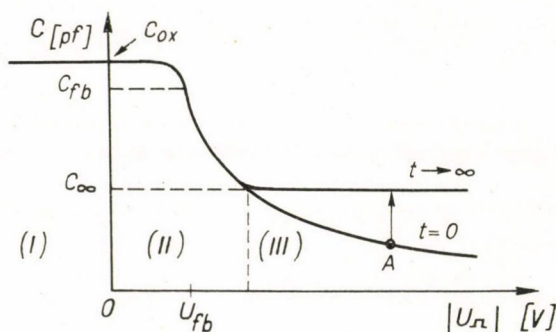
* A levezetésnél akár az egyensúlyra, akár a nem-egyensúlyra vonatkozó Q_{sp} -ból és a (22'') definícióból indulunk ki, a (25) kifejezés levezethető.

ciós folyamat ekvivalens ellenállása és kapacitása. Konkrét alakjukat adott rekombinációs modell esetére ki lehet számolni. SRH modellnél a számolást a [13] dolgozatban végezték el.

A (23')-ban csak a C_{sp} változik időben az ugrásfeszültség hatására, az elszegényedési réteg W vastagságának megfelelően. Jelöljük $C_{sp}(t)$ kezdeti és végállapotbeli értékét C_{sp0} , ill. $C_{sp\infty}$ -nel. A feladat a $C_{sp}(W)$ függvény meghatározása, mert mint látni fogjuk később, $C_{sp}(W)$ -re vonatkozó differenciálegyenletet lehet közvetlenül felírni.

c) A nagyfrekvenciás $C-U$ karakterisztika tulajdonságai

A kísérletekből ismeretes [13], [14], hogy alacsony frekvenciás jel esetén a kisebbségi töltéshordozók követni tudják a jel változását, míg nagyfrekvenciás jel esetén erre nem képesek. Ezért, a kísérletekben, a MOS szerkezet $C-U$ karakterisztikájának két különböző alakját lehet megfigyelni. A jelen dolgozatban csak a nagyfrekvenciás $C-U$ karakterisztikát vizsgáljuk.



6. ábra. A MOS szerkezet nagyfrekvenciás $C-U$ karakterisztikái

A 6. ábra mutatja az egyensúlyi állapotra vonatkozó és a $t=0$ -hoz tartozó alakot. Az ábrán feltüntettük a $C-U$ karakterisztika jellegzetes tartományait, valamint a „sík-sáv”, flat-band pontot.

Az I. tartományban a többségi töltéshordozók a határfelületen feldúsulnak és a MOS dióda kapacitása állandó, megegyezik az oxid kapacitással. Itt a kapacitás-

mérésekből nem tudunk meghatározni a félvezetőre és a határrétegre vonatkozó jellemző adatokat.

A II. tartományban a félvezetőben kiszélesedik a térkitöltési tartomány, amely a kapacitás csökkenéséhez vezet. Ennek a csökkenésnek a lefutását az ionizált donor (ill. akceptor) atomokon kívül a felületi állapotok is befolyásolhatják.

A III. tartományban a kisebbségi töltéshordozók felhalmozódása következtében egy inverziós réteg alakul ki. Mivel ez a vékony, de nagy koncentrációjú réteg leárnyékolja a félvezetőbe behatoló elektromos teret, az előbb említett tértöltési réteg és ezzel a kapacitás is állandó marad.

Ha a fém és a félvezető közötti feszültséget olyan hirtelen változtatjuk meg, hogy sem a határfelületi állapotok nem képesek áttöltődni, sem az inverziós réteg nem tud kialakulni, akkor a kapacitás-feszültség görbének egy többlet esése alakul ki, állandóan csökkenő kapacitással, hasonlóan egy p-n átmenet záróirányú kapacitásának viselkedéséhez [15].

A feszültségváltozás sebességétől függően különböző, a két szélső görbe közötti görbesereget kapunk. A relaxációs vizsgálatokhoz az a legcélszerűbb, ha ugrásszerű feszültségváltozással az alsó görbe egy pontját állítjuk be. Ekkor állandó feszültség esetén a 6. ábrán vázoltak szerint a kapacitás az egyensúlyi állapot görbéjéig nő

egy bizonyos idő alatt. Jelen dolgozat alapvető célja éppen ennek az átmenetnek a vizsgálata, a rekombinációs folyamatok megismerése céljából.

Befejezésül célszerű expliciten is megadni a 6. ábrán feltüntetett karakterisztikus mennyiségeket: a $C_{\min}(C_{\infty})$ és C_{fb} értékeit. Az itt mellőzött számítás alapján (l. pl. [16], [17])

$$C_{\infty} \equiv C_{\min} = A C_{ox} C_{sp \min} \cdot (C_{ox} + C_{sp \min})^{-1}$$

ahol

$$C_{sp \min} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{si}}{L} \left[2 \ln \frac{N_{A,D}}{n_i} \right]^{1/2} \quad (26)$$

és a Debye-hosszúság az $N_{A,D}$ akceptor, vagy donor koncentrációval fejezhető ki

$$L = \left(\frac{2 \epsilon_0 \epsilon_{si} kT}{q N_{A,D} q} \right)^{1/2}$$

A sík-sáv (flat-band) akkor áll elő, amikor a felületi potenciál zérus. A MOS kapacitás ilyenkor:

$$C_{fb}^{-1} = C_{ox}^{-1} + (q \beta \epsilon_0 \epsilon_{si} N_{A,D})^{-1/2} \quad (27)$$

A számítás mutatja, hogy $U_G = U_{fb}$ értéknél a $C-U$ görbének inflexiója van, így a C_{fb} érték mérése alapján mód van a szennyezés-koncentráció meghatározására.

6. A rekombináció paramétereinek meghatározása a MOS kapacitás időbeli változása alapján

a) Az irodalomban javasolt modellek ismertetése

Elsőként 1966-ban *M. Zerbst* [1] és *M. Grosvalet* [18] mutatták meg, hogyan lehet meghatározni a kisebbségi töltéshordozók élettartamát a MOS kapacitás időbeli változásának méréséből. Zerbst megadta a τ és S (élettartam és felületi rekombinációs sebesség) meghatározásának egy olyan módszerét, melyben nem kell a vonatkozó bonyolult differenciálegyenletet megoldani. Ezt a módszert a c) pontban fogjuk részletesen ismertetni.

Röviddel később *C. Jund* és *R. Poirier* [19] felhasználták Grosvalet modelljét a kisebbségi töltéshordozók élettartamának mérésére félvezető epitaxiás rétegben.

1967-ben *Heiman* [2], Grosvalet és Zerbst modelljét felhasználva, egyszerű számítást közölt, ami jól használható homogén, felületi állapotoktól mentes struktúrák esetén a kisebbségi töltéshordozók élettartamának meghatározására. A d) pontban részletesen fogjuk ismertetni a Heiman-féle módszert.

Heiman publikációja után *S. R. Hofstein* [20] azt mutatta meg, hogy Heiman mérési módszere szükségképpen tartalmazza a felületi rekombinációból származó részt is, ezért, ha a felületi állapotok sűrűsége nagy, akkor nem lehet pontosan megkapni a térfogati élettartamot.

Hofstein a [20] dolgozatban átvette *C. T. Sah* p-n átmenetekre vonatkozó eredményeit [9] és alkalmazta az inverzióba előfeszített MOS szerkezet leírására.

Sajnos a módszer kísérleti megvalósítása, az alkalmazott kis amplitúdójú ugrásfeszültségek miatt, olyan nehézségekkel jár, hogy a gyors és pontos felhasználás nagyon nehéz.

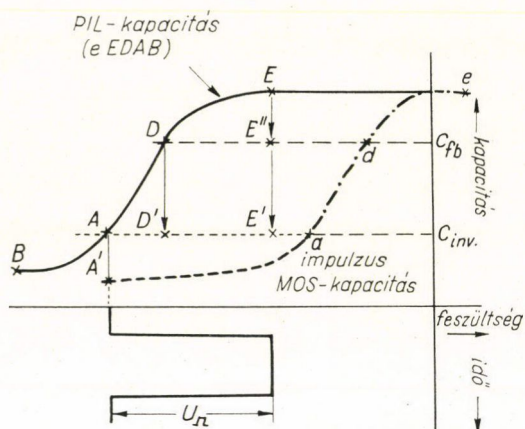
1968-ban *H. Heimer* [21], Zerbst modellje alapján megadta az általuk előállított MIS szerkezetekben levő felületi állapotok paramétereit. Érdekes idézni az általuk mért adatokat: A felületi időállandó $\tau_s = 0,24$ msec, míg az S értékeit az alábbi I. táblázat adja.

I. TÁBLÁZAT

U_G [V]	Y_s	S cm sec $^{-1}$
-14,5	-28,5	$7,2 \cdot 10^3$
-17,5	-36	$0,9 \cdot 10^3$
-19	-42	$0,325 \cdot 10^3$

A táblázatban szereplő Y_s a normált felületi potenciált ($q\Phi_s/kT$) jelöli. E dolgozat eredménye (nagy S érték) ellentétes Zerbst, ill. a mi eredményeinkkel.

A legújabb modell 1970-ben *J. Müller* [22] adta meg. Müller már figyelembe vette a MOS kapacitás tranziensének gyakorlatilag minden lehetséges esetét, az ún. PIL-kapacitás segítségével (Pulsed Inversion Layer Capacitance). Módszerének



7. ábra. Előfeszített MOS dióda kapacitásának lehetséges tranziensei [22]

lényege, hogy az inverzióba előfeszített mintára impulzus-feszültséget kapcsol és a MOS kapacitást vizsgálja az ezután bekövetkező tranziens jelenségeket.

A 7. ábrán látható átmenetek közül részletesen a $D \rightarrow D'$ átmenet elméletét és kísérletét tárgyalja.

Ennek tárgyalásánál felteszi, hogy az inverziós rétegben levő kisebbségi töltéshordozók számával (N_s -sel) arányos lesz a rekombináció sebessége, azaz

$$R = \alpha N_s \exp(-q\Delta V/kT),$$

ahol az exponenciális faktorial veszi figyelembe, hogy a kisebbségi töltéshordozóknak egy $\Delta V \equiv \Phi(W)$

potenciál-barriert kell legyőzniük, hogy rekombinálódjanak.

Az általa levezetett, és itt nem részletezett egyenlet alapján tárgyalja az $A' \rightarrow A$ átmenetet is, vagyis a Zerbst és Heiman által már korábban vizsgált esetet. Ehhez a kezdeti feltételt kell megfelelő módon megválasztani. Míg az első esetben, azaz a $D \rightarrow D'$ átmenetnél $t=0$ -nál $W=0$, most $t=0$ -nál $W=W_0$.

Igen meglepő, hogy a két esetben mért és a fentiek alapján számolt τ különbözik egymástól. Az eltérés egy kettes faktor volt. Ennek okát vizsgálva, véleményünk szerint nem indokolt egyazon egyenlet alkalmazása a $D \rightarrow D'$ és $A \rightarrow A'$ átmenet leírásához, hiszen az $A \rightarrow A'$ esetén az inverziós rétegben biztosan a többségi töltéshordozók, P_s játszanak fontos szerepet és nem N_s , amint Müller feltételezi.

b) *A g-r dinamikai egyenlete MOS szerkezetben*

Ebben a pontban azt vizsgáljuk meg, hogyan írhatunk fel olyan egyenletet, amelyben pl. a τ vagy a generációs-rekombinációs folyamatot jellemző valamely más paraméter lép fel, és amely leírja a MOS szerkezet állapotát az impulzus feszültség bekapcsolása után. A feszültségeloszlást leíró összefüggés:

$$U_G = \frac{q d_{ox}}{\epsilon_0 \epsilon_{ox}} [W N_D + P_s] + \frac{q N_D W^2}{2 \epsilon_0 \epsilon_{si}} \quad (28)$$

Innen, idő szerinti differenciálás segítségével kapjuk:

$$\frac{dP_s}{dt} = - \left(1 + \frac{\epsilon_{ox}}{\epsilon_{si}} \frac{W}{d_{ox}} \right) N_D \frac{dW}{dt} \quad (29)$$

ahol felhasználtuk a $(dU_G/dt)=0$ feltételt.

A (29)-es egyenlet azt mutatja, hogy az elszegényedési réteg vastagságának időbeli változását a dP_s/dt okozza. Ennek meghatározására az SRH modell használható, mert a (14) alapján írhatjuk:

$$P_s = Q_p/q = \int_{W_\infty}^W p(x) dx$$

(30).

tehát

$$\frac{dP_s}{dt} = \int_{W_\infty}^W \frac{dp(x)}{dt} dx = - \int_{W_\infty}^W U_{cp} dx$$

ahol U_{cp} a lyukak tiszta befogási sebessége, és W_∞ a W egyensúlyi értéke.

Ha pontosabban számolunk, akkor a felületi rekombinációs centrumokat is figyelembe véve, a (28)-as egyenlet a következő alakú lesz:

$$U_G = \frac{Q_{ss} + Q_{sp}}{C_{ox}} + \frac{q N_D W^2}{2 \epsilon_0 \epsilon_{si}}$$

Innen kapjuk:

$$\dot{Q}_{ss} + \dot{Q}_{sp} = - \frac{C_{ox}}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} W \frac{dW}{dt} \quad (31)$$

Továbbá, ha feltételezzük, hogy $Q_{ss} = q \frac{dN_{ss}}{dt} = 0$, akkor a (14) és (31)-ből kapjuk:

$$\dot{Q}_{sp} = \int_0^\infty \frac{d\varrho(x)}{dt} dx = - \frac{C_{ox}}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} W \frac{dW}{dt}$$

és a (15') segítségével írhatjuk:

$$- \frac{C_{ox}}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} W \frac{dW}{dt} = q \cdot \int_0^\infty \left[\frac{dp(x)}{dt} - \frac{dn(x)}{dt} \right] dx$$

ahol a $\frac{dp}{dt}$ és $\frac{dn}{dt}$ a (7) és (8)-ban lépett fel a SRH modell tárgyalása során. Ez így írható:

$$-\frac{C_{ox}}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} W \frac{dW}{dt} = q \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\tau_{n0}} [n(x)(1-f_{ts}) - n_1 f_{ts}] - \frac{1}{\tau_{p0}} [p(x)f_{ts} - p_1(1-f_{ts})] \right\} dx \quad (32)$$

Innen láthatjuk, hogy ha a (32) egyenlettel általánosan akarunk foglalkozni, olyan esetben, amelyben stacioner állapot nem alakul ki, akkor a problémát nem tudjuk megoldani, mert a fellépő eloszlásfüggvények felírásához a kvázi Fermi-nívót ismerni kell. A problémát közelítőleg úgy oldhatjuk meg, ha elfogadjuk Zerbst [1], ill. Heiman [2] egyszerű modelljét, vagy azt a kis jel esetre vonatkozó számítási módszert, amelyet Nicollian [13] vagy Hofstein [20] dolgoztak ki. Jelen dolgozatban csak Zerbst és Heiman számítási módszerével foglalkozunk, mivel Nicollian módszerének alkalmazásához az ekvivalens parallel konduktancia mérése szükséges, míg Hofstein módszeréről már korábban megállapítottuk, hogy kísérleti megvalósítása túlságosan nehézkes.

c) Zerbst módszere a τ és S meghatározására

Ismeretes, hogy a Si-ban, a szokásos donor, vagy akceptor koncentrációk mellett ($10^{15} - 10^{17} \text{ cm}^{-3}$) a kisebbségi töltéshordozók élettartama $10^{-6} - 10^{-8} \text{ sec}$ körül mozog. Ha ehhez a határregegen történő rekombinációs folyamatokat is hozzávesszük, akkor látható, hogy általában $\tau < 1 \mu\text{sec}$ effektív élettartamok meghatározása a feladat. A direkt módszerek itt már nehezen alkalmazhatók, ezért jelentős az a módszer, amit Zerbst javasolt és ahol valójában egy lényegesen hosszabb idő méréséből lehet következtetni a τ értékére. Zerbst a MOS szerkezetre adott teljes U_G feszültséget a

$$U_G = \frac{Q_{ss} + Q_p}{C_{ox}} + \frac{qN_D}{C_{ox}} \left[W + \frac{C_{ox}}{2\epsilon_0 \epsilon_{si}} W^2 \right] = \frac{Q_{ss} + Q_p}{C_{ox}} + \frac{qN_D \epsilon_0 \epsilon_{si}}{2C_{ox}^2} \left[\left(\frac{C_{ox}}{C} \right)^2 - 1 \right] \quad (33)$$

alakban adja meg, ahol Q_p az inverziós réteg töltése és ahol felhasználtuk az $\frac{1}{C} = \frac{W}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} + \frac{1}{C_{ox}}$ összefüggést.* Ha a (33) egyenletet differenciáljuk az idő szerint, akkor kapjuk

$$\dot{Q}_{ss} + \dot{Q}_p = -\frac{qN_D \epsilon_0 \epsilon_{si}}{2C_{ox}} \frac{d}{dt} \left(\frac{C_{ox}}{C} \right)^2 \quad (34)$$

Ha $\dot{Q}_{ss} = 0$, akkor

$$\dot{Q}_p \equiv q \frac{dP_s}{dt} = -\frac{qN_D \epsilon_0 \epsilon_{si}}{2C_{ox}} \frac{d}{dt} \left(\frac{C_{ox}}{C} \right)^2$$

ahol dP_s/dt -t a (30) egyenletben már megadtuk.

* A (33)-ban szereplő N_D -t külön meg kell határozni. Ehhez, mint arra rámutattunk, akár a C_{min} , akár a C_{fb} meghatározása elegendő.

Mondhatjuk tehát, hogy a MOS-kapacitás időbeli változását a generációs-rekombinációs folyamatok okozzák.

Zerbst feltételezi, hogy mind a térfogati, mind a felületi centrumok hozzájárulnak az inverziós réteg kialakulásához, azzal, hogy lyukakat generálnak:

$$\dot{Q}_p \equiv q \frac{dP_s}{dt} = q(g_s + g_B)$$

ahol g_s és g_B konkrét alakjára felteszi:

$$g_s = n_i S \quad (35.a)$$

$$g_B = \frac{n_i}{\tau_0} (W - W_\infty) \quad (35.b)$$

Megmutatjuk, hogy a (35.b) egyenlet viszonylag egyszerű feltevések mellett a SRH modell alapján levezethető. Valóban, tegyük fel, hogy az elszegényedési rétegben levő térfogati rekombinációs centrumok játszanak szerepet. Ekkor stacioner nem-egyensúlyi állapotot feltételezve a (10) és (30) egyenletek alapján írhatjuk:

$$\frac{dP_s}{dt} = - \int_{W_\infty}^W \frac{(np - n_i^2)}{(n + n_1)\tau_{p0} + (p + p_1)\tau_{n0}} dx \quad (36)$$

Ha (36) átalakításánál követjük Sah [9] megfontolását, akkor az elszegényedési tartományban érvényes $np \ll n_i^2$, valamint az $E_t = E_i \equiv 0$ miatt*, $U = \frac{n_i}{2\tau}$, ahol $\tau = \tau_{n0} = \tau_{p0}$. Ennek segítségével a (36) kifejezés integrálható és kapjuk a (35.a) egyenletet, egy kettős faktor eltéréssel, amelyet Zerbst valószínűleg elhagyott. A felületi generáció feltételezett alakját, (35.a) egyenlet, nehezebb pontosan indokolni és csak szemléletes magyarázat látszik. Valóban, a felületi rekombinációt az áram felületre merőleges komponenséhez, mint határfeltételt szokás bevezetni. Ez $qS\Delta p$ alakban van megadva. Ha feltesszük, hogy a felületi centrumok is a sáv közepén vannak, akkor $\Delta p \approx n_i$ írható és innen adódik a $qn_i S$ alak. A fentiek alapján az inverziós réteg töltésének változására írhatjuk:

$$\dot{Q}_p = qn_i S + q \frac{n_i}{2\tau_0} (W - W_\infty) = - \frac{qN_D \epsilon_0 \epsilon_{si}}{2C_{ox}} \frac{d}{dt} \left(\frac{C_{ox}}{C} \right)^2$$

Rendezve a fenti egyenletet:

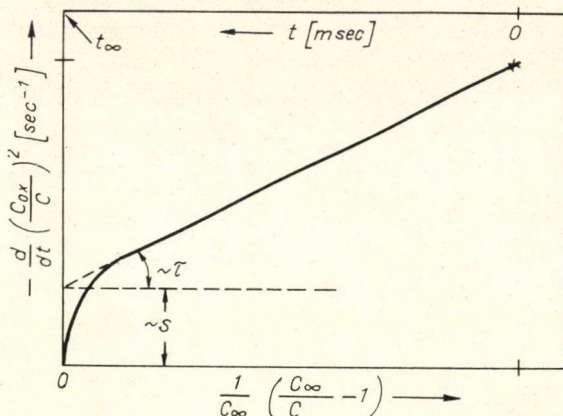
$$- \frac{d}{dt} \left(\frac{C_{ox}}{C} \right)^2 = \frac{2C_{ox}}{N_D \epsilon_0 \epsilon_{si}} \left[n_i S + \frac{n_i \epsilon_0 \epsilon_{si}}{2\tau_0 C_\infty} \left(\frac{C_\infty}{C} - 1 \right) \right] \quad (37)$$

* Megjegyezzük, hogy ha $E_t \neq E_i$, akkor $\tau_{n0} \neq \tau_{p0}$ és $U = n_i \left[2\theta \operatorname{ch} \left(\frac{E_t}{KT} + \theta \right) \right]^{-1}$, ahol $\theta^2 = \tau_{n0} \tau_{p0}$ és az integrálás most is elvégezhető.

Zerbst a $Q_{ss}=0$ egyszerűsítést elhagyva, felteszi, hogy a felületi állapotokra az alábbi összefüggés érvényes:

$$\dot{Q}_{ss} \equiv q \frac{dN_{ss}}{dt} \sim \exp(-t/\tau_s)$$

Ezt a kifejezést is figyelembe véve a $C(t)$ függvény explicite nem adható meg, de Zerbst egy grafikus módszert javasol, amely lehetőséget ad a τ és S , valamint a τ_s meghatározására. Ha ábrázoljuk a $-\frac{d}{dt} \left(\frac{C_{ox}}{C} \right)^2$ mennyiséget a $(C_\infty/C - 1) 1/C_\infty$



8. ábra. A τ és S paraméterek meghatározására szolgáló Zerbst-módszer elve. Egy konkrét mérés a 13. ábrán látható

függvényében, akkor a \dot{Q}_{ss} tag elhagyásával egy egyenes adódik, melynek meredekségéből a kisebbségi töltéshordozók élettartama és a $-\frac{d}{dt} \left(\frac{C_{ox}}{C} \right)^2$ tengelyből kimetszett szakaszból a felületi rekombinációs sebesség határozható meg (8. ábra).

A ténylegesen kapott kapacitás görbék nem adnak egyenest a fenti koordinátákban, hanem egy exponenciális esést kis t értékeknél. Ezt a változást Zerbst a felületi állapotok áttöltődésével magyarázza és innen számítja ki a τ_s értéket.

d) Heiman tárgyalása a τ meghatározására

Heiman vizsgálati módszere lényegében megegyezik a Zerbst-féle módszerrel és a különbség csak a matematikai megfogalmazásban van. A tisztább megfogalmazást megkönnyíti, hogy Zerbsttel ellentétben nem vizsgálja a felületi rekombináció hatását és csak kritikai észrevételt tesz a Zerbst-féle tárgyaláshoz megjegyezve, hogy az állandó felületi generáció feltételezése nem helyes. Itt a Heiman által leírt tárgyalást ismertetjük. Tekintsünk egy p-típusú félvezetéből készült MOS diódát. Ha egy olyan impulzus feszültséget alkalmazunk, amely a lyukakat eltaszítja a felület közeléből (depletion layer), akkor a MOS szerkezet kapacitása a kiürült W vastagságú tartománynak megfelelően lecsökken. Ez az állapot azonban nem lesz egyensúlyi helyzet, amint azt az a) pontban már említettük ($A \rightarrow A'$ átmenet a 7. ábrán), hanem megindul a kiürült tartományban az elektronok és lyukak termikus generálása a tilos-sávban levő rekombinációs centrumokból. Ez a kapacitás növekedéséhez vezet, hiszen kisebbségi töltéshordozók (elektronok) a felülethez jutnak a meglévő belső tér miatt, és így inverziós réteg kialakulásához járulnak hozzá, míg a többségi töltéshordozók a félvezető belseje felé mozognak és kompenzálják az ionizált akceptorok egy részét lecsökkentve a W vastagságot, azaz növelve a kapacitás értékét. A számítás feltevései:

- (i) A félvezetőben levő összes töltés konstans.
- (ii) Az adalék atomok teljesen ionizáltak és egyenletes eloszlást mutatnak.

(iii) A térfogategységre vonatkozó generációs sebesség független a felületi potenciáltól és a belső tértől. Értéke [9] alapján: $g = \frac{n_i}{2\tau}$, ahol $\tau = \tau_{n0} = \tau_{p0}$ az elektronok és lyukak élettartama.

A (ii) és (iii) feltételek alapján meg lehet határozni azt a karakterisztikus időt, amely ahhoz szükséges, hogy egy ΔW vastagságú elszegényedett réteg a generált elektron-lyuk párok által neutralizálódjék.

Valóban, fizikailag látható, hogy a

$$gT\Delta W = N_A\Delta W$$

feltételből:

$$T = \frac{N_A}{g} = 2\tau \frac{N_A}{n_i}.$$

Az (iii) feltételt Heiman átvitte az inverziós rétegben a generációs sebesség meghatározására. A (35.b)-hez hasonlóan az elektron-lyuk párok generációs sebessége:

$$g' = g(W - W_\infty) = \frac{n_i}{2\tau} (W - W_\infty). \quad (38)$$

A (38) egyenlet segítségével felírhatjuk az inverziós rétegben a felületegységre vonatkozó elektron koncentráció (N_s) időbeli változását:

$$\frac{dN_s}{dt} = g' = \frac{n_i}{2\tau} (W - W_\infty).$$

A kiürült réteg vastagságának meghatározásához egy további egyenletet a MOS struktúrára kapcsolt feszültség eloszlása adja, amelyet (28) kifejezés alapján írhatunk fel, ha $N_D \rightarrow N_A$ és $P_s \rightarrow N_s$ helyettesítést vezetjük be. Az így kapott egyenlet differenciálásával és (38) felhasználásával a W -re vonatkozó differenciálegyenlet könnyen megoldható:

$$\left[1 + \frac{\varepsilon_{ox}}{\varepsilon_{si}} \frac{W_\infty}{d_{ox}} \right] \ln \left(\frac{W - W_\infty}{W_0 - W_\infty} \right) + \frac{\varepsilon_{ox}}{\varepsilon_{si}} \frac{W - W_0}{d_{ox}} = -\frac{t}{T} \quad (39)$$

ahol $t=0$, $W=W_0$ kezdeti feltételt használtuk. A gyakorlat számára jól használható alakban írható a (39) egyenlet, ha bevezetjük a normált nagyfrekvenciás kapacitásokat:

$$\ln \left[\frac{(C_{n\infty}/C_n) - 1}{(C_{n\infty}/C_{n0}) - 1} \right] + \left[\frac{C_{n\infty}}{C_n} - \frac{C_{n\infty}}{C_{n0}} \right] = -C_{n\infty} \frac{t}{T} \quad (40)$$

ahol

$$C_n = \frac{C}{C_{ox}}; \quad C_{n0} = \frac{C_0}{C_{ox}}; \quad C_{n\infty} = \frac{C_\infty}{C_{ox}}.$$

Mivel a (40) egyenlet által meghatározott $C(t)$ függvényt kísérletileg mérni lehet és a szereplő C_{n0} , $C_{n\infty}$ paraméterek is ismertek, az elmélet T paramétere meghatároz-

ható. A gyakorlatban célszerűbb a $\frac{dC_n}{dt}$ függvényt mérni (esetleg $C_n(t)$ ismeretében pl. grafikusán felrajzolni), mert érvényes, hogy

$$\frac{dC_n}{dt} = \frac{C_n^2}{T} \left[1 - \frac{C_n}{C_{n\infty}} \right].$$

A felületi rekombináció figyelembevétele egy újabb tag megjelenéséhez vezet (l. (37) egyenlet). Ennek hatása abban nyilvánul meg, hogy nem lehet az egész $C_n(t)$ görbét egyetlen T időállandó segítségével leírni, hanem, amint arra Heiman is rámutatott, a $t \approx 0$ körül egy rövidebb karakterisztikus idő feltételezése is szükséges.

e) A felületi állapotok szerepéről

Az előző pontok tárgyalása mutatja, hogy a felületi állapotok szerepe, megkülönböztetésük a térfogati rekombinációs centrumoktól, ma még nem megoldott feladat. Valójában a sokkal egyszerűbb kérdés, e centrumok eloszlása is kérdéses.

Az oxidált felületek, pontosabban „interface”-ek felületi állapotainak jellege igen bonyolult és nem lehet egyszerűen a bevonatmentes felületekre kidolgozott elméleteket alkalmazni. Terman [23] például, a SiO_2 -Si határfelületén folytonos eloszlású felületi állapotokat tételez fel. Más dolgozatok diszkrét és folytonos eloszlás együttes jelenlétéből indulnak ki (l. pl. E. H. Nicollian [13]).

Fontos megjegyezni, hogy a Si nagy mértékű elterjedése a félvezető eszközök technológiájában azzal magyarázható, hogy a Si-SiO₂ határfelületnek előnyös tulajdonságai vannak a bevonatmentes Si felülethez képest.

Az oxidált felületek esetén is kétfajta felületi állapot létezését kell feltételezni, az ún. gyors és a lassú állapotokat. A bevonatmentes felületeknél a szokásos szóhasználatnak megfelelően a gyors, ill. lassú jelzők az elektronok átmeneti sebességét jellemzik a sávok és a felületi állapotok között. A „jó” technológiával készült oxidok esetén a lassú állapotok hatása elhanyagolható [13]. A gyors felületi állapotok a SiO₂-Si határon, a Si oldalon vannak lokalizálva. A lassú állapotok, vagy az oxidban [24], [25], vagy az oxidnak a környezettel érintkező határán helyezkednek el. Világos, hogy ezek a centrumok a rekombinációs folyamatban játszanak fontos szerepet; de léteznek olyan felületi töltések is, melyek elsősorban az oxid elektromos vezetőképességét és töltését befolyásolják. A vizsgálatok két töltésfajtát mutattak ki. Az egyik mozgékony ionoktól származik és a MOS szerkezet instabilitását eredményezi, a másik a beépült fix töltés, mely elsősorban az U_{fb} , flat-band feszültség értékét tolja el [25]. Figyelembe véve a MOS struktúrák szokásos méreteit, természetes, hogy a felületi állapotok, pontosabban a SiO₂-Si határfelület állapotai hatással vannak a MOS szerkezet elektromos tulajdonságaira. Két paraméter látszik fontosnak: az állapotok sűrűsége és a tilos sávban elfoglalt helyzetük.

E paraméterek kétféle módon is meghatározhatók. Az egyik a MOS kapacitás módszere, a másik a felületi vezetés mérésének módszere. A kérdés irodalma igen kiterjedt. Itt csak egy módszert fogunk ismertetni, amelyet a legutóbbi időben dolgoztak ki. A probléma a tilos-sáv különböző tartományjaiban levő felületi centrumok kimutatása, amelyek lényegesen különböző válasz-idővel rendelkeznek. Nyilván a sávokhoz közeli centrumok követni tudják a nagyfrekvenciás külső jelet, míg a mélyen fekvő centrumok termikus generációja olyan lassú, hogy erre nem

képesek. 1970-ben *C. Svenson* és munkatársai közöltek egy dolgozatot [26], amelyben olyan módszert mutatnak be, amely lehetőséget ad a tilos sáv nagy részében a vezetési sávokhoz nem túl közel elhelyezkedő felületi állapotok kimérésére. Abból a tényből indultak ki, hogy a szokásos nagyfrekvenciás $C-U$ karakterisztika mérésekor az egyenfeszültségű előfeszítést mind a kisebbségi töltéshordozók, mind a felületi állapotok képesek követni, míg az alkalmazott 1–5 MHz-es mérőjelet nem.

Ha tehát az egyenfeszültséghez még egy kis amplitúdójú rövid impulzust adunk és az impulzus ideje alatt mérünk kapacitást, akkor a felületi állapotok jelentős részében a töltés változatlan marad a kapacitás mérés egész ideje alatt és így adatokat nyerhetünk azok számáról és betöltöttségéről, adott előfeszültségnél. A fenti módszert viszonylag nem nehéz megvalósítani és így ajánlható MOS szerkezetek minősítő vizsgálatához.

7. MOS diódák kísérleti vizsgálata

Jóllehet a MOS szerkezetekben lejátszódó fizikai folyamatok közül a nem-egyensúlyi jelenségek vizsgálata viszonylag új kutatási terület, mégis az impulzusüzemű $C-U$ karakterisztika módszereket ma már lényeges vizsgálati eljárásnak tekintik. Figyelembe véve, hogy a hazai félvezető kutatásban, a MOS szerkezeteken alapuló eszközök már elismerést nyertek, célszerűnek látszott a fenti területen kutatást végezni. Erre lehetőséget adott az a körülmény, hogy az MTA Műszaki Fizikai Kutató Intézetének Félvezető Osztályán az elmúlt évben külön munkacsoport foglalkozott a MOS szerkezetek előállításával és vizsgálatával.

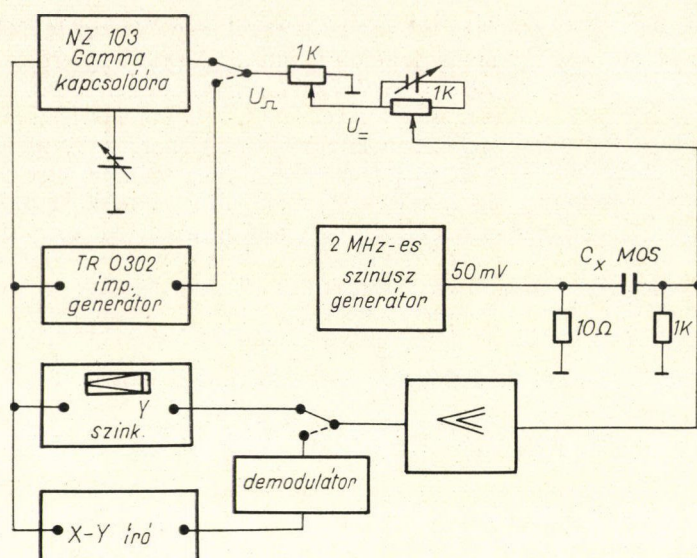
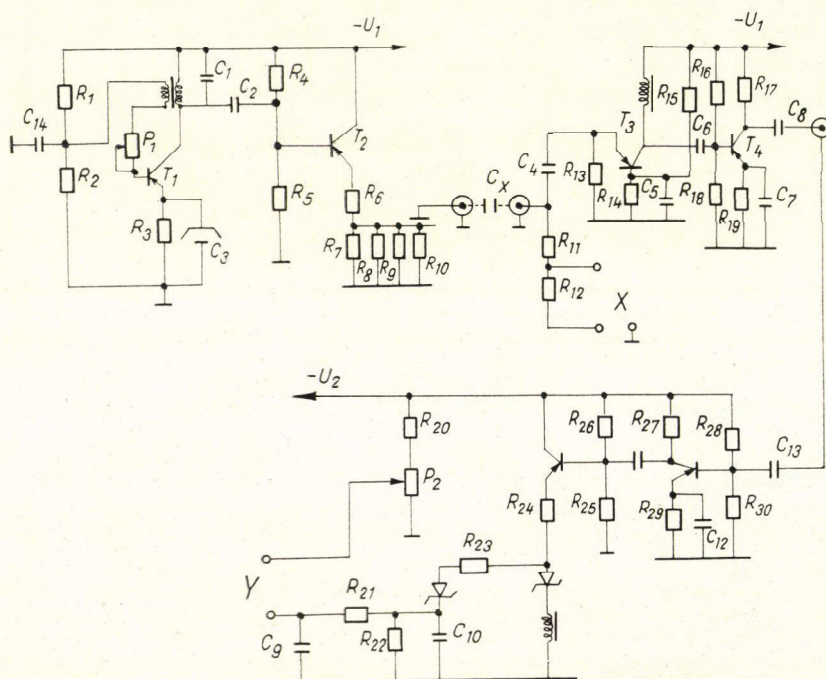
Mérési módszer, berendezés τ és S meghatározására

Az előző pontban ismertettük a Zerbst—Heiman-módszer elvét a τ és S meghatározására.

A kísérleti feladat olyan mérőberendezés összeállítása, amely $T = \tau \frac{N_D}{n_i}$ idő alatt végbemenő kapacitásváltozásokat képes mérni. Figyelembe véve, hogy a τ értéke lényegesen változhat a különböző technológiával készült mintáknál, valamint n_i is több nagyságrenddel változik a hőmérséklet viszonylag kis változásával, a T szokásos értéke 100 μsec —10 sec közé esik. A MOS kondenzátor differenciális kapacitását úgynevezett áram-feszültség módszerrel mérjük: a feszültséggenerátoros kimenetű jelgenerátorra kapcsoljuk a MOS dióda impedanciájánál kisebb impedanciájú ellenállást. Az ellenálláson fellépő feszültség, amely arányos az átfolyó árammal, a kapacitás értékével lesz arányos. A differenciális mérés érdekében a jelgenerátor kimenőjele 10–50 mV nagyságú, frekvenciája állandó, mintegy 2 MHz. A kapacitással arányos feszültséget erősítjük, majd a kimenő feszültség oszcilloszkópra kerül.

A MOS diódát változtatható előjelű és értékű egyenfeszültség segítségével tetszőlegesen elő tudjuk feszíteni. Ezzel a forrással kapcsoljuk sorba az igényeknek megfelelően néhány secundumos négyszögimpulzusokat adó Gamma gytm. időkapcsoló-órapárból készült generátort, ill. a mikroszekundumtól 10 msec-ig működő impulzus generátort.

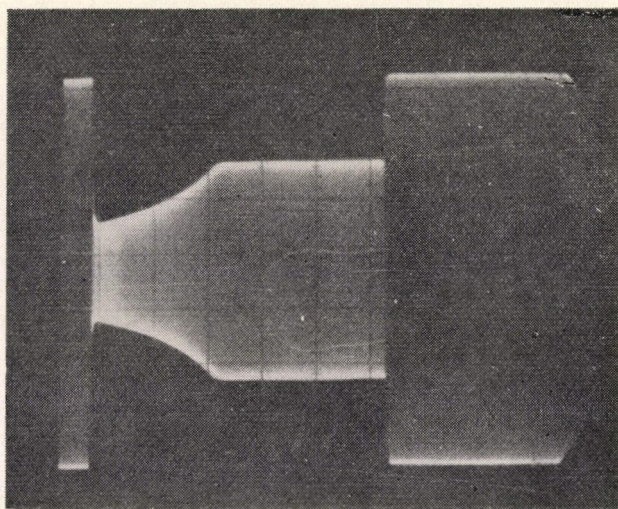
A mérési összeállítás a 9. ábrán látható. Az összeállítás szokásos $C-U$ mérés

9. ábra. A τ és S mérésére szolgáló berendezés blokk-sémája10. ábra. A $C-U$ mérő konkrét elektronikus kapcsolása

végrehajtására is alkalmas, ekkor az erősítő után a demodulátor bekötésre kerül és a kimenő jelet $X-Y$ íróra visszük.

Az oszcillátor, az erősítő és demodulátor megvalósított kapcsolását a 10. ábrán mutatjuk be.

A mérésnél lényegében a 7. ábrán $A \rightarrow A'$ -vel jelzett átmenetet vizsgáljuk. Az oszcilloszkópon megjelenő jel (11. ábra) mutatja a kapacitás időbeli változását. Ezeket grafikusan értékeltük ki.



11. ábra. A kapacitás változás tipikus oszcilloszkóp felvétele
Vízszintes tengely: 1 msec/osztás Függőleges tengely: 56mF/osztás

A vizsgált minták jellemzése

A vizsgálatok kezdetén megkíséreltük a méréseket tokozatlan mintákon végezni. Ennek az lett volna az előnye, hogy azonnal az elkészítés után kaphattunk volna adatokat a határfelület tulajdonságaira nézve. Sajnos, a különböző technológiával készült MOS szerkezetekben a τ értéke annyira változott, hogy sok mintát alacsony hőmérsékleten kellett mérni ahhoz, hogy értékelhető görbéket kapjunk. A tokozatlan minták a hőmérséklet változtatást általában nem bírták és így áttértünk a tokozott mintákra. Ez alól csak néhány intézeti készítésű minta volt kivétel, amelyeken pl. a megvilágítás hatását vizsgáltuk. Háromféle mintatípus állt rendelkezésünkre.

- a) A MFKI Félvezető Osztályán készített MOS diódák.
- b) A Híradástechnikai Ipari Kutató Intézet által készített és rendelkezésre bocsátott diódák (jelük: MH).
- c) Az Egyesült Izzóban folyó előkísérletek során készített és rendelkezésre bocsátott MOS diódák (jelük: MI).

Az Intézet Félvezető Osztályán Németh Tiborné dolgozta ki az elmúlt években a Si oxidálásának technológiáját. Az általunk vizsgált oxidok termikus oxidálással készültek, a következő eljárás szerint. A kémiai előkészítés után (polírozás, tisztítás, marás) a minták ellenállásfűtésű kályhába kerültek, ahol 1100 °C-on szén-savhóval kifagyasztott oxigénben (harmatpont 70 °C körül), 40 liter/óra áramlási sebességnél állítottuk elő a kívánt vastagságú (1000 Å) oxidréteget. A fenti réteg előállítására 42 perc oxidálási időt igényel.

A fém elektróda párologtatott Pt vagy Ni volt. Az EIVRT, ill. a HIKI által készített diódák technológiáját nem áll módunkban ismertetni, csak megjegyezzük, hogy a HIKI-s minták ún. védőgyűrűvel készültek, ami lehetőséget ad nagyobb feszültségek alkalmazására.

8. Kísérleti eredmények

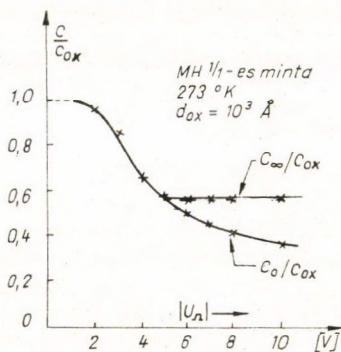
A τ és S mérése

A felhasználásra kerülő mintákat először ellenőrizni kellett, vajon mennyire felelnek meg a 6. pontban leírtaknak? Ezért általában felvettük az egyenfeszültségű $C-U$ görbéket, valamint az impulzus üzemi C_0-U görbéket. Természetes, hogy csak akkor várható mérhető nagyságú kapacitástranziens, ha a C_0 és C görbék nagy feszültségeknél ($U > U_{fb}$) szétválnak. Az MH1/1 mintán bemutatunk egy ilyen jellegzetes mérést, ahol mind az egyenáramú $C-U$ karakterisztikát, mind az impulzus C_0-U karakterisztikát felvettük (12. ábra).

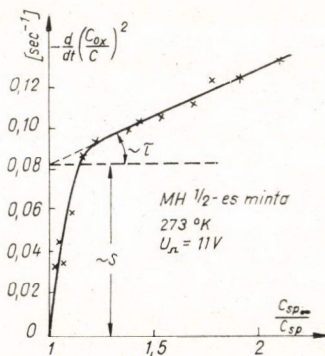
A C_∞ jelölés arra utal, hogy a $t=0$ -nál mért C_0 értékekkel szemben az egyensúlyi kapacitást vizsgáljuk. A C_∞ és C_0 görbék szétválása a kísérleteknél 4 V körül következhet be, ami nagyobb az U_{fb} értéknél ($\sim 2,5$ V). Csak finomabb mérésekkel lehetne $2,5 \text{ V} < U_G < 4 \text{ V}$ tartományban a C_∞ és C_0 közötti különbséget meghatározni.

$U_1-10 \text{ V}$	$R_1-5 \text{ K}$	$R_{16}-50 \text{ K}$	$C_1-100 \text{ pF}$
$U_2-20 \text{ V}$	$R_2-5 \text{ K}$	$R_{17}-2 \text{ K}$	$C_2-10 \text{ pF}$
$T_{1-6}-AF 101$	$R_3-2 \text{ K}$	$R_{18}-50 \text{ K}$	$C_3-1 \mu\text{F}$
$P_1-20 \text{ K}$	$R_4-50 \text{ K}$	$R_{19}-3 \text{ K}$	$C_4-100 \text{ nF}$
$P_2-1 \text{ K}$	$R_5-50 \text{ K}$	$R_{20}-10 \text{ K}$	$C_5-100 \text{ nF}$
	$R_6-2 \text{ K}$	$R_{21}-10 \text{ K}$	$C_6-100 \text{ nF}$
	$R_7-50 \text{ K}$	$R_{22}-20 \text{ K}$	$C_7-100 \text{ nF}$
	$R_8-25 \text{ ohm}$	$R_{23}-100 \text{ ohm}$	$C_8-100 \text{ nF}$
	$R_9-10 \text{ ohm}$	$R_{24}-200 \text{ ohm}$	$C_9-10 \text{ nF}$
	$R_{10}-5 \text{ ohm}$	$R_{25}-50 \text{ K}$	$C_{10}-1 \text{ nF}$
	$R_{11}-20 \text{ K}$	$R_{26}-50 \text{ K}$	$C_{11}-100 \text{ nF}$
	$R_{12}-20 \text{ K}$	$R_{27}-2 \text{ K}$	$C_{12}-100 \text{ nF}$
	$R_{13}-2 \text{ K}$	$R_{28}-50 \text{ K}$	$C_{13}-100 \text{ nF}$
	$R_{14}-2 \text{ K}$	$R_{29}-2 \text{ K}$	$C_{14}-1 \text{ nF}$
	$R_{15}-2 \text{ K}$	$R_{30}-20 \text{ K}$	

Az élettartam-vizsgálatok során először a τ , illetve S értékét mértük a 10. ábrán bemutatott és az előzőekben ismertetett berendezés segítségével. A vizsgált mintáknál kapott felvételek alapján (egy tipikus $C(t)$ görbe fényképe a 11. ábrán látható);



12. ábra. Egyensúlyi (C/C_{ox}) és impulzus üzemi C_0-U karakterisztika



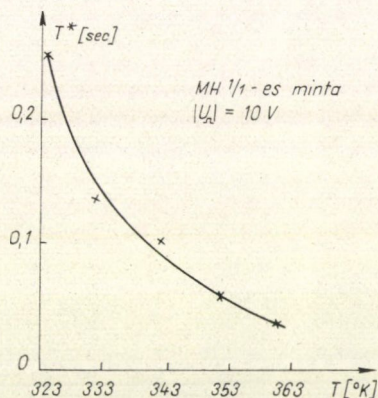
13. ábra. Egy tipikus példa a τ és S grafikus meghatározásához

grafikusan felrajzoltuk a $-\frac{d}{dt} \left(\frac{C_{ox}}{C} \right)^2$ mennyiséget a C_{∞}/C függvényében (13. ábra) és ebből a T és S meghatározható.

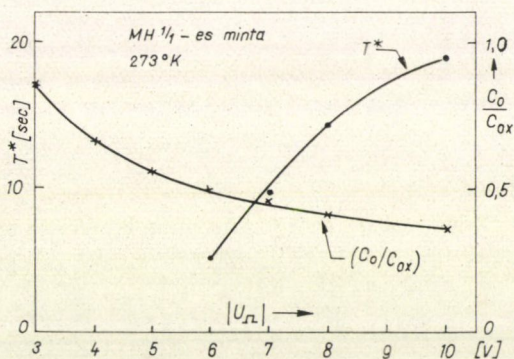
A vizsgált 270–370 °K tartományban $S=5,23 \text{ cmsec}^{-1}$, gyakorlatilag állandó érték adódik. Figyelembe véve, hogy az MH jelű mintáknál az S nem haladta meg a 20 cmsec^{-1} értéket, mondhatjuk, hogy ezen minták határfelülete kis járulékot ad az effektív élettartamhoz. Ugyancsak a grafikusan kiértékelt felvételek alapján lehet meghatározni az átlagos élettartamot, mely az adott esetben $\tau=1,82 \mu\text{sec}$ -nak adódott, a hőmérséklettől függetlenül. Ez az érték azt mutatja, hogy a határréteghez közeli tartomány nem roncslódott, mert a kapott τ érték a szokásos térfogati élettartamokkal azonos nagyságrendű.

Megjegyezzük, hogy a vizsgált hőmérsékleti tartományban T értéke jelentősen változik. Az egyszerűség kedvéért nem a T , hanem a T^* -gal jelölt mennyiséget ábrázoltuk a 14. ábrán, amelyet úgy definiáltunk, hogy T^* idő alatt a kapacitásváltozás teljes egészében végbemegy. Természetesen T és T^* különbözik egymástól, azonban a fenti körülmény bemutatása szempontjából ez az eltérés elhanyagolható.

A gyakorlatban T^* könnyen meghatározható a 11. ábra alapján, mivel a $C(t)$ görbének éles törése van mielőtt a $C(t)$ függvény állandó értéket vesz fel.



14. ábra. A kapacitás teljes változásának ideje T^* , a hőmérséklet függvényében



15. ábra. T^* feszültségfüggése 0 °C-on a 14. ábrán vizsgált minta esetén. Feltüntettük a kezdeti (C_0/C_{ox}) -re jellemző görbét is

A 12. ábrán megmutattuk, hogy az U_{rn} feszültség növekedésével a $\Delta C = C_0 - C_{\infty}$ különbség növekszik. Felmerül a kérdés, hogy az U_{rn} értékétől független-e a mért T , illetve T^* érték. Az egyszerű vizsgálat azt mutatja, hogy az MH1-es minta esetén T független U_{rn} -től, azaz ΔC -től. Más a helyzet, ha a T^* értékét ábrázoljuk.

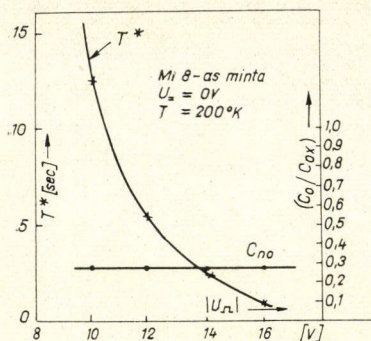
A 15. ábrán láthatjuk, hogy növekvő impulzus feszültséggel T^* is nő. Egyszerűen belátható, hogy ezt kell kapni állandó T mellett. Valóban, ha feltesszük egy pillanatra, hogy a kapacitás lecsengése exponenciális és az amplitúdóját növeljük a ΔC változtatásával, akkor a „teljes” lefutás ideje T^* is növekedni fog. Ezt a körülményt a későbbiekben fel fogjuk használni a τ állandó voltának vizsgálatához.

T^* feszültségfüggésének vizsgálata

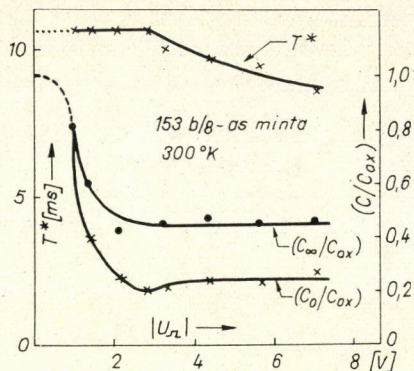
A vizsgálatok során, elsősorban az MI jelű és a saját készítésű mintákon mért T , illetve T^* meglepő feszültségfüggését tapasztaltuk.

Az MI8-as mintán a T^* közel egy nagyságrendet változott az U_{TL} feszültség kis változására. A 16. ábrán 200 °K hőmérsékleten mért görbét mutatjuk be, de teljesen hasonló viselkedés tapasztalható szobahőmérsékleten is.

A saját készítésű 153b/8-as mintán T^* változása, mint a 17. ábra mutatja, kisebb, de még jól mérhető. A fenti jelenség megértése céljából több kísérletet végeztünk el.

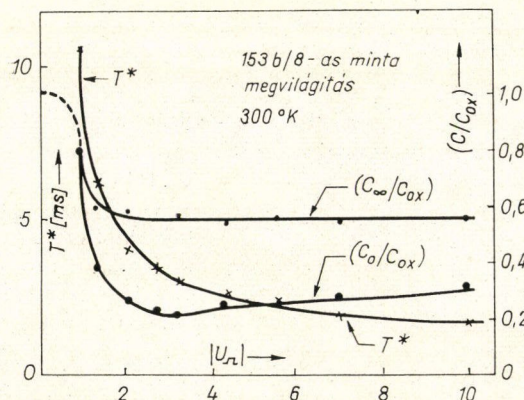


16. ábra. A T^* feszültségfüggése 200 °K-en és a normált impulzus üzemű C_0 - U karakterisztika $U_{TL} > 10$ V esetén



17. ábra. A T^* feszültség függése saját készítésű MOS diódán és a dióda C - U karakterisztikái

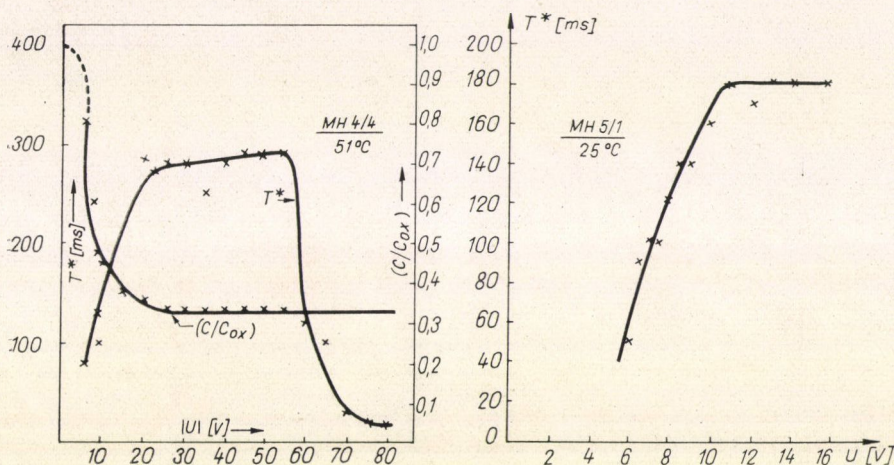
A tokozatlan 153b/8-as mintán megvizsgáltuk a megvilágítás hatását. A 18. ábrán tüntettük fel a kapott eredményt. Mint látható, a 17. ábrával szemben a T^* változása jelentősen megnőtt, és az MI8-as mintához hasonlóan, T^* közel egy nagyságrend változást mutat. Ez a tény arra utal, hogy az effektus kapcsolatban van nem-egyensúlyi töltéshordozók generációjával. Természetesen a tokozott minták esetén, a töltéshordozók generálása kívülről nem történhet. Ezért feltételezzük, hogy a MOS szerkezetek letörése következik be és a keletkező nem-egyensúlyi töltéshordozók az inverziós réteg kialakulását meggyorsítják.



18. ábra. Megvilágítás hatása a saját készítésű, tokozatlan MOS diódára és a C - U karakterisztikák

A letörés hatásának meg kell mutatkoznia az impulzus üzemű C_0 - U karakterisztikában is. Mint a [27], [28]-ban megmutatták, a térfogati letörés megjelenésétől kezdve a C_0 - U karakterisztikában C_0 állandó

értéket vesz fel, hiszen a kiürült réteg nem tud tovább növekedni. Ezt ellenőriztük a vizsgált esetekben és amint a 16., 17., 18. ábrák mutatják a C_0-U görbék a T^* változásától kezdve valóban nem csökkennek, sőt a 153b/8 minta esetén egy kis növekedés is tapasztalható. Az előző mintákkal ellentétben, néhány esetben meg lehetett figyelni, hogy a T^* kezdetben növekedik, majd konstans értéket vesz fel, végül tovább növelve a feszültséget, hirtelen csökkenni kezd. A 19. ábrán az



19. ábra. T^* a külső feszültség függvényében

MH5/1-es mintánál a kezdeti szakaszt és a telítődést mutatjuk be, míg az MH4/4 mintán a teljes változás jól követhető. A fentiek, úgy gondoljuk egyértelműen bizonyítják, hogy T^* feszültség függése a MOS szerkezet letörésével van kapcsolatban. Egyben az is látszik, hogy a T^* viselkedése alapján minősíteni lehet a MOS diódákat, hiszen jó diódák esetén T^* nő (l. 15. ábra), míg a letörést mutató diódáknál T^* csökken, vagy állandó marad növekvő feszültségeknél. A következő pontban egy egyszerű modell alapján a $T^*(U)$ függés egy részét értelmezzük.

9. Az eredmények értelmezése, következtetések

A különböző mintákon kapott eredmények közül csak néhány jellegzetes görbét mutattunk be az előző fejezetben. Az alábbi II. táblázatban további adatok találhatók.

Megjegyezzük, hogy az MH jelű mintákon a mérés megbízhatóbb volt, mert a saját készítésű és MI jelű minták közül sok, viszonylag kis feszültségeknél letört.

A τ értékéből látható, hogy a határfelülethez közeli tartomány az MH jelű mintáknál a legjobb, míg a II. táblázatban feltüntetett más mintákon τ értéke két nagyságrenddel kisebb lehet. Ami az S értékét illeti, az 5 cm sec^{-1} érték igen jónak mondható. Sajnos, ha τ értéke kicsi, akkor csak rendkívül nagy S értékek mérhetők.

Ezt legegyszerűbb úgy belátni, ha meggondoljuk, hogy a felületi rekombináció akkor képes szerepet játszani az effektív élettartamban, ha $S \cong W_0/\tau$. Feltéve, hogy $\tau = 10^{-8}$ sec, $W_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ cm kapjuk, hogy $S \cong 2 \cdot 10^3$ cm sec $^{-1}$ kell legyen. A vizsgált minták esetén ilyen nagy felületi rekombináció sebesség nem adódott. Korábban említettük, hogy Reimer [21] kapott a fentivel azonos nagyságrendű értéket.

II. TÁBLÁZAT

Minta jele	S/cm sec $^{-1}$	τ (μsec)	t °C
MH1/1	5,3	1,7	0
MH1/2	5,1	2,9	0
MH1/3	4,9	3,2	0
MH1/4	5,1	2,6	0
153b/8	—	$1,2 \cdot 10^{-2}$	26
MI8	—	$4 \cdot 10^{-2}$	26

Mindebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az oxidáció során az MH jelű mintákban nem változott lényegesen a kisebbségi töltéshordozók élettartama, míg a többi mintánál ez a hatás általában bekövetkezett. A felületi rekombinációt meghatározó centrumok számát szeretnénk volna a Svensson módszerrel kiszámítani. Sajnos a rendelkezésre álló idő rövidsége ezt nem engedte meg. Ezt a módszert azonban igen hasznosnak látjuk és kombinálva a Zerbst-méréssel, minősítő mérésként is használható.

A T^* feszültségfüggésének értelmezésénél azt tudtuk megállapítani, hogy az effektus a MOS dióda letörésével van kapcsolatban. Nem lehetett eldönteni egyértelműen, hogy térfogati, vagy a széleken történő letörésről van e szó. A kis letörési feszültségek általában az utóbbi esetet látszanak megerősíteni.

A letörés állapotában levő MOS dióda relaxációs tulajdonságaival eddig elméletileg nem foglalkoztak. A megvilágított MOS struktúra tárgyalása igen bonyolult és csak újabban R. Pierret és C. T. Sah vizsgálta az állandó megvilágítás hatását a MOS kapacitásra [36]. A jelen munkában kapott eredmények azt mutatják, hogy érdekes vizsgálni a feszültség függő generáció, azaz a letörés hatását elméletileg is. Ahhoz azonban, hogy kísérletileg kvantitatíve is kiértékelhető eredményeket kapjunk, olyan mintákra van szükség, ahol biztosan tudjuk, hogy a letörés a térfogatban és nem a széleken következik be.

Itt említjük meg a MOS diódák minősítésének egyszerű módját, legalábbis τ és S relatív szerepének meghatározására, valamint egyazon méréssel a letörés megállapítására. A [25] dolgozatban mutattak rá, hogy ha a $C(t)$ görbe (l. pl. a 11. ábra felső ágát) alulról konvex, akkor a felületi állapotok is szerepet kapnak, ha alulról konkáv, akkor az S elhanyagolható. Egyszerű számítás mutatja, hogy az utóbbi esetben a dC/dt görbéknek maximuma van. Ezt kísérletileg is ellenőriztük. Ennek részletezésére azonban nem térünk ki.

Ugyancsak a $C(t)$ görbe alapján könnyen meg lehet állapítani a letörés létezését, ha, mint az előző fejezetben megmutattuk, a T^* értéke csökken, vagy állandó marad növekvő feszültséggel.

Ha a jelenlegi vizsgálatok nem is adnak módot pontos kvantitatív elemzésre, az alábbi modell lehetőséget ad a kísérletileg kapott görbék részleges értelmezésére. Tegyük fel, hogy a letörés valóban a térfogatban következik be és a mikroplazmák kialakulásától is el lehet tekinteni.

Ha a termikus generált elektron-lyuk párok a tértöltési tartományban elegendő energiát vehetnek fel a tértől, hogy újabb töltéshordozókat hozzanak létre, akkor ez a többlet-generáció járul a kapacitásváltozás meggyorsulásához. Mivel szilíciumban az elektronok ionizációs együtthatója, $\alpha(E)$, lényegesen nagyobb, mint a lyukak $\beta(E)$ együtthatója, elegendő csak az elektronokkal foglalkozni. A generált töltéshordozók árama fog ionizálni, ezért a (35b) vagy (38) egyenlet fog módosulni. Az inverziós réteg kialakulását leíró egyenlet a következő alakban írható:

$$\frac{dP_s}{dt} = g(W - W_\infty)[1 + \alpha(E)(W - W_\infty)] \quad (42)$$

ahol $\alpha(E) = A \exp(-b/E)$ és $A[\text{cm}^{-1}]$ -ben és $b[\text{V cm}^{-1}]$ -ben írandó [37]. Egy további összefüggést a Poisson-egyenlet ad, amely összeköti a W vastagságot az E térerősséggel. A (17'') egyenlet differenciálásával adódik:

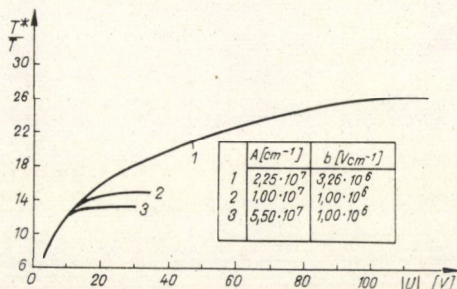
$$E = \frac{qN_D W}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \quad (43)$$

A Heiman-féle gondolatot követve, a $W(t)$ -re vonatkozó differenciálegyenletet most már könnyen felírhatjuk. Az integrálást a $[0, T^*]$ intervallumban végezve, ez a W változóban a $[W_0, W^*]$ -nak felel meg. Mielőtt tovább mennénk, a T^* definícióját a számítások elvégzéséhez alkalmas formában kell megadni. Emlékeztetnünk kell, hogy a T^* mennyiséget a teljes változás idejeként definiáltuk. Egy kvantitatív tárgyalásnál ez azzal a nehézséggel jár, hogy T^* -hoz C_∞ , azaz $t \rightarrow \infty$ tartozik. A „ $t = \infty$ ” értéket úgy lehet elkerülni, hogy megállapodunk abban, hogy a T^* -ot azzal az értékkel azonosítjuk, amikor a kapacitás eléri a C_∞ 95%-át. Nyilván ez az érték önkényes, de jelen tárgyalás szempontjából nem jelent elvi korlátozást.

E megjegyzés értelmében $W^* = W(T^*) = 1,05 W_\infty$, ahol W_∞ a végállapothoz tartozó kiürült réteg vastagsága. A számítás eredménye:

$$\int_{W^*}^{W_0} \frac{\left(1 + \frac{C_{0x}}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} W\right) dW}{[1 + A \exp(-b/E)(W - W_\infty)](W - W_\infty)} = \frac{T^*}{T}. \quad (44)$$

A (44)-ben szereplő E térerősséget a (43) egyenlet segítségével fejezzük ki W -vel és így az integrálás elvégezhető. A $T^*(U)$ függvény meghatározásához figyelembe kell venni a MOS szerkezet teljes feszültségeloszlását meghatározó (28) egyenletet. A 20. ábrán különböző A és b értékek mellett vizsgáltuk a T^*/T hányados változását az U függvényében. Mint látható, ha A és b megfelelő értékű, akkor valóban található egy olyan feszültségtartomány, ahol a T^*/T gyakorlatilag állandó marad.



20. ábra. T^*/T változása a MOS diódára kapcsolt feszültség függvényében. Számított görbék

A fenti modell ily módon a T^* feszültségfüggésének egy részét magyarázza. A T^* hirtelen csökkenése e modellből nem következik. Ennek magyarázatára valószínűleg az oxidban lejátszódó letörési jelenségek figyelembevétele szükséges. Meggyőződésünk, hogy a MOS-kapacitás tranziensének vizsgálata, beleértve a letörés körüli viselkedés elemzését, értékes információt ad a lejátszódó rekombinációs folyamatok természetéről és egyben jól használható módszer MOS-diódák minőségellenőrzéséhez.

IRODALOM

1. M. Zerbst, Z. Angew. Phys. 22, 30, 1966.
2. F. P. Heiman, Trans IEEE ED—14, 781, 1967.
3. W. Shockley and W. T. Read, Phys. Rev. 87, 835, 1952.
4. R. N. Hall, Phys. Rev. 87, 387, 1952.
5. Sz. M. Růvkin, Poliprovodnyiki v nauke i tehnyike. T. II. gl. 22, 1958.
Fotoelektricseszkie javlenia v poluprovodnyikah FM, 1963.
6. G. Pataki, Magyar Fizikai Folyóirat, 15, 551, 1967.
7. J. S. Blakemore, Semicond. Statistics, Pergamon Press, 1962.
8. G. Suryan and G. Sushila, J. Scientific and Industrial Res. 21A, 235, 1962.
9. C. T. Sah, R. N. Noyce and W. Shockley, Proc. IRE, 45, 1228, 1957.
10. R. Lindner, BSTJ 41, 803, 1962.
11. M. V. Whelan, Philips Res. Repts. Suppl. N. 6, 1970.
12. A. S. Grove, B. E. Deal, E. H. Snow and C. T. Sah, Sol. State, Electron. 8, 145, 1965.
13. E. H. Nicollian and A. Goetzberger, BSTJ 46, 1055, 1967.
14. K. H. Zaininger, RCA Rev. 27, 341, 1966.
15. M. Zerbst, H. E. Longo, Z. Angew. Phys. 19, 85, 1965.
16. B. E. Deal, A. S. Grove, E. H. Snow and C. T. Sah, J. Electrochem. Soc. 112, 308, 1965.
17. V. G. K. Reddi, Trans IEEE ED—12, 581, 1965.
18. J. Grosvalet, C. Jund, C. Matsch and R. Poirier, Surface Science 5, 49, 1966.
19. C. Jund and R. Poirier, Solid-State Electron. 9, 315, 1966.
20. S. R. Hofstein, Trans. IEEE ED—14, 785, 1967.
21. H. Reimer, „Wissenschaftliche Zeitschrift der Elektrotechnik” 11, 202, 1968.
22. J. Müller and B. Schiek, Solid-State Electron. 13, 1319, 1970.
23. L. M. Terman, Solid-State Electron. 5, 285, 1962.
24. F. P. Heiman and G. Warfield, Trans. IEEE ED—12, 167, 1965.
25. K. H. Zaininger and F. P. Heiman, Solid-State Techn. 13, 5—6, 1970.
26. C. Svensson, I. Lundström and S. Christensson, Phys. Stat. Sol. (a), 1, 389, 1970.
27. A. Goetzberger and E. H. Nicollian, Appl. Phys. Lett. 9, 444, 1967.
28. S. M. Sze, Phys. of Semiconductor Devices, J. Wiley, N. Y. 1969.
29. A. S. Grove, O. Leistiko and C. T. Sah, J. Appl. Phys. 35, 2695, 1964.
30. T. Kato and J. Niski, Japan J. Appl. Phys. 3, 377, 1964.
31. W. van Gelder and E. H. Nicollian, J. Electrochem. Soc. 118, 138, 1971.
32. A. P. Gnädinger and H. E. Talley, Solid-State Electron. 13, 1301, 1970.
33. S. D. Brotherton and P. Burton, Solid-State Electron. 13, 1591, 1970.
34. E. R. Lindner, Solid-State Electron. 13, 1597, 1970.
35. F. P. Heiman, Trans. IEEE ED—13, 855, 1966.
36. R. F. Pierret and C. T. Sah, Solid-State Electron. 13, 269—288 és 289—302, 1970.
37. S. M. Sze and G. Gibbons, Appl. Phys. Letters, 8, 111, 1966.

A LORENTZ-CSOPORT IRREDUCIBILIS UNITÉR ÁBRÁZOLÁSAI*

V. BARGMANN

I. rész

Bevezetés

E dolgozat célja: megszerkeszteni és elemezni a Lorentz-csoport irreducibilis unitér ábrázolásait, amelyek bizonyos regularitási feltételeknek tesznek eleget, melyeket alább fogalmazunk meg. Közlebből a valódi Lorentz-csoporttal foglalkozunk, azaz négy változó (x^0, x^1, x^2, x^3) mindazon homogén lineáris transzformációit vizsgáljuk, amelyek az $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ kvadratikus alakot változatlanul hagyják, melyeknek determinánsa 1-gyel egyenlő, és amelyek az idő (az x^0 koordináta) irányát nem fordítják meg. Ezt a csoportot \mathcal{Q}_4 -gyel jelöljük. Ismeretes, hogy az \mathcal{Q}_4 (valamint az alább definiálandó \mathcal{Q}_3) csoportnak csak *végtelemdimenziós* unitér ábrázolásai vannak (melyeket Hilbert-térbeli operátorok létesítenek), nem tekintve a triviális egydimenziós esetet, amikor is minden csoportelemet az 1 reprezentál [Wigner, 165. old.].¹ Az \mathcal{Q}_4 csoporton kívül megvizsgáljuk az \mathcal{Q}_3 csoportot is, mely az x^0, x^1, x^3 változók mindama homogén lineáris transzformációiból áll, amelyek változatlanul hagyják az $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2$ alakot, és ugyancsak eleget tesznek a fenti megszorításoknak.

Ez a vizsgálat, amellet, hogy esetleg vannak alkalmazásai a matematikai fizikában [vö. Dirac 2], matematikai szempontból is érdekes, mint egy nem-kompakt csoport unitér ábrázolásainak részletes analízise. Ez különösen az \mathcal{Q}_3 csoport esetére vonatkozik; itt meglehetősen teljes és explicit eredményeket kapunk. Azonfelül mind az \mathcal{Q}_3 , mind az \mathcal{Q}_4 csoport ábrázolási szerepet játszanak az *inhomogén* Lorentz-csoport unitér ábrázolásainak osztályozásában [Wigner, 192. old.]; \mathcal{Q}_3 a $P < 0$, \mathcal{Q}_4 pedig a 0_0 esethez tartozó „kis csoport” (e két csoport ábrázolásának osztályozását Wigner dolgozata nem tartalmazza). Meg kell azonban jegyezni, hogy a feltételek, amelyeket mi rovunk ki az ábrázolásokra, szigorúbbak Wigner feltételeinél.

A dolgozat tartalmának áttekintése

Mind az egy-, mind pedig a kétértékű ábrázolásokat tárgyalni fogjuk; így tehát voltaképpen \mathcal{Q}_3 és \mathcal{Q}_4 helyett a megfelelő \mathfrak{S}_3 , \mathfrak{S}_4 spinor-csoportokkal foglalkozunk. Ha az \mathfrak{S} csoportot (mely itt \mathfrak{S}_3 -at vagy \mathfrak{S}_4 -et jelentheti) a \mathfrak{H} Hilbert-téren a -ban folytonos $U(a)$ unitér operátorok ábrázolják (a a \mathfrak{S} csoport valamely eleme), Stone tétele szerint minden egyparaméteres alcsoport kifejezhető az $U_t = \exp(-itH)$ alakban, ahol H önadjungált operátor a \mathfrak{H} Hilbert-téren. Mivel másrésről minden egyparaméteres alcsoportot egy-egy infinitezimális transzformáció (az \mathfrak{s} Lie-algebra

* Annals of Mathematics 48, 568, 1947.

¹ Lásd a bibliográfiát a dolgozat végén.

egy-egy eleme) generál, a H operátorok és s elemei között megfelelés áll fenn. Legfőbb feltevésünk az lesz, hogy a H operátorok s egy ábrázolását definiálják; ezt \mathfrak{S} *infinitezimális ábrázolásának* fogjuk nevezni. Elegendő megkövetelni, hogy s két elemének összegét a megfelelő H operátorok összegének feleltessük meg. A H operátorok nem-korlátosak lévén, összegük csak akkor definiálható alkalmas módon, ha a különböző H operátorok értelmezési tartományának közös része elég nagy. Szükségünk van ennél fogva egy feltételre ezen értelmezési tartományokra vonatkozóan, melyet az 5. §-ban fogunk megfogalmazni. Ha ezek a követelmények teljesülnek, \mathfrak{S} lehetséges irreducibilis infinitezimális ábrázolásainak osztályozása elvégezhető. Explicit megszerkesztés útján megmutatjuk, hogy minden egyes infinitezimális ábrázolásnak megfelel magának \mathfrak{S} -nek egy-egy irreducibilis unitér ábrázolása. A \mathfrak{H} Hilbert-tér a definíció szerint minden esetben valamely alkalmasan választott \mathfrak{M} sokaság felett értelmezett függvénytér; \mathfrak{S} az \mathfrak{M} sokaságon mint transzformáció-csoport hat (\mathfrak{S} minden egyes a elemének megfelel \mathfrak{M} -nek egy önmagára való homomorfizmusa, melyet így jelölünk: $y=ax$, ahol x és y az \mathfrak{M} sokaság pontjai. A csoporttulajdonság megköveteli, hogy $a(bx)=(ab)x$ teljesüljön). Az $U(a)$ operátorokat a következőképpen kapjuk. Ha $f(x)$ a \mathfrak{H} tér valamely eleme, akkor

$$U(a)f(x) = \mu(a, a^{-1}x)f(a^{-1}x),$$

ahol $\mu(a, x)$ az a csoportelem és az x pont adott el nem tűnő függvénye, mely eleget tesz a $\mu(ab, x) = \mu(a, bx)\mu(b, x)$ feltételnek, és amelyet a transzformáció-csoport *multiplikátorának* nevezünk. Könnyű belátni, hogy $U(ab) = U(a)U(b)$, és a belső szorzat alkalmas definíciója mellett az $U(a)$ operátorok unitérek. Foglaljuk most röviden össze a kapott eredményeket.

I. Az \mathfrak{S}_3 csoport. Az infinitezimális ábrázolás három lineárisan független elemet tartalmaz. Ezek: H_{12} , H_{20} és H_{01} , ahol H_{kl} a $(k-l)$ sík önmagába való transzformációjának felel meg. A

$$Q = (H_{01})^2 + (H_{20})^2 - (H_{12})^2$$

operátor egy-egy irreducibilis ábrázolás esetében *skalár*, azaz $Q = q \cdot 1$, ahol q valós szám. Azonfelül a H_{12} operátor m sajátértékei — ennek az operátornak a spektruma mindig diszkrét — egyszerűek és *egész* vagy *feles* értékűek; ezek jellemzik az $(1-2)$ síkban végrehajtott elforgatásokat. A feles sajátértékek esetében \mathfrak{Q}_3 kétértékű ábrázolásait kapjuk. Az ábrázolások q értéke, valamint m értékei szerint osztályozhatók. A következő lehetőségeket találjuk: (1) C_q^0 : q bármely pozitív szám lehet, míg m minden pozitív értéket felvesz: $0, \pm 1, \dots$. (2) $C_q^{\frac{1}{2}}$: q bármely szám lehet az $\frac{1}{4} < q < \infty$ számközben, míg m az összes feles értéket veszi fel: $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$. (3) D_k^+ : k az $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ számok bármelyike lehet; q értéke $k(1-k)$, és m felveszi a $k, k+1, k+2, \dots$ értékek mindegyikét. (4) D_k^- : k az $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ számok bármelyike lehet; q egyenlő $k(1-k)$ -val, és m felveszi a $-k, -(k+1), -(k+2), \dots$ értékek mindegyikét. A C_q^0 és $C_q^{\frac{1}{2}}$ osztályokat *folytonosnak* mondjuk, mivel ezekben az esetekben q lehetséges értékei egy-egy intervallumot töltenek ki. Ezzel szemben a D_k^{\pm} osztályok a *diszkrét* jelzőt kapják, minthogy q csak a $k(1-k)$ értékeket veheti fel.

Az \mathfrak{S}_3 csoport unitér ábrázolásai, melyek a két *folytonos* osztályba, C_q^0 -ba és $C_q^{\frac{1}{2}}$ -ba tartoznak, az egységkörön értelmezett függvények terében realizálhatók, alkalmasan választott multiplikátorokkal (az egységkör a fent említett \mathfrak{M} sokaság). Az \mathfrak{Q}_3 csoport — és így a \mathfrak{S}_3 csoport is — az \mathfrak{M} sokaságon úgy hat, mint az \mathfrak{M} -et

önmagába transzformáló projektív transzformációk csoportja. Amíg $q \geq \frac{1}{4}$, a \mathfrak{H} Hilbert-tér valamennyi, az \mathfrak{M} sokaságon értelmezett négyzetesen integrálható függvényből áll; \mathfrak{H} -ban a belső szorzatot pozitív definit integrál-forma definiálja, mely függ q -tól, ha q a $0 < q < \frac{1}{4}$ „kivételes intervallumba” esik.

A *diszkrét* osztály ábrázolásait egy z komplex változó analitikus függvényeinek terén realizáljuk, alkalmasan választott multiplikátorokkal, és a belső szorzatot alkalmas módon definiálva \mathfrak{H} -ban; e függvények regulárisak a $|z| < 1$ nyílt egységkörön. Az \mathfrak{M} sokaság a nyílt egységkör, és a transzformáció-csoport az \mathfrak{M} sokaságot önmagába transzformáló valamennyi konform transzformáció csoportja.

Ha \mathfrak{H} -ban a H_{12} operátor f_m sajátvektorait választjuk alapvektoroknak, az $u_{mn}(a) = (f_m, U(a)f_n)$ mátrixelemeket mindegyik ábrázolás esetére explicite meghatározhatjuk, és mint a függvényeit tanulmányozhatjuk őket. Ezek a -ban mindenkor analitikusak, és ha az f_m -eket alkalmasan választott egységnyi abszolútértékű komplex számokkal szorozzuk meg, a $C_q^0, C_q^{\frac{1}{2}}$ osztályok mindegyike esetében analitikusak a q változóban is (beleértve a $0 < q < \frac{1}{4}$ kivételes intervallumot a C_q^0 osztály esetében). Különösen érdekes tanulmányozni az u mátrixelemek (az m, n indexeket nem tüntetjük fel) *aszimptotikus* viselkedését az \mathfrak{S}_3 csoport sokaságon. Ebből a célból bevezetjük a $\text{ch } \tau = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ összefüggéssel definiált τ nem-negatív paramétert, ahol v az a Lorentz-transzformáció segítségével összekapcsolt két vonatkoztatási rendszer relatív sebessége. Így τ nagy értékeire a következő aszimptotikus kifejezéseket kapjuk: A C_q^0 és $C_q^{\frac{1}{2}}$ ($q > \frac{1}{4}$) osztályok esetében $u \sim e^{-\tau/2} e^{\pm i\sigma} [\sigma = (q - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}]$. A C_q^0 ($0 < q < \frac{1}{4}$) esetében $u \sim e^{-\tau/2} e^{\sigma\tau} [\sigma = (\frac{1}{4} - q)^{\frac{1}{2}}]$. A D_k^{\pm} ábrázolások esetében $u \sim e^{-k\tau}$.

Nyilvánvaló, hogy C_q^0 mátrixelemei, ahol q a $0 < q < \frac{1}{4}$ kivételes intervallumba esik, a folytonos osztály többi mátrix elemeitől határozottan eltérő aszimptotikus viselkedést mutatnak: nem oszcilláló jellegűek, és lassabban csökkennek. Észszerű a mátrixelemek aszimptotikus viselkedését a \mathfrak{S}_3 csoporthoz tartozó invariáns mértékkel kapcsolatba hozni, amely mellesleg mind jobb-, mind bal-invariáns. A csoport sokaság τ és $\tau + d\tau$ közé eső részének térfogata $\text{const. sh } \tau d\tau$. Ennélfogva D_k^{\pm} mátrixelemei csak $k > \frac{1}{2}$ esetén *integrálhatók négyzetesen* az \mathfrak{S}_3 sokaságon. Négyzetesen integrálható függvények oly módon is képezhetők, hogy C_q^0 és $C_q^{\frac{1}{2}}$ (itt $q > \frac{1}{4}$) mátrixelemeit s szerint integráljuk. Ezek az eredmények általánosíthatók, úgyhogy a \mathfrak{H} ábrázolási térben választott alaprendszerrel függetlenül legyenek érvényesek.

A C_q^0 ($q > \frac{1}{4}$), $C_q^{\frac{1}{2}}$ és D_k^{\pm} ($k > \frac{1}{2}$) ábrázolások mátrixelemei *ortogonalitási összefüggéseknek* tesznek eleget; ezek hasonlóak a *kompakt* csoportok irreducibilis ábrázolásaira érvényes ortogonalitási összefüggésekhez. Végül meg lehet mutatni, hogy D_k^{\pm} ($k > \frac{1}{2}$) mátrixelemei, valamint C_q^0 ($q > \frac{1}{4}$) és $C_q^{\frac{1}{2}}$ mátrixelemeinek (s szerint képezett) integráljai sűrű halmazt képeznek az \mathfrak{S}_3 sokaságon értelmezett négyzetesen integrálható függvények Hilbert-terében. (Érdekes, hogy ez csupán az összes unitér ábrázolás egy részének mátrixelemeire érvényes.)

II. Az \mathfrak{S}_4 csoport. Az infinitezimális ábrázolás lineárisan független elemeiként választhatjuk a következő elemeket: $H_{12}, H_{23}, H_{31}, H_{01}, H_{02}, H_{03}$. Adott irreducibilis ábrázolás esetében az alábbi két operátor:

$$Q = (H_{01})^2 + (H_{02})^2 + (H_{03})^2 - (H_{12})^2 - (H_{23})^2 - (H_{31})^2,$$

$$R = H_{01}H_{23} + H_{02}H_{31} + H_{03}H_{12},$$

skalár, azaz $Q = q \cdot 1$ és $R = r \cdot 1$, ahol q és r valós számok. A $(H_{12})^2 + (H_{23})^2 + (H_{31})^2$ operátor spektruma mindig *diszkrét* és $j(j+1)$ alakú számokból áll; a $j(j+1)$ sajátérték a háromdimenziós forgáscsoport $(2j+1)$ -dimenziós irreducibilis ábrázolásának felel meg, és ezen ábrázolások mindegyike legfeljebb egyszer lép fel. A j értékek vagy *egészek*, vagy *felesek*; az utóbbi esetben az \mathfrak{U}_4 csoport kétértékű ábrázolásával van dolgunk. A lehetséges ábrázolásokat a következőképpen osztályozhatjuk: 1. C_q^0 : q bármely *pozitív* szám lehet, míg j a 0, 1, 2, ... értékek mindegyikét felveszi, és $r=0$. (2) $C_{k,r}$: r bármely *valós* szám lehet, k az $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ értékek egyikét veszi fel. Ebben az esetben $q = 1 - k^2 + (r/k)^2$, és j a $k, k+1, k+2, \dots$ értékek mindegyikét felveszi. Az \mathfrak{S}_3 csoport esetében talált diszkrét osztálynak most nincs megfelelője. A C_q^0 ábrázolások esetében van egy kivételes intervallum: $0 < q < 1$.

Az \mathfrak{S}_4 csoport unitér ábrázolásai a fentiekben leírtakhoz meglehetősen hasonló módon realizálhatók. Az \mathfrak{M} sokaság minden esetben az egységgömb, a transzformációcsoport pedig azon projektív transzformációk csoportja, amelyek a gömböt önmagába transzformálják. Alkalmasan választott multiplikátorokkal unitér $U(a)$ transzformációkat kapunk; \mathfrak{H} -t az egységgömbön értelmezett valamennyi négyzetesen integrálható függvény definiálja, kivéve a C_q^0 ábrázolást, ha q a $0 < q < 1$ kivételes intervallumba esik, amikor is a \mathfrak{H} térbeli belső szorzatot ismét egy q -tól függő pozitív definit integrál-forma definiálja.

Ami az ábrázolások mátrixelemeit illeti, az eredmények nem annyira egyszerűek és teljeseek, mint az \mathfrak{S}_3 csoport esetében. A mátrixelemek analitikus természete és aszimptotikus viselkedése könnyen meghatározható. Alaprendszerként \mathfrak{H} -ban azon f_{jm} vektorokat használjuk, amelyek a $(H_{12})^2 + (H_{23})^2 + (H_{31})^2$, H_{12} operátorok mindegyikének sajátvektorai. Elhagyva az indexeket és felhasználva a fent már használt τ paramétert, τ nagy értékeire kapjuk: C_q^0 ($q > 1$) esetében $u \sim e^{-\tau} e^{\pm i\sigma\tau}$ [$\sigma = (q-1)^{\frac{1}{2}}$]. A C_q^0 ($0 < q < 1$) esetben $u \sim e^{-\tau} e^{\sigma\tau}$ [$\sigma = +(1-q)^{\frac{1}{2}}$]. Végül a $C_{k,r}$ esetben $u \sim e^{-\tau} e^{\pm i\tau r/k}$. A fent tett észrevételhez hasonló megjegyzés vonatkozik C_q^0 mátrixelemeire, ha q a $0 < q < 1$ kivételes intervallumba esik.

A \mathfrak{S}_4 esetben a csoport sokaság τ és $\tau + d\tau$ közé eső részének térfogata const. $(sh \tau)^2 d\tau$, s ebből következik, hogy a mátrixelemek egyike sem integrálható négyzetesen, és hogy C_q^0 ($q > 1$) mátrixelemeit s szerint és $C_{k,r}$ mátrixelemeit r szerint integrálva a csoport sokaságon négyzetesen integrálható függvényeket kapunk. Ortogonalitási összefüggések most is leszámaztathatók, kivéve a C_q^0 ábrázolást, ha q a kivételes intervallumba esik.

A II. rész függelékében Dirac *expanzor-ábrázolásait* [Dirac 2] analizáljuk. Ezek reducibilis ábrázolások. Megmutatjuk, hogy azok tartalmazzák az összes C_q^0 ($q > 1$) ábrázolást és a $C_{k,0}$ ábrázolásokat. Azonfelül bebizonyítjuk a különböző homogén expanzor-ábrázolások ekvivalenciáját.

Az I. rész tartalma. E dolgozat I. része főként az \mathfrak{S}_3 csoporttal foglalkozik. A II. rész \mathfrak{S}_4 -et tárgyalja. Meg kell azonban jegyezni, hogy az 1–3. §§ és az 5. § egy része mindkét csoport tárgyalásának alapját képezi és — általánosságban szólva — az \mathfrak{S}_4 csoport analízisének módszere közvetlen általánosítása az I. részben használt módszernek. Az 1. §-ban áttekintjük a Lie-csoportokat, oly mértékig, amennyire azt a következő vizsgálatok szükségessé teszik. A 2. és 3. §§ a Lorentz-csoportok és az \mathfrak{S}_3 , \mathfrak{S}_4 spinor-csoportok tárgyalását tartalmazza. A 4. § nagyobb részletességgel tárgyalja az \mathfrak{S}_3 csoportot és annak sokaságát. Az 5. §-ban \mathfrak{S}_3 infinitzimális ábrázolásait osztályozzuk; \mathfrak{S}_3 megfelelő unitér ábrázolásainak megszerkesztését a 6–9. §§-ban végezzük el. A 10–11. §§ a mátrixelemeket mint a csoport-

sokaságon értelmezett függvényeket tárgyalja, az ortogonalitási összefüggéseket a 12. §-ban vezetjük le, a mátrixelemek teljességét pedig a 13. §-ban mutatjuk meg. A függelék néhány megjegyzést tartalmaz az infinitezimális operátorokról.

Egy későbbi alkalommal a szerző tárgyalni kíván több, ebben a dolgozatban nem érintett kérdést, különösen az inhomogén Lorentz-csoport ábrázolásaival és a magasabb spinű részecskék téregyenleteivel való kapcsolatot ([Dirac 1], [Fierz 1, 2]).

A dolgozat főbb eredményeit a szerző az 1940–1942. években dolgozta ki; a közben eltelt évek folyamán nem volt alkalma arra, hogy elkészítse a kéziratot.

Köszönetnyilvánítás

A szerző szeretné kifejezni őszinte köszönetét Wolfgang Pauli professzornak, aki e dolgozat témáját sugalmazta, érdeklődéséért, amellyel a vizsgálatok előrehaladását kísérte, és sok vele folytatott ösztönző eszmecseréért. Szintén le van kötelezve Neumann János és Wigner Jenő professoroknak értékes megjegyzéseikért.

1. §. Előzetes megjegyzések a Lie-csoportokról és a multiplikátorokról

Ebben a szakaszban több fontos képletet gyűjtöttünk össze; ezenkívül bevezetjük a dolgozatban használt jelöléseket. Speciálisan tárgyalni fogjuk a bevezetőben említett multiplikátorokat.

1a. *Bevezetés.* Legyen \mathfrak{G} egy n -dimenziós összefüggő Lie-csoport. Ennek elemeit az a, b, \dots szimbólumokkal fogjuk jelölni, egységelemét pedig e -vel. Feltesszük, hogy a csoport sokaság, amelyet ugyancsak \mathfrak{G} -vel jelölünk, egyetlen koordináta-rendszerrel lefedhető, úgyhogy minden a csoportelem leírható n számú valós változó, a csoport a^1, \dots, a^n paraméterei segítségével.² (Az a^i változók által felvett értékeket minden egyes esetben külön megadjuk.)

Az ab szorzat paramétereit n számú Φ^i analitikus függvény határozza meg:

$$(ab)^i = \Phi^i(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n) \equiv \Phi^i(a, b), \quad 1 \leq i \leq n;$$

az a csoportelem a^{-1} inverzének paramétereit n számú \mathfrak{I}^i analitikus függvény adja meg:

$$(a^{-1})^i = \mathfrak{I}^i(a^1, \dots, a^n) \equiv \mathfrak{I}^i(a), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ismeretes, hogy a Φ^i függvényeknek az a^k változók szerint képezett parciális deriváltjai a következőképpen fejezhetők ki:

$$\frac{\partial (ab)^i}{\partial a^k} = \frac{\partial \Phi^i}{\partial a^k} = \chi_s^i(ab) \psi_k^s(a). \quad (1.1)$$

Használni fogjuk a tenzorkalkulusban szokásos megállapodást, mely szerint az ismétlődő indexekre összegezni kell. Itt χ_s^i n^2 számú analitikus függvényt jelöl, és

² A dolgozat második részében arra kényszerülünk, hogy — lényegében véve — gömbi polárkoordinátákat használjunk, azaz olyan koordinátákat, amelyek nem mindenütt regulárisak. Ez azonban semmilyen nehézségre nem vezet, s a jelen tárgyalásban figyelmen kívül hagyjuk ezt a komplikációt.

a ψ_k^s függvények a $\chi_s^i(a)\psi_k^s(a)=\delta_k^i$ egyenleteken keresztül állnak velük kapcsolatban, azaz: a (ψ_k^s) mátrix inverze a (χ_k^s) mátrixnak. A $\chi_k^s(a)$ függvényeket egyértelműen meghatározzák az e egységelem esetében felvett értékeik; ezek a $\chi_k^s(e)$ értékek tetszőlegesen választhatók, feltéve, hogy determinánsuk különbözik zérustól.³

Végezetül a χ_s^i függvények, melyek a csoport infinitezimális transzformációit határozzák meg, a következő felcserélési szabályoknak tesznek eleget:

$$\frac{\partial \chi_k^i(a)}{\partial a^s} \chi_l^s(a) - \frac{\partial \chi_l^i(a)}{\partial a^s} \chi_k^s(a) = c_{kl}^r \chi_r^i(a), \quad (1.2)$$

ahol c_{kl}^r a csoport szerkezeti állandóinak a jele. Fennáll: $c_{kl}^i = -c_{lk}^i$.

Ha képezzük a $\Phi^i = (ab)^i$ függvények deriváltjait b paramétere szerint, (1.1)-hez hasonló egyenletrendszert kapunk:

$$\frac{\partial (ab)^i}{\partial b^k} = \frac{\partial \Phi^i}{\partial b^k} = \hat{\chi}_s^i(ab) \hat{\psi}_k^s(b), \quad (1.3)$$

ahol $\hat{\chi}_s^i(a) \hat{\psi}_k^s(a) = \delta_k^i$. A $\hat{\chi}_s^i(a)$ függvényeket ismét meghatározzák $\hat{\chi}_s^i(e)$ értékei; ezeket oly módon választjuk, hogy

$$\hat{\chi}_s^i(e) = \chi_s^i(e) \quad (1.3a)$$

teljesüljön. A $\hat{\chi}_s^i$ függvényekre vonatkozó felcserélési szabályokat a

$$\frac{\partial \hat{\chi}_k^i(a)}{\partial a^s} \hat{\chi}_l^s(a) - \frac{\partial \hat{\chi}_l^i(a)}{\partial a^s} \hat{\chi}_k^s(a) = c_{lk}^r \hat{\chi}_r^i(a) \quad (1.4)$$

képlet adja meg, ugyanazon c állandókkal. (Itt nem tárgyaljuk a χ_s^i és a $\hat{\chi}_s^i$ függvények között fennálló egyéb összefüggéseket.)

1b. *Egyparáméteres alcsoportok.* A \mathfrak{G} csoport Lie-algebrája és az adjungált csoport. A \mathfrak{G} csoport egy egyparáméteres alcsoportját oly módon definiálhatjuk, hogy megadunk egy $C: a(t)$ analitikus görbét $(-\infty < t < \infty)$ a csoport sokaságon, melyre teljesül az

$$a(s)a(t) = a(s+t) \quad (1.5)$$

összefüggés⁴ tetszőleges s, t értékek mellett. Nyilvánvaló, hogy $a(0) = e$ és $a(-s) = (a(s))^{-1}$. Az (1.5) összefüggésből következik, hogy az n számú $\kappa^i = \psi_r^i(a) \frac{da^r}{dt}$ kifejezés $(i=1, 2, \dots, n)$ állandó a C görbe mentén; ily módon az

$$\frac{da^i}{dt} = \kappa^r \chi_r^i(a) \quad (1.6)$$

egyenleteket kapjuk konstans κ^r mellett. Megfordítva, minden (1.6) alakú dif-

³ Ha az (1.1) egyenlet érvényes a $\chi_k^i(a)$ és $\chi_k^i(a)$ rendszerek mindegyikére, akkor $\chi_k^i(a) = \chi_s^i(a) \gamma_k^s$, ahol a γ_k^s konstansok determinánsa zérustól különböző.

⁴ Beleértjük a degenerált esetet is, amikor C egy pontra redukálódik, úgyhogy $a(t) = e$ minden t -re.

ferenciálegyenlet-rendszer — tetszőlegesen választott κ^r állandók mellett — egy-paraméteres alcsoportot szolgáltat. Megjegyzendő, hogy a C görbén

$$\frac{da^i}{dt} = \kappa^r \chi_r^i(a) \quad (1.6a)$$

ugyancsak fennáll ugyanazon κ^r állandók mellett [az (1.3a) normálás folyamánaképpen].

Legyen most $\chi^i(a) = \kappa^r \chi_r^i(a)$ és jelöljük χ -vel a \mathfrak{G} -n értelmezett $(\chi^1(a), \dots, \chi^n(a))$ vektorteret. Ekkor azt mondjuk, hogy az $a(t)$ egydimenziós alcsoportot a χ *infinitezimális transzformáció* generálja. Képlet segítségével ezt így fejezzük ki:

$$a(t) = \exp(t\chi). \quad (1.7)$$

Ha α zérustól különböző konstans, könnyű belátni, hogy

$$\exp(t'\chi') = \exp(t\chi), \quad \chi' = \alpha\chi, \quad t' = \alpha^{-1}t; \quad (1.7a)$$

ez azt mutatja, hogy χ és $\alpha\chi$ ugyanazt az alcsoportot generálja. Ha a $(\chi_r^1(a), \dots, \chi_r^n(a))$ vektorteret χ_r -rel jelöljük, χ előállítható mint a χ_r -ek lineáarkombinációja (állandó együtthatókkal), azaz

$$\chi = \kappa^1 \chi_1 + \dots + \kappa^n \chi_n = \kappa^r \chi_r. \quad (1.8)$$

Eszerint a \mathfrak{G} csoport χ infinitezimális transzformációi egy n -dimenziós \mathfrak{g} vektorteret alkotnak, \mathfrak{G} Lie-algebráját. Valóban, ha χ és χ' két tetszőleges eleme \mathfrak{g} -nek, minden $\alpha\chi + \alpha'\chi'$ lineáris kombináció (itt α és α' állandó együtthatók) \mathfrak{g} -hez tartozik, és (1.8) folytán \mathfrak{g} pontosan n lineárisan független elemet tartalmaz; ezek lehetnek pl. maguk a χ_r -ek ($1 \leq r \leq n$). (Abból, hogy a χ_r^i -ek determinánsa nem tűnik el, következik, hogy a χ_r -ek függetlenek.)

Definiáljuk továbbá \mathfrak{g} két elemének, χ -nek és χ' -nek $[\chi\chi']$ szorzatát vagy zárójeles kifejezését a következőképpen: Legyenek χ^i , χ'^i és χ''^i rendre χ , χ' , ill. $\chi'' = [\chi\chi']$ komponensei. Ekkor

$$\chi''^i = \chi^s \frac{\partial \chi'^i}{\partial a^s} - \chi'^s \frac{\partial \chi^i}{\partial a^s}. \quad (1.9)$$

Az (1.2) felcserélési szabályok mutatják, hogy \mathfrak{g} bármely két χ , χ' elemének zárójeles kifejezése hozzátartozik \mathfrak{g} -hez. Pontosabban, ha $\chi = \kappa^r \chi_r$, $\chi' = \kappa'^r \chi_r$, akkor $\chi'' = [\chi\chi'] = \kappa''^r \chi_r$, ahol

$$\kappa''^r = c_{ij}^r \kappa'^i \kappa^j.$$

Az n számú χ_r báziselem segítségével a felcserélési szabályok így írhatók:

$$[\chi_l \chi_k] = c_{kl}^r \chi_r. \quad (1.10)$$

Ezek jellemzik a \mathfrak{g} Lie-algebrát.

A $[\chi\chi']$ zárójeles kifejezés χ -ben és χ' -ben antiszimmetrikus, azaz: $[\chi'\chi] = -[\chi\chi']$, mind a két tényezőben lineáris, és bármely három χ , χ' , χ'' elemre fennáll a Jacobi-féle azonosság: $[\chi[\chi'\chi'']] + [\chi'[\chi\chi'']] + [\chi''[\chi\chi']] = 0$.

Legyen $a(t) = \exp(t\chi)$ ($\chi \in \mathfrak{g}$) a \mathfrak{G} csoport egy egyparaméteres alcsoportja, b pedig \mathfrak{G} -nek egy rögzített eleme. Legyen $a'(t) = ba(t)b^{-1}$, ekkor $a'(s)a'(t) = a'(s+t)$.

Eszerint $a'(t)$ szintén egyparaméteres alcsoportja \mathfrak{G} -nek; ez az alcsoport $a(t)$ -nek konjugáltja, s azt valamely $\chi' \in \mathfrak{g}$ infinitezimális transzformáció generálja. Jelöljük χ' -t így: $b\chi b^{-1}$; ekkor írható:

$$b \exp(t\chi) b^{-1} = \exp t (b\chi b^{-1}). \quad (1.11)$$

Ez az egyenlet felfogható mint a $b\chi b^{-1}$ szimbólum definíciója. Ismeretes, hogy $b\chi b^{-1}$ lineáris χ -ben, azaz bármely két χ, χ' infinitezimális transzformációra fennáll: $b(\alpha\chi + \alpha'\chi')b^{-1} = \alpha b\chi b^{-1} + \alpha' b\chi' b^{-1}$, ahol α, α' tetszőleges állandók. Következésképpen a \mathfrak{G} csoport valamely rögzített b eleme mellett a $b\chi b^{-1}$ operáció a \mathfrak{g} Lie-algebra önmagára való lineáris leképezését definiálja. Legyen $\chi = \kappa^r \chi_r$, a \mathfrak{g} Lie-algebra egy eleme; ekkor $\chi' = b\chi b^{-1} = \kappa'^r \chi_r$, ahol $\kappa'^r = s_l^r(b) \kappa^l$. Ezen lineáris transzformáció együtthatói definiálhatók a

$$b\chi_l b^{-1} = s_l^r(b) \chi_r, \quad 1 \leq l \leq n \quad (1.12)$$

egyenletek segítségével. A $b\chi b^{-1}$ transzformáció lineáris volta, és az $e\chi e^{-1} = \chi$ $b'(b\chi b^{-1})b'^{-1} = (bb')\chi(b'b)^{-1}$ összefüggések alapján következtethetünk

$$s_l^r(e) = \delta_l^r, \quad s_l^r(b') s_l^i(b) = s_l^i(bb') \quad (1.13)$$

fennállására, ahol b és b' a \mathfrak{G} csoport bármely két eleme lehet. Az (1.13) egyenletek azt mutatják, hogy az $s_l^i(b)$ lineáris transzformációk csoportot alkotnak, a \mathfrak{G} -nek megfelelő *adjungált csoportot*, mely a \mathfrak{G} csoportnak lineáris ábrázolása.

Megjegyzés. Amint arra az 1a. §-ban rámutattunk, a $\chi_s^i(a)$ függvényeket a $\chi_s^i(e)$ -k választása határozza meg; teljesülnie kell azon feltételnek, hogy a $\chi_s^i(e)$ -k determinánsa zérustól különböző. Amint a fenti fejtegetésekből látható, ez más szóval azt jelenti, hogy n lineárisan független χ_1, \dots, χ_n báziselemet választunk \mathfrak{g} -ben.

1c. *Invariáns integrálás a csoporton.* Legyen $v_r(a)$ a \mathfrak{G} csoporton definiált pozitív folytonos függvény. Ha bármely $f(a)$ folytonos függvényre és \mathfrak{G} bármely rögzített b csoportelemére teljesül

$$\int_{\mathfrak{G}} \dots \int f(a) v_r(a) da^1 \dots da^n = \int_{\mathfrak{G}} \dots \int f(ab) v_r(a) da^1 \dots da^n, \quad (1.14)$$

$v_r(a)$ jobb-invariáns integrálást definiál a csoporton, feltéve, hogy az (1.14) integrálok léteznek. Ha találtunk ilyen v_r függvényt, ki lehet dolgozni a jobb-invariáns Lebesgue-integrálás elméletét, és az (1.14) egyenletet ki lehet terjeszteni mérhető függvényekre [vö. Weil]. Az (1.1) egyenlet alapján könnyű megállapítani, hogy a v_r -re kirótt feltétel egyenértékű a $v_r(a)\Delta(a) = \text{const}$ összefüggéssel, ahol $\Delta(a)$ a $\chi_s^i(a)$ függvények determinánsa. Következésképpen

$$v_r(a) = \gamma(\Delta(a))^{-1}, \quad \Delta(a) = \text{Det}(\chi_s^i(a)), \quad (1.15)$$

ahol a γ állandót úgy választjuk, hogy $v_r(a)$ pozitív legyen.

Hasonlóképpen, a bal-invariáns integrálást a csoporton az

$$\int_{\mathfrak{G}} \dots \int f(a) v_l(a) da^1 \dots da^n = \int_{\mathfrak{G}} \dots \int f(ba) v_l(a) da^1 \dots da^n \quad (1.16)$$

képlet definiálja, ahol v -re és f -re ugyanazok a feltételek érvényesek, mint fent. A $v_l(a)$ függvényre kapjuk:

$$v_l(a) = \gamma(\hat{A}(a))^{-1}, \quad \hat{A}(a) = \text{Det}(\hat{\chi}_s^i(a)), \quad (1.17)$$

ahol γ konstans. Az (1.15), (1.17) egyenletekben szereplő két állandó egyenlőnek választható, minthogy a normálás tetszőleges.

A $v_r(a)$, $v_l(a)$ függvények egymással akkor és csak akkor egyeznek meg, ha

$$c_{lr}^i = 0. \quad (1.18)$$

Csakugyan, meg lehet mutatni, hogy $\chi_r^i \partial / \partial a^i (\log A(a) - \log \hat{A}(a)) = c_{lr}^i$. Ha az (1.18) alatt felírt n feltétel teljesül, az $\int \dots \int f(a) v(a) da^1 \dots da^n$ integrál, ahol $v(a) = v_r(a) = v_l(a)$, egyszerre jobb- és bal-invariáns; röviden $\int f(a) da$ -val fogjuk jelölni.

A következőkben csak olyan csoportokkal foglalkozunk, amelyekre $v_r(a) = v_l(a)$ teljesül.

1d. A \mathcal{G} csoport realizációja az \mathcal{M} sokaságon ható transzformációkkal. Legyen \mathcal{M} egy valós (vagy komplex) m -dimenziós sokaság, melyet m valós (vagy komplex) x^1, \dots, x^m koordináta ír le. Az \mathcal{M} sokaság pontjait jelölje x, y, \dots . Azt mondjuk, hogy a \mathcal{G} csoport az \mathcal{M} sokaságon hat, ha \mathcal{G} -nek mindegyik a eleméhez definiálva van egy-egy $y = ax$ transzformáció (homeomorfizmus), mely \mathcal{M} -et önmagára képezi le oly módon, hogy teljesül $ex = x$, és $b(ax) = (ba)x$, ahol a, b a \mathcal{G} csoport tetszőleges két eleme. Speciálisan következik ebből, hogy $a^{-1}(ax) = a(a^{-1}x) = x$.

Feltesszük továbbá, hogy a transzformáció *analitikus*, azaz: m analitikus függvény definiálja:

$$(ax)^i = Z^i(a^1, \dots, a^n, x^1, \dots, x^m) \equiv Z^i(a, x), \quad 1 \leq i \leq m. \quad (1.19)$$

A Z^i függvényeknek az a^k -k szerint képezett parciális deriváltjai kifejezhetők a

$$\frac{\partial (ax)^i}{\partial a^k} = \frac{\partial Z^i}{\partial a^k} = \lambda_r^i(ax) \psi_k^r(a), \quad 1 \leq i \leq m; \quad 1 \leq k \leq n \quad (1.20)$$

alakban. Az $m \cdot n$ számú $\lambda_r^i(x)$ mennyiség analitikus függvénye az x^1, \dots, x^m koordinátáknak. Ezek jellemzik az infinitezimális transzformációkat, és teljesítik a

$$\frac{\partial \lambda_k^i(x)}{\partial x^j} \lambda_l^j(x) - \frac{\partial \lambda_l^i(x)}{\partial x^j} \lambda_k^j(x) = c_{kl}^r \lambda_r^i(x), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq k, l \leq n \quad (1.21)$$

felcserélési összefüggéseket.

Az $y = ax$ transzformáció az \mathcal{M} -en értelmezett $f(x)$ függvény lineáris transzformációját eredményezi. Valóban, az $f(x)$ függvényhez hozzárendelhetjük a $g(y) = f(x)$ függvényt, ahol $y = ax$; így tehát $g(y) = f(a^{-1}y)$. Minthogy g függ a -tól, részletesebben írhatjuk:

$$g(a, y) = T(a)f(y) = f(a^{-1}y). \quad (1.22)$$

Az ezen egyenlet segítségével definiált $T(a)$ operátorok nyilvánvalóan lineárisak f -ben. Azonfelül fennáll:

$$T(a)(T(b)f) = T(ab)f, \quad \text{vagy} \quad T(a)T(b) = T(ab), \quad (1.23)$$

és $T(e)$ az egységoperátor, azaz $T(e)f=f$. Eszerint $T(a)$ a \mathfrak{G} csoport lineáris ábrázolását szolgáltatja, melyet *standard ábrázolásnak* fogunk nevezni.

Ha f folytonos második deriváltakkal rendelkezik (ill. analitikus, amennyiben \mathfrak{M} komplex sokaság), megkaphatjuk a $T(a)$ -k létesítette ábrázolás infinitezimális operátorait. Az (1.22) egyenlet szerint $g(a, ay)=f(y)$ független a -tól; (1.20) felhasználásával kapjuk:

$$\frac{\partial g(a, x)}{\partial a^k} + \psi_k^r(a) \lambda_r^i(x) \frac{\partial g(a, x)}{\partial x^i} = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (1.24)$$

Vezessük be most a

$$A_r \equiv -\lambda_r^j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (1 \leq r \leq n) \quad (1.25)$$

és

$$\chi_r \equiv \chi_r^i(a) \frac{\partial}{\partial a^i} \quad (1 \leq r \leq n) \quad (1.26)$$

differenciáloperátorokat. [Megjegyezzük, hogy az (1.26) differenciáloperátort ugyanazzal a szimbólummal jelöljük, mint a \mathfrak{g} Lie-algebra megfelelő elemét.] Általánosabban, ha $\chi = \kappa^r \chi_r$ eleme \mathfrak{g} -nek, írjuk:

$$\chi \equiv \chi^i(a) \frac{\partial}{\partial a^i}, \quad \chi^i(a) = \kappa^r \chi_r^i(a) \quad (1.27)$$

és

$$A_\chi \equiv -\lambda_\chi^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \lambda_\chi^j(x) = \kappa^r \lambda_r^j(x). \quad (1.28)$$

Ezekután (1.24)-ből származtassuk le a

$$\chi g(a, x) = \chi(T(a)f(x)) = A_\chi g(a, x) = A_\chi(T(a)f(x)) \quad (1.29)$$

összefüggést, tetszőleges $\chi \in \mathfrak{g}$ mellett; itt χ az (1.27) differenciáloperátor.

A χ operátort segítségül hívva, az (1.20) egyenleteket helyettesíthetjük a

$$\chi(ax^i) = \lambda_\chi^i(ax) \quad (1.29a)$$

egyenlettel.

Legyen $a(t) = \exp(t\chi)$ egy egyparaméteres alcsoport, és jelöljük a $T(a(t))$ operátort T_t -vel. Minthogy $da^i/dt = \chi^i(a)$, (1.24)-ből következik, hogy

$$\frac{\partial}{\partial t} (T_t f(x)) = A_\chi (T_t f(x)). \quad (1.30)$$

Tekintsük a \mathfrak{g} Lie-algebra χ, χ' elemeinek megfelelő (1.27) operátorokat. Ekkor a $[\chi\chi']$ zárójeles kifejezésnek a $\chi\chi' - \chi'\chi$ lineáris operátor felel meg, amint az (1.9)-ből látható. Konzisztens módon kimondhatjuk tehát a definíciót: az A, B lineáris operátorok zárójeles kifejezése egyenlő a kommutátorukkal, azaz

$$[AB] = AB - BA. \quad (1.31)$$

Ezzel a definícióval (1.21)-ből kapjuk, amennyiben a A_k és A_l operátorok folytonos

második deriváltakkal rendelkező f függvényre hatnak (felhasználjuk, hogy $\partial/\partial x^i \cdot \partial f/\partial x^k = \partial/\partial x^k \cdot \partial f/\partial x^i$:

$$[A_k A_l] = c_{kl}^r A_r. \quad (1.32)$$

Az (1.28) egyenletből következik, hogy $A_{(\alpha\chi + \alpha'\chi')} = \alpha A_\chi + \alpha' A_{\chi'}$, ahol α, α' tetszőleges állandók, χ és χ' pedig \mathfrak{g} tetszőleges elemei. Ha még összevetjük (1.32)-t (1.10)-zel, kapjuk:

$$[A_\chi A_{\chi'}] = A_{[\chi\chi']}. \quad (1.33)$$

[Ez az összefüggés közvetlenül (1.19) alapján is igazolható; vö. 1g. §, különösen (1.48).]

1e. *Megjegyzések a \mathfrak{G} csoport lineáris ábrázolásairól.* Legyen az \mathfrak{M} sokaság valós vagy komplex m -dimenziós vektortér, az $y=ax$ transzformációk pedig legyenek lineáris transzformációk, melyek \mathfrak{M} -re hatnak. Ekkor $ax=U(a)x$, ahol $U(a)$ mátrix, mely az a csoportelemtől függ. Fennáll: $U(e)=1$ (az egységmátrix), $U(a)U(b)=U(ab)$ és $U(a^{-1})=(U(a))^{-1}$. Az 1d. §-ban bevezetett $\lambda_i^r(x)$ -nek x -ben lineárisnak kell lennie, úgyhogy $\lambda_i^r(x)=l_{ij}^r x_j$. Jelölje L_r az l_{ij}^r elemekkel rendelkező konstans mátrixot; (1.20)-ból és (1.21)-ből kapjuk:

$$\frac{\partial U(a)}{\partial a^k} = \psi_k^r(a) L_r U(a) \quad (1.34)$$

és

$$[L_k L_l] = L_k L_l - L_l L_k = c_{kl}^r L_r. \quad (1.35)$$

Megemlíttük, hogy $U(a)$ deriváltjai a

$$\frac{\partial U(a)}{\partial a^k} = \hat{\psi}_k^r(a) U(a) L_r \quad (1.34a)$$

ekvivalens alakban is kifejezhetők, ugyanazon L_r mátrixokkal.

A \mathfrak{g} Lie-algebra tetszőleges $\chi = \chi^r \chi_r$ eleméhez rendeljük hozzá az $L_\chi = \chi^r L_r$ mátrixot. Ily módon \mathfrak{g} egy mátrix-ábrázolását kapjuk; fennáll:

$$L_{(\alpha\chi + \alpha'\chi')} = \alpha L_\chi + \alpha' L_{\chi'}, \quad L_{[\chi\chi']} = [L_\chi L_{\chi'}]. \quad (1.36)$$

Az (1.34) egyenletek helyettesíthetők a

$$\chi U(a) = L_\chi U(a) \quad (1.37)$$

egyenlettel, ahol a bal oldalon χ az (1.27) differenciáloperátort jelenti. Az $a(t) = \exp(t\chi)$ egyparaméteres alcsoport esetében kapjuk: $(dU_t)/dt = L_\chi U_t$, ahol $U_t = U(a(t))$. Minthogy $U_0=1$, ezen differenciálegyenlet megoldása $U_t = \exp(tL_\chi)$;

az exponenciális függvényt az $\exp(tL_\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k/k! L_\chi^k$ hatványsor⁵ definiálja. Legyen most b a \mathfrak{G} csoport egy rögzített eleme; vizsgáljuk az $a'(t) = ba(t)b^{-1} = \exp(t\chi')$ alcsoportot, ahol $\chi' = b\chi b^{-1}$, és a megfelelő $U'_t = U(a'(t)) = U(b)U_t U(b)^{-1}$ mátrixokat. Fennáll: $dU'_t/dt = L_{\chi'} U'_t$, és közvetlenül kapjuk:

$$L_{\chi'} = U(b) L_\chi U(b)^{-1}, \quad \chi' = b\chi b^{-1}. \quad (1.38)$$

⁵ Ebben a kifejezésben a k felső index természetesen a k -adik hatványt jelöli.

Ezt az egyenletet χ_l -re alkalmazva, s felhasználva az adjungált csoportra vonatkozó korábbi eredményeinket [vö. (1.12)], kapjuk:

$$U(b)L_lU(b)^{-1} = s_l^*(b)L_r, \quad 1 \leq l \leq n. \quad (1.39)$$

Később, amikor majd a Lorentz-csoport unitér ábrázolásait szerkesztjük meg (vö. 5. §), ezen § eredményeit ki fogjuk terjeszteni végtelen mátrixok (a Hilbert-térben ható operátorok) esetére. Az $U(a)$ és L_x mátrixokat $T(a)$, ill. L_x típusú operátorokkal fogjuk helyettesíteni. Az (1.29), (1.33), valamint az (1.37) és (1.36) egyenletek között az analógia nyilvánvaló.

1f. *Multiplikátorok.* A következőkben szükségünk lesz a fent bevezetett standard ábrázolás [vö. (1.22)] bizonyos általánosítására. Defináljunk az \mathfrak{M} sokaságon értelmezett minden $f(x)$ függvény, valamint az $a \in \mathfrak{G}$ csoportelem mellett egy $T(a)f$ transzformációt a

$$g(a, x) = T(a)f(x) = \mu(a, a^{-1}x)f(a^{-1}x) \quad (1.40)$$

egyenlettel, ahol $\mu(a, x)$ az $a \in \mathfrak{G}$ csoportelem és az $x \in \mathfrak{M}$ koordináták rögzített valós vagy komplex függvénye (μ tehát ugyanaz, bármilyen legyen is az f függvény). A $T(a)$ -k lineáris operátorok. Felmerül a kérdés, milyen feltételek mellett szolgáltatják a \mathfrak{G} csoport ábrázolását, mely az

$$(1) \quad T(e)f = f, \quad (2) \quad T(a)(T(b)f) = T(ab)f$$

tulajdonságú minden f függvényre. Ha $\mu(a, x)$, visszajutunk a standard ábrázoláshoz, amit e szakasz hátralevő részében a 0 felső indexszel fogunk megjelölni: $(T^0(a)f = f(a^{-1}x))$. A μ függvényre fennáll:

$$\mu(e, x) = 1, \quad \mu(ab, x) = \mu(a, bx)\mu(b, x). \quad (1.41)$$

Az első feltétel $T(e)f = f$ -ből következik. A második feltétel leszámaztatása céljából vezessük be az $f_1 = T(b)f$, $f_2 = T(a)f_1$ jelölést, ahol $f(x)$ tetszőleges függvény. A (1.40) összefüggés alapján írható: $f_1(x) = \mu(b, b^{-1}x) \cdot f(b^{-1}x)$, $f_2(y) = \mu(a, a^{-1}y) \cdot f_1(a^{-1}y) = \mu(a, a^{-1}y) \cdot \mu(b, b^{-1}a^{-1}y) \cdot f(b^{-1}a^{-1}y)$. Az $f_2(y) = T(a)(T(b)f)$ függvény akkor és csakis akkor egyezik meg az $f_3(y) = T(ab)f = \mu(ab, b^{-1}a^{-1}y) \cdot f(b^{-1}a^{-1}y)$ függvénnyel, ha az (1.41) alatt felírt második egyenlet fennáll (ezt az $x = b^{-1}a^{-1}y$, $bx = a^{-1}y$ behelyettesítéseket elvégezve láthatjuk be).

1. definíció. *Hasson a \mathfrak{G} csoport az \mathfrak{M} sokaságon és jelöljük az \mathfrak{M} sokaság transzformációját a következőképpen: $y = ax$ ($a \in \mathfrak{G}$, $x, y \in \mathfrak{M}$). A $\mu(a, x)$ függvényt, melyre teljesül $\mu(e, x) = 1$, $\mu(ab, x) = \mu(a, bx) \cdot \mu(b, x)$, ezen transzformáció-csoportához tartozó multiplikátornak nevezzük. Az \mathfrak{M} sokaságon értelmezett $f(x)$ függvények $T(a)f(x) = \mu(a, a^{-1}x) \cdot f(a^{-1}x)$ transzformációi a \mathfrak{G} csoport megfelelő multiplikátor-ábrázolását definiálják.*

A multiplikátorok alábbi tulajdonságai nyilvánvalók: $\mu(a, x) = 1$ multiplikátor; a $\mu(a, x)$ multiplikátorral együtt annak reciproka is multiplikátor; végül a $\mu_1(a, x)$, $\mu_2(a, x)$ multiplikátorokkal együtt azok szorzata is multiplikátor. Ez azt mutatja, hogy a multiplikátorok maguk is csoportot alkotnak a szorzásra nézve. Megemlítendő még, hogy egy multiplikátor tetszőleges (nem szükségszerűen egész) hatványa ugyancsak multiplikátor, feltéve, hogy a hatvány megfelelő módon definiálható (ami nem mindig áll fenn komplex multiplikátorok esetében).

Végezzük el a $b=a^{-1}$ helyettesítést; (1.41)-ből kapjuk:

$$\mu(a, a^{-1}x) \mu(a^{-1}, x) = 1. \quad (1.42)$$

A multiplikátorok egy speciális osztályát igen egyszerűen megszerkeszthetjük. Legyen $\varrho(x)$ el nem tűnő függvény az \mathfrak{M} sokaságon. Ekkor

$$\mu(a, x) = \frac{\varrho(ax)}{\varrho(x)} \quad (1.43)$$

kielégíti az (1.41) feltételeket. Nyilvánvaló, hogy minden a -ra

$$T(a)\varrho(x) = \varrho(x). \quad (1.43a)$$

Megfordítva, ha létezik olyan el nem tűnő $\varrho(x)$ függvény, amely invariáns valamely adott multiplikátor-ábrázolás valamennyi $T(a)$ transzformációjával szemben, akkor a megfelelő multiplikátort (1.43) adja meg. Azonfelül fennáll $\mu(a, x)=1$, valahányszor $ax=x$.⁶

1g. Infinitézimális multiplikátorok. Feltételezve, hogy $\mu(a, x)$ valamennyi változójában analitikus, számítsuk ki $\chi\mu(a, x) = \chi^i(a)\partial/\partial a^i \cdot \mu(a, x)$ -et, ahol $\chi^i(a) = = \chi^* \chi^i(a)$. Ha (1.41)-ben a -t és b -t ab -vel, ill. b^{-1} -gyel helyettesítjük, kapjuk: $\mu(a, x) = \mu(ab, b^{-1}x) \mu(b^{-1}, x)$. Alkalmazzuk most a χ differenciáloperátort ezen egyenlet mindkét oldalára. A $\partial\mu(a, x)/\partial a^k$ deriváltat $\mu_k(a, x)$ -szel jelölve kapjuk:

$$\chi\mu(a, x) = \chi^i(a) \frac{\partial(ab)^k}{\partial a^i} \mu_k(ab, b^{-1}x) \mu(b^{-1}, x).$$

Az (1.1) egyenlet folytán $\chi^i(a)\partial(ab)^k/\partial a^i = \chi^k(ab)$. Következésképpen

$$\chi\mu(a, x) = \{\chi^k(ab) \mu_k(ab, b^{-1}x)\} \mu(b^{-1}, x). \quad (1.44)$$

Végezzük el ebben az egyenletben a $b=a^{-1}$ helyettesítést. Ha a $\{\chi\mu(a, x)\}_{a=e}$ kifejezést $\tau_\chi(x)$ -szel jelöljük, ami a \mathfrak{g} Lie-algebra adott χ eleme mellett x függvénye, akkor (1.44) alatt a kapcsos zárójelben álló kifejezés $b=a^{-1}$ esetén a $\tau_\chi(ax)$ értéket veszi fel; végeredményképpen kapjuk:

$$\chi\mu(a, x) = \tau_\chi(ax) \cdot \mu(a, x), \quad \tau_\chi = \{\chi\mu(a, x)\}_{a=e}. \quad (1.45)$$

A $\tau_\chi(x)$ függvény neve: a $\mu(a, x)$ -hez tartozó és a \mathfrak{g} Lie-algebra χ elemének megfelelő *infinitézimális multiplikátor*. A χ_k -nak megfelelő infinitézimális multiplikátort $\tau_k(x)$ -szel fogjuk jelölni.

A multiplikátor-ábrázolás infinitézimális transzformációi. Itt feltesszük, hogy a vizsgált $f(x)$ függvények folytonos második deriváltakkal rendelkeznek (ill. analitikusak, ha \mathfrak{M} komplex sokaság). Abból a célból, hogy leszámazzuk $\chi(T(a)f(x))$ kifejezését, írjuk: $T(a)f(x) = \mu(a, a^{-1}x)$. $T^0(a)f(x)$, így tehát $\chi(T(a)f(x)) = = \{\chi\mu(a, a^{-1}x)\}$. $T^0(a)f(x) + \mu(a, a^{-1}x) \cdot (T^0(a)f(x))$. Ha a standard ábrázolás $-\lambda_\chi^j(x)\partial/\partial x^j$ infinitézimális operátort [vö. (1.28)] Λ_χ^0 jelöli, fennáll: $\chi(T^0(a)f(x)) = = \Lambda_\chi^0(T^0(a)f(x))$, és így

$$\chi(T(a)f(x)) = \{\chi\mu(a, a^{-1}x)\} \cdot T^0(a)f(x) + \mu(a, a^{-1}x) \Lambda_\chi^0(T^0(a)f(x)).$$

⁶ A multiplikátorok további tulajdonságait tárgyaljuk meg a dolgozat II. részében.

Továbbá (1.45) és (1.29) folytán $\chi\mu(a, a^{-1}x) = \tau_x(x) \cdot \mu(a, a^{-1}x) + A_x^0 \cdot \mu(a, a^{-1}x)$. Következésképpen

$$\begin{aligned} \chi(T(a)f(x)) &= \tau_x(x) T(a)f(x) + A_x^0 \{\mu(a, a^{-1}x) T^0(a)f(x)\} \\ \text{vagy} \quad \chi(T(a)f(x)) &= A_x(T(a)f(x)); \end{aligned} \quad (1.46)$$

A_x a multiplikátor-ábrázolás egy *infinitézimális operátora*. Ez csak az x pont koordinátáit tartalmazza, s definíciója a következő:

$$A_x f(x) = \tau_x f(x) + A_x^0 f(x), \quad A_x^0 = -\lambda_x^j \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (1.47)$$

A χ_k -nak megfelelő operátort $A_k = \tau_k + A_k^0$ -val jelöljük.

Nyilvánvalóan fennáll: $A_{(\alpha\chi + \alpha'\chi')} = \alpha A_{\chi} + \alpha' A_{\chi'}$, tetszőleges α, α' állandók, és g bármely két χ, χ' eleme mellett. Abból a célból, hogy meghatározzuk a $[\chi\chi']$ zárójeles kifejezésnek megfelelő operátort, alkalmazzuk először χ' -t az (1.46) egyenletre. A χ' és A_{χ} operátorok kommutálnak, minthogy χ' csak az a^i -kre hat, így tehát $\chi'\chi(T(a)f) = \chi'\{A_{\chi}(T(a)f)\} = A_{\chi}\{\chi'(T(a)f)\} = A_{\chi}A_{\chi'}(T(a)f)$. Hasonlóképpen, $\chi\chi'(T(a)f) = A_{\chi'}A_{\chi}(T(a)f)$. Fennáll tehát

$$(\chi'\chi - \chi\chi')(T(a)f) = (A_{\chi}A_{\chi'} - A_{\chi'}A_{\chi})(T(a)f),$$

amit így is írhatunk:

$$[A_{\chi}A_{\chi'}] = A_{[\chi'\chi]}. \quad (1.48)$$

Ez az egyenlet ugyanolyan alakú, mint az (1.33) egyenlet, melyet korábban a standard ábrázolásra vonatkozóan vezettünk le. Ha ide behelyettesítjük $\chi = \chi_k$ -t és $\chi' = \chi_l$ -et, megkapjuk (1.32) analogonját.

Közvetlen számítással kapjuk (1.47)-ből:

$$A_{[\chi'\chi]}f \equiv (A_{[\chi'\chi]}^0 + \tau_{[\chi'\chi]})f = [A_{\chi}^0 A_{\chi'}^0]f + (A_{\chi}^0 \tau_{\chi'} - A_{\chi'}^0 \tau_{\chi}) \cdot f.$$

Minthogy $A_{0[\chi'\chi]} = [A_{\chi}^0 A_{\chi'}^0]$ [vö. (1.33)], $\tau_{[\chi'\chi]}$ -t a következő kifejezés adja meg:

$$\tau_{[\chi'\chi]} = A_{\chi}^0 \tau_{\chi'} - A_{\chi'}^0 \tau_{\chi}; \quad (1.49)$$

itt $A_{\chi}^0 \tau_{\chi'}$ egyenlő $-\lambda_x^j \partial \tau_{\chi'}(x) / \partial x^j$ -vel stb. Speciálisan ha $\chi = \chi_k, \chi' = \chi_l$, kapjuk:

$$A_k^0 \tau_l - A_l^0 \tau_k = c_{kl}^r \tau_r. \quad (1.49a)$$

Kiegészítő megjegyzések. 1. Ha μ multiplikátor, τ_x pedig a megfelelő infinitézimális multiplikátor, akkor μ valamely μ^h hatványához $h\tau_x$ tartozik mint infinitézimális multiplikátor [vö. (1.45)].

2. Legyenek μ, μ' tetszőleges multiplikátorok, $\tau_x, \tau_{x'}$ pedig a megfelelő infinitézimális multiplikátorok. A $\mu'' = \mu \cdot \mu'$ szorzathoz a $\tau_x'' = \tau_x + \tau_{x'}$ infinitézimális multiplikátor tartozik [vö. (1.45)].

3. Legyen $\mu(a, x)$ a $\varrho(ax)/\varrho(x)$ speciális alakú multiplikátor [vö. (1.43)], ahol $\varrho(x)$ analitikus függvény. Ekkor $T(a)\varrho(x) = \varrho(x)$, és így $\chi(T(a)\varrho(x)) = 0$. Ez maga után vonja $A_{\chi}(T(a)\varrho(x)) = A_{\chi}\varrho(x) = 0$ fennállását. Következésképpen (1.47) alapján a τ_x infinitézimális multiplikátor a

$$\tau_x(x) = -(\varrho(x))^{-1} A_x^0 \varrho(x) \quad (1.50)$$

alakban fejezhető ki. Ha $g(x)$ tetszőleges differenciálható függvény, $\Lambda_x(\varrho \cdot g) = (\Lambda_x \varrho) \cdot g + \varrho \cdot \Lambda_x^0 g = \varrho \Lambda_x^0 g$, úgyhogy $f = \varrho \cdot g$ -re fennáll:

$$\Lambda_x f(x) = \varrho(x) \Lambda_x^0(\varrho(x)^{-1} f(x)). \quad (1.51)$$

Ez a

$$T(a)f(x) = \varrho(x) T^0(a) (\varrho(x)^{-1} f(x)) \quad (1.52)$$

összefüggés infinitezimális analagonja.

1h. *Módszer multiplikátorok szerkesztésére.* Hasson a \mathfrak{G} csoport az \mathfrak{M} valós vagy komplex m -dimenziós sokaságon, ahol $m > 1$, és tegyük fel, hogy az x^1, \dots, x^m koordináták oly módon választhatók \mathfrak{M} -en, hogy az x^m (valós vagy komplex) változó nem veszi fel a zérus értéket, továbbá hogy az $y = ax$ transzformációt a következő alakú egyenletek írják le [vö. (1.19)]:

$$\left. \begin{aligned} (ax)^i &= Z^i(a, x) = Z^i(a, x^1, \dots, x^{m-1}), & 1 \leq i \leq m-1, \\ (ax)^m &= Z^m(a, x) = x^m \cdot \mu(a, x^1, \dots, x^{m-1}). \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

Az (1.53) egyenletek közül az első $m-1$ az x^i ($1 \leq i \leq m-1$) változókat egymás között transzformáló transzformációk csoportját definiálja, vagyis azon \mathfrak{M}^* sokaság transzformációinak egy csoportját, melyet az x^1, \dots, x^{m-1} koordinátájú x^* pontok határoznak meg. Az (1.53) egyenletek közül az utolsóban fellépő $\mu(a, x^*)$ függvény ezen transzformáció-csoport multiplikátora, minthogy az $ex = x$, $a(bx) = (ab)x$ csoporttulajdonságok maguk után vonják a $\mu(e, x^*) = 1$, $\mu(ab, x^*) = \mu(a, bx^*) \cdot \mu(b, x^*)$ összefüggéseket, mint arról könnyen meggyőződhetünk. (Megfordítva, ha az \mathfrak{M}^* sokaságon definiálva van egy $\mu(a, x^*)$ multiplikátor, megszerkeszthető az x^m új változó bevezetésével az \mathfrak{M} sokaság, és \mathfrak{M} -en definiálható az (1.53) egyenletek segítségével egy transzformáció-csoport.)

Ha $y = ax$, írható:

$$y^* = ax^*, \quad y^m = x^m \mu(a, x^*). \quad (1.54)$$

Minthogy a $\lambda_r^i(y)$ függvények [vö. (1.20)] definiálhatók a $\chi_r y^i = \chi_r(ax)^i$ ($1 \leq i \leq m$) képletek segítségével, (1.54) alapján megállapítható: 1. Ha $1 \leq i \leq m-1$, λ_r^i független y^m -től, s így y^* függvénye. 2. $\lambda_r^m = \chi_r y^m = x^m \cdot \chi_r \mu(a, x^*) = y^m \cdot (\mu(a, x^*))^{-1} \cdot \chi_r \mu(a, x^*)$. Minthogy λ_r^m függvénye y^m -nek és y^* -nak, így az $y^m \cdot \tau_r(y^*)$ alakú, és kapjuk: $\chi_r \mu(a, x^*) = \tau_r(ax^*) \cdot \mu(a, x^*)$, összhangban (1.45)-tel. Végeredményben g tetszőleges $\chi = \chi^r \chi_r$ elemére kapjuk:

$$\chi y^i = \lambda_x^i(y^*) \quad (1 \leq i \leq m-1); \quad \chi y^m = y^m \tau_x(y^*); \quad (1.55)$$

itt $\lambda^i = \chi^r \lambda_r^i$, $\tau_x = \chi^r \tau_r$.

Multiplikátor-ábrázolások az \mathfrak{M}^ sokaságon.* Megszerkesztjük az \mathfrak{M}^* sokaságon azt a multiplikátor-ábrázolást, mely $\mu(a, x^*)$ h -adik hatványának felel meg. Ennek transzformációit $T(a)$ -val fogjuk jelölni, az \mathfrak{M} sokaságon definiált standard ábrázolás transzformációit pedig $T^0(a)$ -val jelöljük. Ha $T^0(a)$ -t az \mathfrak{M} sokaságon értelmezett

$$F(x) = (x^m)^{-h} f(x^1, \dots, x^{m-1}) = (x^m)^{-h} f(x^*) \quad (1.56)$$

speciális alakú $F(x)$ függvényre alkalmazzuk, kapjuk:

$$T^0(a) F(x) = F(a^{-1}x) = \{(a^{-1}x)^m\}^{-h} f(a^{-1}x^*) = (x^m)^{-h} (\mu(a^{-1}, x^*))^{-h} f(a^{-1}x^*).$$

Az (1.42) egyenletet felhasználva, így tehát a

$$T^0(a)F(x) = (x^m)^{-h} (\mu(a, a^{-1}x^*))^h \cdot f(a^{-1}x^*) = (x^m)^{-h} T(a)f(x^*) \quad (1.57)$$

eredményre jutunk.

Alkalmazzuk a χ differenciáloperátort az előző egyenletre:

$$\chi(T^0(a)F(x)) = (x^m)^{-h} \chi(T(a)f(x^*)).$$

Másrésről fennáll $\chi(T^0(a)F(x)) = \Lambda_\chi^0(T^0(a)F(x))$ és $\chi(T(a)f(x^*)) = \Lambda_\chi(T(a)f(x^*))$, ami maga után vonja $\Lambda_\chi^0(T^0(a)F(x)) = (x^m)^{-h} \Lambda_\chi(T(a)f(x^*))$ teljesülését. Ha $a=e$, kapjuk:

$$\Lambda_\chi f(x^*) = (x^m)^h \cdot \Lambda_\chi^0(x^m)^{-h} f(x^*). \quad (1.58)$$

Itt $\Lambda_\chi^0 \equiv - \left(\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_\chi^j(x^*) \partial / \partial x^j \right) - x^m \cdot \tau_\chi(x^*) \partial / \partial x^m$ [vö. (1.55)] az \mathfrak{M} sokaságon definiált standard ábrázolás infinitezimális transzformációja; ebből következik, hogy $\Lambda_\chi \equiv - \left(\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_\chi^j(x^*) \partial / \partial x^j \right) + h \tau_\chi(x^*)$, összhangban (1.47)-tel. Látható továbbá, hogy

$$\Lambda_\chi \Lambda_\chi f(x^*) = (x^m)^h \Lambda_\chi^0 \Lambda_\chi^0 ((x^m)^{-h} f(x^*)). \quad (1.58a)$$

Ezeket az összefüggéseket alább fel fogjuk használni.

Megjegyzés a projektív transzformációkról. Jelöljük az \mathfrak{M} sokaságon bevezetett koordinátákat ξ^i -vel ($1 \leq i \leq m$) és tegyük fel, hogy $y=ax$ az \mathfrak{M} sokaság lineáris transzformációja önmagára, melyet $\eta^i = w_j^i(a) \xi^j$ ír le; itt az η^i -k az y koordinátái. Ha az \mathfrak{M} sokaságon ξ^m zérustól különböző, bevezethetjük az

$$x^i = \xi^i / \xi^m \quad (1 \leq i \leq m-1), \quad x^m = \xi^m$$

új változókat. E változók felhasználásával írható:

$$\left. \begin{aligned} (ax)^i &= \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} w_j^i(a) x^j + w_m^i(a) \right\} \mu(a, x^{*-1}) \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ (ax)^m &= x^m \cdot \mu(a, x^*), \quad \mu(a, x^*) = \sum_{j=1}^{m-1} w_j^m(a) x^j + w_m^m(a). \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

Az első $m-1$ egyenlet (1.59) alatt az $(m-1)$ változó: x^1, \dots, x^{m-1} projektív transzformációinak egy csoportját definiálja; $\mu(a, x^*)$ nyilvánvalóan multiplikátor.

ii. *Invariáns sűrűségek.* A \mathfrak{G} csoport hasson egy valós m -dimenziós \mathfrak{M} sokaságon, legyen $\mu(a, x)$ egy multiplikátor, és legyen $T(a)$ a megfelelő multiplikátor-ábrázolás transzformációja. Legyen $f(x)$ egy folytonos függvény, és jelölje $I(a)$ az egész \mathfrak{M} sokaságra kiterjesztett

$$I(a)[f] = \int_{\mathfrak{M}} (T(a)f(x)) \omega(x) dX$$

integrált, ahol $dX = dx^1 \dots dx^m$, és ahol ω adott pozitív folytonos függvény. Ha minden f -re, amelyre $I(a)[f]$ létezik, $I(a)[f]$ független az a csoportelemtől, $\omega(x)$ -et *invariáns sűrűségnek* fogjuk nevezni a szóban forgó multiplikátor-ábrázolásra vonatkozóan.

(Nyilvánvaló, hogy az ilyen $\omega(x)$ függvény egyszersmind invariáns Lebesgue-integrálást definiál \mathfrak{M} -en.)

Vezessük be az $y^i = (a^{-1}x)^i$ változókat, melyekre fennáll $T(a)f(x) = \mu(a, y)f(y)$, és jelöljük $J_a(y)$ -nal a $\partial(x^1, \dots, x^m)/\partial(y^1, \dots, y^m)$ Jacobi-determinánst. Ekkor

$$I(a)[f] = \int_{\mathfrak{M}} f(y) \mu(a, y) \omega(ay) J_a(y) dY.$$

Következésképpen $\omega(x)$ invariáns sűrűség, ha

$$\eta(a, y) \equiv \mu(a, y) \omega(ay) J_a(y) = \omega(y) \quad (1.60)$$

minden a -ra és minden y -ra.

Ha ω differenciálható függvény, (1.60) helyettesíthető azzal a feltétellel, hogy $\eta(a, y)$ valamennyi a^i szerint képezett parciális deriváltjai tűnjenek el, vagy pedig a $\chi_r \eta(a, y) = 0$ ($1 \leq r \leq n$) feltétellel. A $\chi_r \eta(a, y)$ kifejezés kiszámítása céljából felidézzük, hogy $\chi_r \mu(a, y) = \tau_r(ay) \cdot \mu(a, y) = \tau_r(x) \cdot \mu(a, y)$ és hogy $\chi_r \omega(ay) = \partial \omega(x) / \partial x^i \lambda_r^i(x)$ [vö. (1.29a)]. Végezetül,

$$\chi_r J_a(y) = J_a(y) \left\{ \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \left[\chi_r \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \right] \right\} = J_a(y) \left\{ \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i} (\chi_r x^j) \right\} = J_a(y) \frac{\partial}{\partial x^j} (\lambda_r^j(x)).$$

[Vö. (1.29a)].⁷ A tagokat összegyűjtve kapjuk:

$$\chi_r \eta(a, y) = \mu(a, y) \cdot J_a(y) \cdot \left\{ \partial / \partial x^i (\omega(x) \lambda_r^i(x)) + \tau_r(x) \omega(x) \right\}.$$

Ennélfogva az $\omega(x)$ pozitív differenciálható függvény akkor és csak akkor invariáns sűrűség, ha

$$M_r \omega(x) = 0, \quad 1 \leq r \leq n, \quad (1.61)$$

ahol $M_r f(x) = \partial / \partial x^i (\lambda_r^i(x) f(x)) + \tau_r(x) f(x)$. Meg lehet mutatni, hogy

$$M_l M_k - M_k M_l = c_{kl}^r M_r, \quad (1.62)$$

ha ezeket az operátorokat folytonos második deriváltakkal rendelkező függvényre alkalmazzuk.

2. §. A Lorentz-csoport és a forgáscsoport infinitezimális transzformáció

2a. *Lineáris transzformációk, amelyekkel szemben egy kvadratikus alak invarianciát mutat.* Itt az m -dimenziós valós \mathfrak{M} vektortér azon lineáris transzformációinak csoportját vizsgáljuk, amelyekkel szemben egy nem-szinguláris kvadratikus alak invariáns. (Az m dimenziót és a szóban forgó kvadratikus alakot specializálva, a következőkben a Lorentz-csoportra, valamint a háromváltozós ortogonális csoportra érvényes összefüggéseket fogunk kapni.)

Pontosabban szólva, a csoport azon (összefüggő) komponensét tárgyaljuk, amely tartalmazza az azonosságot. Ezt a \mathfrak{G} szimbólummal fogjuk jelölni; \mathfrak{G} egy n -dimenziós összefüggő Lie-csoport, ahol $n = \frac{1}{2} m(m-1)$. [A Lorentz-csoport ese-

⁷ Ahhoz, hogy a (1.29a) képletet alkalmazhassuk, az x és y változókat fel kell cserélnünk.

tében \mathfrak{G} azon egységnyi determinánsú transzformációkból áll, amelyek nem változtatják meg az idő irányát (valódi Lorentz-transzformációk). Az ortogonális csoport esetében \mathfrak{G} az összes egységnyi determinánsú transzformációt tartalmazza, vagyis az összes elforgatást.]

A \mathfrak{G} csoport elemeit az a, b, \dots szimbólumokkal fogjuk jelölni. Egyelőre nem fogunk speciális paramétereket bevezetni a csoportsokaságon (ezt majd a későbbi §§-ban tesszük meg). Az \mathfrak{M} tér x pontjának koordinátái x^1, \dots, x^m ; a kvadratikus alakot $g_{ij}x^i x^j$ adja meg, ahol $g_{ij} = g_{ji}$. A g^{ij} kontravariáns szimmetrikus tenzort a $g^{ij}g_{kj} = \delta_k^i$ egyenletek definiálják; g_{ij} és g^{ij} felhasználásával végezhetjük el az indexek le- és felhúzását. Alkalmos koordinátarendszerben g_{ij} átlós tenzor, ± 1 átlós elemekkel:

$$g_{11} = \eta_1, g_{22} = \eta_2, \dots, g_{mm} = \eta_m; \quad g_{ij} = 0, \text{ ha } i \neq j, \eta_i = \pm 1. \quad (2.1)$$

Itt az 1e. § eredményeit alkalmazzuk. A \mathfrak{G} csoport minden egyes a elemének megfelel egy-egy $y = ax = U(a)x$ transzformáció; itt $U(a)$ a $w_j^i(a)$ elemekkel rendelkező mátrix. Írható tehát:

$$y^i = w_j^i(a) x^j. \quad (2.2)$$

Annak feltételét, hogy $g_{ij}x^i x^j$ maradjon invariáns a (2.2) transzformációval szemben, két ekvivalens alakban is felírhatjuk:

$$w_j^i(a) w_k^j(a) = \delta_k^i; \quad w_j^i(a) w_k^j(a) = \delta_k^i, \quad (2.3)$$

ahol $w_k^j = g_{ki} g^{il} w_l^j$. A \mathfrak{G} csoport \mathfrak{g} Lie-algebrájának minden χ eleme egy-egy L_χ infinitezimális transzformációt eredményez, l_j^i konstans mátrixelemekkel [vö. (1.37)]⁸, úgyhogy

$$\chi y = L_\chi y, \quad \chi y^i = l_j^i y^j. \quad (2.4)$$

Minthogy minden a mellett $g_{ij} y^i y^j = g_{ij} x^i x^j$, következik, hogy $\chi(g_{ij} y^i y^j) = 2g_{ij}(\chi y^j) y^i = 2g_{ij} l_k^j y^k y^i = 2l_{jk} y^k y^j$. Így tehát

$$l_{ij} + l_{ji} = 0. \quad (2.5)$$

Megfordítva, könnyen belátható, hogy minden olyan L mátrix, amelynek l_j^i elemei teljesítik a (2.5) összefüggéseket, \mathfrak{g} valamely χ elemének felel meg.

Bármely L_χ kifejezhető a

$$(L_{kl} y)^i = (\delta_k^i g_{lj} - \delta_l^i g_{kj}) y^j = \delta_k^i y_l - \delta_l^i y_k \quad (2.6)$$

képlettel definiált L_{kl} transzformációk lineáris kombinációja alakjában. 1. L_{kl} a kívánt alakú, minthogy (i, j) indexű kovariáns mátrixeleme egyenlő $g_{ik} g_{lj} - g_{il} g_{kj}$ -vel, és így (2.5) teljesül. 2. Ha az L mátrix antiszimmetrikus kovariáns mátrixelemeit l_{kl} jelöli, L kifejezhető az $\frac{1}{2} l^{kl} L_{kl}$ alakban. Minthogy a (2.6) definíció folytán $L_{lk} = -L_{kl}$, az L_{kl} transzformációk között csupán $\frac{1}{2} m(m-1)$ lineárisan független van, pl. azok, amelyekre $k < l$ teljesül. A megfelelő χ_{kl} elemek a \mathfrak{g} Lie-algebra bázisul választhatók. A kettős indexek használata ezen bázis jellemzésére célszerűbbnek látszik, jóllehet ez nem teljesen felel meg az 1. §-ban használt jelölésnek (vö.

⁸ A kényelem kedvéért itt mellőzzük a χ alsó indexet.

azonban alább a 2e. §-sal). A következőkben legtöbbnyire az L_{kl} -eket mind használni fogjuk, anélkül, hogy a k, l indexeket bármiképpen is korlátoznánk.

A (2.6) képletből közvetlenül kapjuk az

$$[L_{ij} L_{kl}] = g_{jk} L_{il} - g_{ik} L_{jl} + g_{il} L_{jk} - g_{jl} L_{ik} \quad (2.7)$$

felcserélési szabályokat. Ezek az egyenletek (implicite) meghatározzák \mathfrak{G} szerkezeti állandóit. Egyszerű megfontolás mutatja, hogy (1.18) analogonja fennáll, azaz, hogy a \mathfrak{G} csoporton egybeesik a jobb- és bal-invariáns integrálás.

A standard ábrázolás operátorai. Legyen $T^0(a)f(x) = f(a^{-1}x)$; ekkor $\chi(T^0(a)f(x)) = A_\chi^0(T^0(a)f(x))$, ahol

$$A_\chi^0 = -l_j^i x^j \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (2.8)$$

ha L -et a (2.4) képlet definiálja. [Vö. (1.28).] A χ_{kl} -nek megfelelő infinitezimális operátor eszerint

$$A_{kl}^0 = x_k \frac{\partial}{\partial x^l} - x_l \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (2.8a)$$

Egyparaméteres alcsoportok. Ha a g_{ij} tenzort átlós alakúnak választjuk, igen egyszerűen kaphatunk az $y(t) = \exp(tL_{kl})x$ egyparaméteres alcsoport transzformációi számára explicit kifejezést. Megkülönböztetjük az $\eta_k = \eta_l = \eta$ és $\eta_k = -\eta_l = \eta$ eseteket.

(1) Ha $\eta_k = \eta_l = \eta$, az

$$y^k(t) = \cos t x^k + \eta \sin t x^l, \quad y^l(t) = -\eta \sin t x^k + \cos t x^l, \\ y^i(t) = x^i \quad (i \neq k, l) \quad (2.9)$$

kifejezést kapjuk.

(2) Ha pedig $\eta_k = -\eta_l = \eta$, akkor

$$y^k(t) = \cosh t x^k - \eta \sinh t x^l, \quad y^l(t) = -\eta \sinh t x^k + \cosh t x^l, \\ y^i(t) = x^i \quad (i \neq k, l). \quad (2.9a)$$

Látható, hogy az L_{kl} által generált transzformációk a $(k-l)$ síkot önmagába transzformálják.

2b. \mathfrak{G} adjungált csoportja. Az (1.38) egyenlet szerint $L_{\chi'} = U(b)L_\chi U(b)^{-1}$, ha $\chi' = b\chi b^{-1}$. Jelölje $L_{\chi'}$ és L_χ mátrixelemeit $l_j'^i$, ill. l_j^i ; fennáll tehát:

$$l_j'^i = w_k^i(b) l_r^k w_j^r(b) \\ \text{vagy} \quad l'^{ij} = w_k^i(b) w_r^j(b) l^{kr}, \quad (2.10)$$

vagyis az l^{kr} mátrixelemek antiszimmetrikus tenzor komponenseiként transzformálódnak. A χ_{ij} -kre vonatkozó megfelelő egyenletek:

$$b\chi_j b^{-1} = w_i^k(b) w_j^l(b) \chi_{kl}. \quad (2.10a)$$

2c. *A Q és R operátorok.* Legyen L_{kl} a lineáris operátorok egy rendszere, melyet oly módon választottunk, hogy fennáll: $L_{kl} = -L_{lk}$, és teljesülnek a (2.7) felcserélési szabályok. Legyen

$$Q = \frac{1}{2} L_{kl} L^{kl} = \frac{1}{2} g^{ki} g^{lj} L_{kl} L_{ij}. \quad (2.11)$$

(Ezen operátorok precíz természete lényegtelen, feltéve, hogy korlátozás nélkül összeszorozhatók.) Ekkor, amint az könnyen igazolható, Q kommutál valamennyi L_{ij} -vel. (Q a Casimir-operátor, mely minden félig egyszerű csoport esetében megszerkeszthető [Casimir].)

Négydimenziós \mathfrak{M} sokaság esetében létezik egy másik *invariáns* operátor (azaz: olyan operátor, amely az L_{ij} -k mindegyikével kommutál), nevezetesen

$$R = \frac{1}{4} \eta^{ijkl} L_{ij} L_{kl}, \quad (2.11a)$$

ahol η^{ijkl} minden indexpárban antiszimmetrikus, és $\eta^{1234} = 1$.

Ez a két operátor, Q és R (az utóbbi csak \mathfrak{Q}_4 esetében), a későbbiekben arra szolgál majd, hogy segítségükkel \mathfrak{Q}_3 és \mathfrak{Q}_4 irreducibilis ábrázolásait jellemezzük.

2d. *Az \mathfrak{Q}_4 Lorentz-csoport ($m=4$).* A koordináták jele legyen x^0, x^1, x^2, x^3 ; a g_{ij} metrikus tenzor komponensei: $g_{00}=1, g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1, g_{ij}=0$ ($i \neq j$). Mint-hogy kizárólag *valódi* Lorentz-transzformációkat vizsgálunk, a w_j^i -k determinánsa egyenlő eggyel, és $w_0^0 > 0$. A Q, R operátorokat a következő képletek adják meg:

$$Q = (L_{23})^2 + (L_{31})^2 + (L_{12})^2 - (L_{01})^2 - (L_{02})^2 - (L_{03})^2, \quad (2.12)$$

$$R = L_{23} L_{10} + L_{31} L_{20} + L_{12} L_{30}. \quad (2.12a)$$

2e. *Az $m=3$ eset.* Most rátérünk az $m=3$ eset részletesebb vizsgálatára, amelyet e dolgozat első része tárgyal. A vektorok és antiszimmetrikus tenzorok jól ismert ekvivalenciája a háromdimenziós vektoralgebrában (a \mathfrak{G} csoport transzformációival szemben) felhasználható arra, hogy a következő egyszerűsítést elvégezzük. Defináljuk a χ_r és L_r infinitezimális transzformációkat a

$$\chi_r = \frac{1}{2} \eta_{rkl} g^{kj} g^{li} \chi_{ij}, \quad L_r = \frac{1}{2} \eta_{rkl} L^{kl} \quad (2.13)$$

egyenletekkel, ahol η_{rkl} bármely két indexében antiszimmetrikus, $\eta_{123}=1$, és $L^{kl} = g^{ki} g^{lj} L_{ij}$. Eszerint

$$L_1 = L^{23}, \quad L_2 = L^{31}, \quad L_3 = L^{12}; \quad (2.14)$$

hasonló összefüggések érvényesek a χ_r -ekre. Ennek megfelelően írjuk:

$$\chi = \kappa^r \chi_r, \quad L_\chi = \kappa^r L_r,$$

ahol $\kappa^1 = l_{23}, \kappa^2 = l_{31}, \kappa^3 = l_{12}$. (Ez összhangban van az 1. §-ban használt jelöléssel.) A χ_r -ek a \mathfrak{g} Lie-algebra számára bázist képeznek. A (2.4) képletek helyett most írható:

$$(Lx)_1 = \kappa^3 x^2 - \kappa^2 x^3, \quad (Lx)_2 = \kappa^1 x^3 - \kappa^3 x^1, \quad (Lx)_3 = \kappa^2 x^1 - \kappa^1 x^2. \quad (2.15)$$

Az adjungált csoport transzformációi a következőképpen fejezhetők ki. Legyen $\chi' = b\chi b^{-1}$, ahol $\chi = \kappa^r \chi_r$ és $\chi' = \kappa'^r \chi_r$. Ekkor

$$\kappa'^i = w_j^i(b) \kappa^j. \quad (2.16)$$

Továbbá

$$b\chi_j b^{-1} = w_j^i(b)\chi_i. \quad (2.17)$$

Ez igaz, minthogy a vizsgált w_j^i transzformációk determinánsa 1.

Végezetül speciálizáljuk ezeket az összefüggéseket a két csoportra, melyeket tárgyalni kívánunk: az \mathfrak{R} forgáscsoportra és az \mathfrak{Q}_3 Lorentz-csoportra.

Az \mathfrak{R} csoport. A metrikus tenzort így választjuk: $g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1$, $g_{ij}=0$ (ha $i \neq j$). (A negatív előjelet itt azért választjuk, mert \mathfrak{R} -et itt mint \mathfrak{Q}_4 alcsoportját vizsgáljuk, melynek esetében a $g_{00}=1$ választás a legcélszerűbb.) A (2.7) egyenlet alapján kapjuk:

$$[L_1 L_2] = L_3, \quad [L_2 L_3] = L_1, \quad [L_3 L_1] = L_2. \quad (2.18)$$

A (2.16) képlet szerint \mathfrak{R} bármely két egyparaméteres alcsoportja konjugált, ha azokat el nem tűnő χ generálja. Minthogy χ és $\alpha\chi$ ($\alpha \neq 0$) ugyanazt az alcsoportot generálják [vö. (1.7a)], csupán a χ^r vektor iránya számít, s alkalmas elforgatással bármely valamely adott irányba vihető át.

A Q operátor számára a következő kifejezést kapjuk:

$$Q = (L_1)^2 + (L_2)^2 + (L_3)^2 = -g^{ij} L_i L_j \quad (2.19)$$

(ez egy állandó tényezőtől eltekintve az impulzusmomentum jól ismert kifejezése a kvantummechanikában).

Az \mathfrak{Q}_3 csoport. A koordinátákra az x^0, x^1, x^3 jelölést fogjuk használni; a 3 indexet a 0 indexszel helyettesítjük. A metrikus tenzort ekkor $g_{00}=1$, $g_{11}=g_{22}=-1$, $g_{ij}=0$ (ha $i \neq j$) adja meg. A (2.14), (2.15) egyenletek ekkor a következő egyenletekkel helyettesítendők:

$$L_0 = L^{12}, \quad L_1 = L^{20}, \quad L_2 = L^{01} \quad (2.20)$$

és

$$(Lx)_0 = x^2 x^1 - x^1 x^2, \quad (Lx)_1 = x^0 x^2 - x^2 x^0, \quad (Lx)_2 = x^1 x^0 - x^0 x^1. \quad (2.21)$$

A felcserélési törvények:

$$[L_0 L_1] = L_2, \quad [L_1 L_2] = -L_0, \quad [L_2 L_0] = L_1. \quad (2.22)$$

(Figyeljük meg a mínusz-előjelet a második egyenletben, mely az indefinit metrika folyománya.)

Minthogy a (2.16) transzformáció megőrzi a $g_{ij}\chi^i\chi^j = \chi^i\chi_i$ kifejezést, most az egyparaméteres alcsoportoknak három különböző osztálya van el nem tűnő χ mellett; ezek a $\chi^i\chi_i > 0$, $\chi^i\chi_i < 0$ és $\chi^i\chi_i = 0$ eseteknek felelnek meg. Egy-egy osztályon belül bármely két alcsoport konjugált, minthogy alkalmasan választott α mellett bármely térszerű (időszerű vagy null-) vektor (χ^r) átvihető adott térszerű (időszerű vagy null-) vektorba ($\alpha\chi^r$) az \mathfrak{Q}_3 csoport valamely transzformációja segítségével. Ezt a három osztályt az *elliptikus* ($\chi^i\chi_i > 0$), *hiperbolikus* ($\chi^i\chi_i < 0$), ill. *parabolikus* ($\chi^i\chi_i = 0$) alcsoportok osztályának fogjuk nevezni. (Vö. 4f. §.)

A Q operátort

$$Q = (L_0)^2 - (L_1)^2 - (L_2)^2 = g^{ij} L_i L_j \quad (2.23)$$

adja meg.

3. §. A spinor-csoportok

Ebben a szakaszban röviden megtárgyaljuk az \mathfrak{Q}_4 -nek, az \mathfrak{Q}_3 -nak és az \mathfrak{R} -nek megfelelő spinor-csoportokat; azokat rendre \mathfrak{S}_4 -gyel, \mathfrak{S}_3 -mal, ill. \mathfrak{S}_R -rel jelöljük. (Vö. [v.d. Waerden, 16. §, 20. §].)

3a. Az \mathfrak{S}_4 csoport. Legyen x a négydimenziós vektortér egy pontja, melynek koordinátái x^0, x^1, x^2, x^3 . Az x ponthoz hozzárendeljük a következő 2×2 -es hermitikus mátrixot (ahol $i = \sqrt{-1}$):

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Megfordítva, minden hermitikus mátrix felírható ebben az alakban (*valós* x^i -k felhasználásával). Az X mátrix $D(X)$ determinánsának értéke $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = g_{kl}x^kx^l$. Ha a

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

mátrix, melynek $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ elemei komplex számok, egységnyi determinánsú, és ha

$$W^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{pmatrix}$$

a W mátrix hermitikus adjungáltja, akkor

$$Y = W X W^*, \quad Y = \begin{pmatrix} y^0 + y^3 & y^1 - iy^2 \\ y^1 + iy^2 & y^0 - y^3 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

egy *valós* w_j^i együtthatójú $y^k = w_j^k x^j$ lineáris transzformációt definiál, amelyre fennáll $D(Y) = D(X)$. Az tehát *valós* Lorentz-transzformáció. Azonfelül a w_j^i -k determinánsa egyenlő eggyel, és $w_0^0 = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}) \geq 1$ (minthogy $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$). Így tehát ez a transzformáció *valódi* Lorentz-transzformáció, vagyis az \mathfrak{Q}_4 csoport eleme.

A (3.2) alatt megadott egységnyi determinánsú W mátrixok hatdimenziós összefüggő Lie-csoportot (\mathfrak{S}_4) alkotnak (a *valós* dimenziókat számítjuk), melynek elemeit az a, b, \dots szimbólumokkal jelöljük. Már láttuk, hogy \mathfrak{S}_4 minden egyes a elemének megfelel \mathfrak{Q}_4 -nek valamely, mondjuk a' eleme. Könnyen igazolható, hogy az $a \rightarrow a'$ megfeleltetés a következő tulajdonságú: 1. $e \rightarrow e$, 2. $a^{-1} \rightarrow (a')^{-1}$, 3. $ab \rightarrow a'b'$. Ez a megfeleltetés *kettő-egy-értelmű*. Minden valódi Lorentz-transzformáció előállítható a (3.3) alakban; ugyanakkor $(-W)$ ugyanazt a Lorentz-transzformációt eredményezi, mint maga W (több ilyen tulajdonságú mátrix azonban nem található). Jelöljük \mathfrak{S}_4 -nek azokat az elemeit, amelyek W -nek, valamint $(-W)$ -nek felelnek meg, a -val, ill. $-a$ -val. Ekkor a -nak és $-a$ -nak az \mathfrak{Q}_4 csoport ugyanazon a' eleme felel meg. Pontosabban szólva \mathfrak{Q}_4 izomorf az $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{R}$ faktorcsoporttal, ahol \mathfrak{R} az $e, (-e)$ elemekből álló invariáns alcsoportja \mathfrak{S}_4 -nek.

A két csoport, \mathfrak{Q}_4 és \mathfrak{S}_4 , (az egységelem alkalmasan választott környezetében) *lokálisan izomorf*, ennél fogva ugyanaz a Lie-algebrájuk. (Könnyen belátható, hogy ez az izomorfizmus *analitikus*.)

3b. Az \mathfrak{S}_3 csoport. Az \mathfrak{Q}_3 csoport felfogható, mint \mathfrak{Q}_4 mindazon transzformációinak alcsoportja, amelyek az x^3 változót változatlanul hagyják (vagyis amelyekre $y^3 = x^3$ fennáll). Mindazoknak a W mátrixoknak a csoportja, amelyek e transzformációknak felelnek meg, az \mathfrak{S}_3 csoport. A (3.3) képletnek megfelelően meg kell követelnünk, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix}$$

teljesüljön. Minthogy $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, ez egyenértékű a $\delta = \bar{\alpha}$, $\gamma = \bar{\beta}$ feltételekkel. Így tehát a

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1 \quad (3.4)$$

alakú mátrixokkal van dolgunk. Az x^3 változót most elhagyhatjuk, s írhatjuk:

$$X = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 \end{pmatrix};$$

a (3.3) egyenletek változatlanul érvényesek, ha W a (3.4) alakú.

Az \mathfrak{Q}_3 és \mathfrak{S}_3 csoportok viszonya ugyanolyan, mint az \mathfrak{Q}_4 , \mathfrak{S}_4 csoportoké. Azaz: \mathfrak{Q}_3 izomorf $\mathfrak{S}_3/\mathfrak{N}$ -nel, és lokálisan izomorf \mathfrak{S}_3 -mal.

Nyilvánvaló, hogy \mathfrak{Q}_3 -at azon transzformációk segítségével is definiálhatnánk, amelyek az x^2 változót változatlanul hagyják. Ily módon olyan mátrixokhoz jutunk, amelyeknek elemei *valósak* (és determinánsuk 1).⁹ Ha X -ből elhagyjuk x^2 -t [vö. (3.1)], X *valós szimmetrikus* mátrix lesz, és a (3.3) transzformációk csak valós mátrixokat tartalmaznak (\tilde{W}^* a transzponáltja \tilde{W} -nak). Az \mathfrak{S}_3 csoport két realizációjának ekvivalenciája a

$$\tilde{W} = TWT^{-1}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

képletek segítségével juttatható kifejezésre, ahol \tilde{W} valós, W pedig (3.4) alakú mátrix; T unitér mátrix, mely $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ -t az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrixba transzformálja. Legyenek W elemei $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ [vö. (3.4)]. Ekkor \tilde{W} a következő valós mátrix:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_2 & -\alpha_2 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_1 & \alpha_1 + \beta_2 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

3. Az \mathfrak{S}_R csoport. \mathfrak{R} az \mathfrak{Q}_4 csoport mindazon transzformációinak alcsoportja, amelyek x^0 -t változatlanul hagyják. A megfelelő W mátrixok, melyek az \mathfrak{S}_R csoportot definiálják,

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1 \quad (3.7)$$

⁹ Ezek változatlanul hagyják a $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ mátrixot.

alakú *unitér* mátrixok. Megint csak \mathfrak{R} izomorf $\mathfrak{S}_R/\mathfrak{R}$ -nel, és lokálisan izomorf \mathfrak{S}_R -rel.

3d. *Egy komplex változó lineáris transzformációi.* A W mátrixokkal kapcsolatba hozhatjuk egy *komplex* változó

$$z' = \frac{\delta z + \gamma}{\beta z + \alpha} \quad (3.8)$$

lineáris transzformációit. A (3.8) csoport azonban nem \mathfrak{S}_4 -gyel, hanem \mathfrak{Q}_4 -gyel izomorf, mivel mind a , mind $(-a)$ ugyanahhoz a (3.8) transzformációhoz vezet.

Az \mathfrak{S}_3 csoport két fent tárgyalt realizációjának, amint az a (3.8) transzformációk segítségével megmutatható, egyszerű geometriai jelentése van. A (3.4) alakú W mátrixoknak az egységkör belsejének önmagára való konform transzformációi felelnek meg; a (3.6) valós \tilde{W} mátrixoknak a komplex sík felső félsíkjának önmagára való konform transzformációi (s ugyancsak, a valós tengely projektív transzformációi) felelnek meg.

A későbbi tárgyalás folyamán fel fogjuk használni a (3.8) transzformációkat.

3e. *Egy- és kétértékű ábrázolások.* Az \mathfrak{Q}_4 , \mathfrak{Q}_3 , \mathfrak{R} csoportok bármelyikének valamely ábrázolása a megfelelő spinor-csoportnak is. A spinor-csoport valamely ábrázolása azonban \mathfrak{Q}_4 -nek, \mathfrak{Q}_3 -nak, ill. \mathfrak{R} -nek egy- vagy kétértékű ábrázolása lehet attól függően, hogy a -t és $(-a)$ -t ugyanaz a transzformáció reprezentálja-e (ez viszont attól függ, hogy az e és $(-e)$ elemeknek ugyanaz a transzformáció-e a reprezentánsa). Ebben a dolgozatban nem az \mathfrak{Q}_4 és \mathfrak{Q}_3 csoportokkal, hanem az \mathfrak{S}_4 és \mathfrak{S}_3 spinor-csoportokkal foglalkozunk; ezek tiszta matematikai szempontból is érdekesek, s a matematikai fizika számára igen fontosak.

A (3.2) alakú W mátrixok sokasága, vagyis az \mathfrak{S}_4 csoport sokaság *egyszeresen összefüggő*, és így \mathfrak{S}_4 az \mathfrak{Q}_4 valódi Lorentz-csoportnak univerzális fedőcsoportja. Következésképpen \mathfrak{S}_4 minden folytonos ábrázolásának *egyértékűnek* kell lennie.

Ezzel szemben az \mathfrak{S}_3 csoport sokaság *végtelesszer összefüggő* (vö. 4. §), és \mathfrak{S}_3 -nak vannak többértékű unitér ábrázolásai. Egészében \mathfrak{S}_3 egyértékű ábrázolásaira fogunk szorítkozni, azonban olykor némely többértékű ábrázolást is tárgyalni fogunk.

3f. *A spinor-csoport infinitezimális transzformációi.* Korábban említettük, hogy \mathfrak{Q}_4 és \mathfrak{S}_4 lokálisan izomorf csoportok, és hogy azoknak ennél fogva ugyanaz a Lie-algebrájuk. Az infinitezimális transzformációk leszarmaztatása során szorítkozhatunk az egységelem elég kicsiny környezetére. A következőképpen járunk el. Legyen $y = ax$; ennek megfelelően $Y = W(a)XW^*(a)$. Ha χ a Lie-algebra valamely eleme, írhatjuk: $\chi y^k = l_{jk}^i y^j$ [vö. (2.4)]; itt $l_{kj} + l_{jk} = 0$. Hasonlóképpen $\chi W(a) = M_\chi W(a)$, és $\chi W^*(a) = W^*(a)M_\chi^*$; az itt fellépő M_χ mátrixot kívánjuk meghatározni. Fennáll:

$$\chi Y = (\chi W(a)) X W^*(a) + W(a) X (\chi W^*(a)) = M_\chi Y + Y M_\chi^*. \quad (3.9)$$

Minthogy $W(a)$ determinánsa konstans, M_χ átlós összegének el kell tűnnie. Behelyettesítve χy^k kifejezését a

$$\chi Y = \begin{pmatrix} \chi y^0 + \chi y^3 & \chi y^1 - i\chi y^2 \\ \chi y^1 + i\chi y^2 & \chi y^0 - \chi y^3 \end{pmatrix}$$

képletbe, (3.9) alapján közvetlen számítással kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 \end{pmatrix}; \\ \mu_1^1 &= l^{30} + il^{12}, \quad \mu_2^1 = (l^{10} - l^{31}) - i(l^{20} + l^{23}), \\ \mu_1^2 &= (l^{10} + l^{31}) + i(l^{20} - l^{23}), \quad \mu_2^2 = (-l^{30} - il^{12}). \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Az l_j^k együtthatóknak speciális értékeket adva, \mathfrak{S}_4 bármely alcsoportjának infinitezimális transzformációit megkaphatjuk.

Az \mathfrak{Q}_4 , \mathfrak{Q}_3 , \mathfrak{R} csoportok s a megfelelő spinor-csoportok között fennálló lokális izomorfizmusból következik, hogy az adjungált csoportra vonatkozó (2.10) és (2.17) egyenletek érvényesek maradnak a spinor-csoport esetében.

3g. *Néhány megjegyzés a spinorokról.* E szakasz befejezéseként néhány megjegyzést teszünk, amelyek később hasznosak lesznek. Jelöljük X mátrixelemeit [vö. (3.1)] $x^{\varrho\sigma}$ -val, W mátrixelemeit α_σ^ϱ -val ($\varrho, \sigma = 1, 2$) úgyhogy

$$X = \begin{pmatrix} x^{11} & x^{12} \\ x^{21} & x^{22} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Minthogy az X mátrix hermitikus, $\overline{x^{\varrho\sigma}} = x^{\sigma\varrho}$. A (3.3) transzformáció így írható:

$$y^{\lambda\mu} = \alpha_\varrho^\lambda \overline{\alpha_\sigma^\mu} x^{\varrho\sigma} \quad (\lambda, \mu, \varrho, \sigma = 1, 2), \quad (3.12)$$

ahol ismét felhasználjuk az összegezési konvenciót.

Null-vektorok. Ha x null-vektor, X determinánsa eltűnik. Választhatunk tehát egy ξ^λ kétkomponensű spinort oly módon, hogy

$$x^{\lambda\mu} = \xi^\lambda \overline{\xi^\mu}, \quad \text{ha } x^0 > 0, \quad x^{\lambda\mu} = -\xi^\lambda \overline{\xi^\mu}, \quad \text{ha } x^0 < 0. \quad (3.13)$$

A ξ^λ spinor két komponense egy egységnyi abszolút-értékű közös tényező erejéig meg van határozva.

Tegyük fel, hogy $x^0 > 0$; ekkor x^{11} nem-negatív valós szám. Ha ez különbözik zérustól, írható:

$$\xi^\lambda = \frac{x^{\lambda 1}}{(x^{11})^{\frac{1}{2}}}, \quad \lambda = 1, 2. \quad (3.14)$$

Null-vektorok esetében a (3.12) transzformáció az

$$y^{\lambda\mu} = \frac{1}{x^{11}} (\alpha_\varrho^\lambda x^{\varrho 1}) (\overline{\alpha_\sigma^\mu x^{\sigma 1}}) \quad (3.15)$$

alakot ölti, ha csak $x^{11} > 0$.

Ha a null-vektor komponenseit polárkoordináták segítségével fejezzük ki ($x^0 = r$, $x^3 = r \cos \vartheta$, $x^1 + ix^2 = r \sin \vartheta e^{i\varphi}$), kapjuk [vö. (3.1)]:

$$x^{11} = r(1 + \cos \vartheta) = 2r \cos^2(\tfrac{1}{2}\vartheta), \quad x^{21} = r \sin \vartheta e^{i\varphi} \quad (3.16)$$

és így (3.14) szerint

$$\xi^1 = (2r)^{\frac{1}{2}} \cos(\tfrac{1}{2}\vartheta), \quad \xi^2 = (2r)^{\frac{1}{2}} \sin(\tfrac{1}{2}\vartheta) e^{i\varphi}. \quad (3.16a)$$

Az \mathfrak{Q}_3 (és \mathfrak{S}_3) csoport esetében W -t a (3.4) alakúnak kell választanunk, és x^3 -at zérussal kell egyenlővé tennünk ($\vartheta = \frac{1}{2}\pi$). Ekkor (3.16) és (3.16a) helyett kapjuk:

$$x^{11} = r, \quad x^{21} = re^{i\varphi}; \quad \xi^1 = r^{\frac{1}{2}}, \quad \xi^2 = r^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}. \quad (3.17)$$

Ha y polárkoordinátáit r' -vel és φ' -vel jelöljük, és a mátrixelemek (3.4) alatt használt α, β jelölését alkalmazzuk, (3.15) felhasználásával kapjuk:

$$r' = y^{11} = r|\alpha + \beta e^{i\varphi}|^2 \quad (3.18)$$

és

$$e^{i\varphi'} = \frac{y^{21}}{y^{11}} = \frac{\alpha_e^2 x^{e1}}{\alpha_e^1 x^{\sigma 1}} = \frac{\bar{\beta} + \bar{\alpha} e^{i\varphi}}{\alpha + \beta e^{i\varphi}} = e^{i\varphi} \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \frac{1 + (\bar{\beta}/\bar{\alpha}) e^{-i\varphi}}{1 + (\beta/\alpha) e^{i\varphi}}. \quad (3.19)$$

4. §. Az \mathfrak{S}_3 csoport részletes vizsgálata

Az I. rész hátralevő §§-ban csupán az \mathfrak{S}_3 és az \mathfrak{Q}_3 csoporttal foglalkozunk (főként az \mathfrak{S}_3 -mal). A 3 indexet ennél fogva el fogjuk hagyni, úgyhogy \mathfrak{S} -en és \mathfrak{Q} -en \mathfrak{S}_3 , ill. \mathfrak{Q}_3 értendő. Az \mathfrak{S} csoport Lie-algebráját \mathfrak{s} -sel jelöljük.

4a. *A paraméterek bevezetése.* Az \mathfrak{S} csoport univerzális fedőcsoportja. Az \mathfrak{S} csoport sokaság topológiai természete a \tilde{W} mátrixok poláris felbontása alapján állapítható meg [vö. (3.6)]. Valóban, minden egységnyi determinánsú \tilde{W} valós mátrix felírható a $\tilde{W} = OA$ alakban, ahol O ortogonális mátrix, A pedig pozitív definit mátrix, s mindkettőnek a determinánsa 1. Az O, A mátrixok analitikusan függenek \tilde{W} -től. A mi kétdimenziós mátrixaink esetében az O mátrixok halmaza a körrel, az A -k halmaza az euklideszi síkkal homeomorf, úgyhogy az \mathfrak{S} csoport sokaság topologikus szorzata a körnek és a síknak. Ebből következik, hogy \mathfrak{S} univerzális fedőcsoportja, melyet \mathfrak{C} -vel jelölünk, a háromdimenziós euklideszi térrel homeomorf, és hogy \mathfrak{C} végtelen sokszor lefedi \mathfrak{S} -et.

Az \mathfrak{S} csoport paramétereinek bevezetése céljából a

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1 \quad (4.1)$$

mátrixokból indulunk ki, és bevezetjük a $\beta/\alpha = \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ jelölést. Minthogy $\alpha\bar{\alpha}(1 - \gamma\bar{\gamma}) = 1$, bevezethetjük az ω valós változót az

$$\alpha = e^{i\omega}(1 - \gamma\bar{\gamma})^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta = e^{i\omega}\gamma(1 - \gamma\bar{\gamma})^{-\frac{1}{2}} \quad (\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2) \quad (4.2)$$

definícióval. Az \mathfrak{S} csoport elemei ω -t mod 2π , az \mathfrak{Q} csoport elemei pedig mod π határozzák meg. Ami azonban a \mathfrak{C} fedőcsoportot illeti, az ω változó bármely két különböző értékéhez \mathfrak{C} -nek különböző elemei tartoznak. Az a csoportelem három paraméterét, a^1 -et, a^2 -t és a^3 -at γ_1 -gyel, γ_2 -vel és ω -val választjuk egyenlőnek. Gyakran kényelmesebbnek fogjuk találni $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ és ω használatát. E változók a következő tartományokban változnak:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}: & -\pi \leq \omega < \pi & (\gamma_1)^2 + (\gamma_2)^2 = \gamma\bar{\gamma} < 1, \\ \mathfrak{C}: & -\infty < \omega < \infty & (\gamma_1)^2 + (\gamma_2)^2 = \gamma\bar{\gamma} < 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Az e egységelem paraméterei $\gamma = \omega = 0$. (Megjegyezzük, hogy ezek a paraméterek

illeszkednek \tilde{W} fent megbeszélte poláris felbontásához. Speciálisan O az ω szögű elforgatás.)

A csoportoperációk könnyen kifejezhetők γ és ω segítségével. Legyen a és a' két tetszőleges csoportelem, legyen $a'' = a'a$, és jelöljük a , a' és a'' paramétereit rendre a (γ, ω) , (γ', ω') , ill. (γ'', ω'') szimbólumokkal. Ekkor

$$\gamma'' = (\gamma + \gamma' e^{-2i\omega}) \cdot (1 + \bar{\gamma}\gamma' e^{-2i\omega})^{-1} \quad (4.4)$$

$$\omega'' = \omega + \omega' + \frac{1}{2i} \log \{(1 + \bar{\gamma}\gamma' e^{-2i\omega}) \cdot (1 + \gamma\bar{\gamma}' e^{2i\omega})^{-1}\}. \quad (4.5)$$

Ezeket az egyenleteket a megfelelő W mátrixok összeszorozásával kaptuk [vö. (4.1)]. Mind a (4.4), mind a (4.5) egyenlet egyaránt érvényes \mathfrak{S} -en és \mathfrak{C} -n, azzal a különbséggel, hogy \mathfrak{S} -en a (4.5) egyenlet mod 2π értendő. A (4.4), (4.5) összefüggések *analitikusak* a $(\gamma_1, \gamma_2, \omega)$ és $(\gamma'_1, \gamma'_2, \omega')$ valós változókban; a logaritmust hatvány-sora definiálja. A (4.4) képlet értelmében γ'' abszolút értéke kisebb, mint 1, amint annak lennie is kell, minthogy

$$1 - \gamma''\bar{\gamma}'' = (1 - \gamma\bar{\gamma}) \cdot (1 - \gamma'\bar{\gamma}') \cdot |1 + \bar{\gamma}\gamma' e^{-2i\omega}|^{-2} > 0.$$

Legyen most $a^1 = a^{-1}$. Ekkor

$$\gamma' = -\gamma e^{2i\omega}, \quad \omega' = -\omega. \quad (4.6)$$

A $\gamma_1, \gamma_2, \omega$ ($(\gamma_1)^2 + (\gamma_2)^2 < 1$) valós változók bármely analitikus függvénye analitikus függvény a \mathfrak{C} csoporton; ezen változók bármely, ω -ban 2π szerint periodikus analitikus függvénye analitikus függvény \mathfrak{S} -en (speciálisan bármely függvény, amely kifejezhető α és β valós és képzetes részének függvényeként, hacsak teljesül az $\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1$ feltétel).

4b. *Infinitezimális transzformációk. Invariáns integrálás.* Legyen $\chi = \kappa^r \chi_r$ ($r=0, 1, 2$) a Lie-algebra tetszőleges eleme; fennáll:

$$\left. \begin{aligned} \chi W(a) &\equiv \chi^i(a) \frac{\partial W(a)}{\partial a^i} = M_\chi W(a), \quad \chi^i(a) = \kappa^r \chi_r^i(a), \quad (i = 1, 2, 3); \\ M_\chi &= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \kappa^0 & -(\kappa^1 - i\kappa^2) \\ \kappa^1 + i\kappa^2 & -\kappa^0 \end{pmatrix} = \kappa^r M_r. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Az M_χ mátrixok kifejezését (3.10)-ből kapjuk, behelyettesítve az $l_{30} = l_{31} = l_{32} = 0$ és a $\kappa^0 = l_{12}$, $\kappa^1 = l_{20}$, $\kappa^2 = l_{01}$ értékeket. Minthogy a három $\partial W(a)/\partial a^i$ mátrix lineárisan független, a $\chi_r^i(a)$ függvényeket (4.7) egyértelműen meghatározza. Komplex jelölést használva, a χ_r differenciáloperátorokat a következő tömörebb alakban írhatjuk fel:

$$\chi_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega}, \quad \chi_1 + i\chi_2 = e^{-2i\omega} \left\{ i(1 - \gamma\bar{\gamma}) \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{2} \bar{\gamma} \frac{\partial}{\partial \omega} \right\}, \quad (4.8)$$

ahol $\partial/\partial \gamma = \frac{1}{2}(\partial/\partial \gamma_1 - i\partial/\partial \gamma_2)$. [A $\hat{\chi}_r^i(a)$ függvények hasonló módon számíthatók ki (1.34a)-ból, U -t és L -et W -vel, ill. M -mel helyettesítve.]

A $\chi_r^i(a)$ -k $\Delta(a)$ determinánsának értéke (4.8) értelmében $(1/8)(1 - \gamma\bar{\gamma})^2$. Amint azt a 2a. §-ban láttuk, a csoportintegrálás mind jobb-, mind pedig bal-invariáns,

és így $da = \text{const.} (\Delta(a))^{-1} d\gamma_1 d\gamma_2 d\omega$ (vö. 1c. §). A konstans értékét $1/16\pi^2$ -nek választjuk; definíciószerűen

$$da = \frac{d\gamma_1 d\gamma_2 d\omega}{2\pi^2(1-\gamma\bar{\gamma})^2}. \quad (4.9)$$

Az \mathfrak{S} csoport teljes térfogata nyilvánvalóan végtelen.

4c. μ, ζ, v paraméterek. Az alábbiakban célszerűbb lesz, ha más paramétereket használunk, melyek hasonlóak az Euler-féle forgási szögekhez. Mivel $\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1$, minden (α, β) párhoz található három olyan μ, ζ, v valós szám, hogy

$$\alpha = \text{ch } \zeta e^{-i(\mu+v)}, \quad \beta = \text{sh } \zeta e^{i(v-\mu)}$$

teljesüljön. A megfelelő W mátrix a következőképpen bontható fel:

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\mu} & 0 \\ 0 & e^{i\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch } \zeta & \text{sh } \zeta \\ \text{sh } \zeta & \text{ch } \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-iv} & 0 \\ 0 & e^{iv} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

A (4.7) képlet szerint az ezen egyenlet jobboldalán álló három mátrix rendre egyenlő $\exp(2\mu M_0)$ -lal, $\exp(2\zeta M_2)$ -vel, ill. $\exp(2v M_0)$ -lal. Ebből következik, hogy az \mathfrak{S} csoport tetszőleges a eleme kifejezhető az

$$a = \exp(2\mu\chi_0) \exp(2\zeta\chi_2) \exp(2v\chi_0) \quad (4.12)$$

szorzat alakjában, alkalmasan választott μ, ζ, v mellett.

A (3.3) képlet folytán a (4.12) szorzat tényezői az x^k változókat a következőképpen transzformálják:

$$\exp(2\mu\chi_0): y^0 = x^0, \quad y^1 = \cos 2\mu x^1 - \sin 2\mu x^2, \quad y^2 = \sin 2\mu x^1 + \cos 2\mu x^2, \quad (4.13a)$$

$$\exp(2\zeta\chi_2): y^0 = \text{ch } 2\zeta x^0 + \text{sh } 2\zeta x^1, \quad y^1 = \text{sh } 2\zeta x^0 + \text{ch } 2\zeta x^1, \quad y^2 = x^2 \quad (4.13b)$$

[vö. (2.9), (2.9a)]. Ha a (4.13b) képletet a megszokott

$$y^0 = (1-v^2)^{-\frac{1}{2}}(x^0 + vx^1), \quad y^1 = (1-v^2)^{-\frac{1}{2}}(vx^0 + x^1), \quad y^2 = x^2 \quad (4.14)$$

alakban írjuk fel, a (4.12) Lorentz-transzformáció definiálta v sebességre a

$$v = \text{th } 2\zeta, \quad (1+v)^{\frac{1}{2}}(1-v)^{-\frac{1}{2}} = e^{2\zeta} \quad (4.14a)$$

kifejezést kapjuk.

μ, ζ, v paraméterek tartománya. Nyilvánvaló, hogy a (4.10) egyenletek nem határozzák meg a μ, ζ, v paramétereket egyértelműen. Szimmetriaokokra való tekintettel e paraméterek változásának tartományát a következő egyenlőtlenségekkel definiáljuk:

$$0 \leq \zeta < \infty, \quad -\pi \leq \mu, v < \pi. \quad (4.15)$$

Ekkor $\text{sh } \zeta = |\beta|$, és ha $\zeta \neq 0$, két olyan paraméter-hármas van, amelyek ugyanazon csoportelemnek felelnek meg; ezek: (μ, ζ, v) és $(\mu \pm \pi, \zeta, v \pm \pi)$ [itt az előjeleket úgy választjuk, hogy a (4.15) egyenlőtlenségek teljesüljenek].¹⁰ Ha $\zeta = 0$, akkor csak a $\mu + v$ összeg van definiálva. A (4.12) egyenletben (μ, ζ, v) bármely értékeit használ-

¹⁰ Bármely, \mathfrak{S} -en értelmezett függvény változatlan marad, ha (μ, v) -t $(\mu \pm \pi, v \pm \pi)$ -vel helyettesítjük.

hatjuk; a (4.15) egyenleteket főként akkor fogjuk alkalmazni, ha az egész \mathfrak{S} csoport-sokaságra integrálunk. Paramétereink kétszeresen lefedik \mathfrak{S} -et, kivéve a $\zeta=0$ halmazt, ami azonban elhanyagolható, minthogy mértéke zérus.

A γ, ω paramétereiket a következőképpen kaphatjuk meg:

$$\gamma = \text{th } \zeta e^{2iv}, \quad \omega = -(\mu + v) \pmod{2\pi}. \quad (4.16)$$

Infinitézimális transzformációk; a térfogatelem az \mathfrak{S} csoport-sokaságon. A (μ, ζ, v) paraméterek használata mellett a (4.8) egyenletek a következő alakot öltik:

$$\chi_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad \chi_1 + i\chi_2 = \frac{1}{2} e^{2i\mu} \left\{ i \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{\text{sh } 2\zeta} \left(\text{ch } 2\zeta \frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial v} \right) \right\} \quad (4.17)$$

[(4.17) közvetlenül megkapható (4.7)-ből].

A későbbiekben használni fogjuk a Q -nak megfelelő Ω másodrendű differenciál-operátort [vö. (2.23)]:

$$\Omega = (\chi_0)^2 - (\chi_1)^2 - (\chi_2)^2. \quad (4.18)$$

Ezt az $\Omega = (\chi_0)^2 - \frac{1}{2}(\chi_1 + i\chi_2)(\chi_1 - i\chi_2) - \frac{1}{2}(\chi_1 - i\chi_2)(\chi_1 + i\chi_2)$ alakban felírva, (4.17) felhasználásával kapjuk:

$$-4\Omega = (\text{sh } 2\zeta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\text{sh } 2\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + (\text{sh } 2\zeta)^{-2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} - 2 \text{ch } 2\zeta \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right). \quad (4.19)$$

Végezetül, a da térfogatelem kifejezése:

$$da = (2\pi)^{-2} \text{sh } 2\zeta d\zeta d\mu dv. \quad (4.20)$$

Minthogy a (4.15) alatt definiált (μ, ζ, v) paraméterek a csoport-sokaságot kétszeresen fedik le, a (4.20) képlet jobboldalát egy külön $\frac{1}{2}$ szorzótényezővel láttuk el.

4d. *Invariáns metrika az \mathfrak{S} csoporton.* A csoportoperációk \mathfrak{S} -en: α és β valós és képezetes részének lineáris transzformációi, melyek az $\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}$ alakot változtatlanul hagyják. Nyilvánvaló, hogy a $ds^2 = d\alpha d\bar{\alpha} - d\beta d\bar{\beta} = -(d\zeta)^2 + (d\mu)^2 + (dv)^2 + 2 \text{ch } 2\zeta d\mu dv$ indefinit ívelemnégyzet ugyancsak invariáns e transzformációkkal szemben. Írható: $ds^2 = h_{kl} dq^k dq^l$, ahol $(q^1, q^2, q^3) = (\mu, \zeta, v)$. A $h^{\frac{1}{2}} dq^1 dq^2 dq^3$ térfogatelem (ahol h a h_{kl} -ek determinánsa) jobb- és balinvariáns térfogatelemet definiál a csoport-sokaságon. Minthogy $h^{\frac{1}{2}} = \text{sh } 2\zeta$, ez a térfogatelem — állandó tényezőtől eltekintve — megegyezik (4.20)-szal. Megjegyzendő, hogy a ds^2 ívelemnégyzetnek megfelelő $h^{-\frac{1}{2}} \partial / \partial q^k (h^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \partial / \partial q^l)$ Laplace-operátor megegyezik a 4Ω -val, ahol Ω a fent definiált operátor.

4e. *Az egységkör konform transzformációi önmagára.* A következőkben azt a kétdimenziós¹¹ komplex \mathfrak{M} sokaságot vizsgáljuk, amelyet két komplex változó, ξ^1 és ξ^2 ír le, melyek a $\xi^1 \bar{\xi}^1 > \xi^2 \bar{\xi}^2$ egyenlőtlenségnek tartoznak elegendően; hasson az \mathfrak{S} csoport \mathfrak{M} -en a következőképpen:

$$\eta^1 = (a\xi)^1 = a\xi^1 + \beta\xi^2, \quad \eta^2 = (a\xi)^2 = \bar{\beta}\xi^1 + \bar{a}\xi^2, \quad \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1 \quad (4.21)$$

¹¹ Itt komplex dimenziók értendők.

(a tetszőleges eleme \mathfrak{S} -nek). E transzformációkkal szemben a $\xi^1 \bar{\xi}^1 - \xi^2 \bar{\xi}^2$ alak invariáns, speciálisan $\eta^1 \neq 0$. A (4.7) képlet szerint

$$\chi \eta^1 = -\frac{i}{2} (\kappa^0 \eta^1 - (\kappa^1 - i\kappa^2) \eta^2), \quad \chi \eta^2 = -\frac{i}{2} ((\kappa^1 + i\kappa^2) \eta^1 - \kappa^0 \eta^2); \quad (4.22)$$

itt $\chi = \kappa^r \chi_r$.

A $z = \xi^2 / \xi^1$ változó egy \mathfrak{M}^* sokaságot definiál: a $z\bar{z} < 1$ nyílt kört. Az \mathfrak{M}^* sokaságon a (4.21) transzformáció \mathfrak{M}^* önmagára való

$$y = az = \frac{\bar{\alpha}z + \beta}{\beta z + \alpha} \quad (4.23)$$

konform leképezését indukálja. A (4.22) képletből kapott infinitezimális transzformáció:¹²

$$\chi y = \lambda_\chi(y) = \chi \left(\frac{\eta^2}{\eta^1} \right) = \frac{\eta^1 (\chi \eta^2) - \eta^2 (\chi \eta^1)}{(\eta^1)^2} = -\frac{i}{2} \{ (\kappa^1 + i\kappa^2) - 2\kappa^0 y + (\kappa^1 - i\kappa^2) y^2 \}. \quad (4.24)$$

Amint azt az 1h. § végén láttuk, (4.23) nevezője ennek a transzformációcsoportnak *multiplikátora*:

$$\mu(a, z) = \alpha + \beta z. \quad (4.25)$$

Következésképpen a $\tau_\chi(z)$ infinitezimális multiplikátort $\{\chi(\alpha + \beta z)\}_{a=e} = \{(\chi\alpha) + (\chi\beta)z\}_{a=e}$ adja meg [vö. (1.45)]:

$$\tau_\chi(z) = \frac{i}{2} (-\kappa^0 + (\kappa^1 - i\kappa^2)z). \quad (4.26)$$

Egyébként fennáll: $\tau_\chi(z) = -\frac{1}{2} d\lambda_\chi(z)/dz$.

A γ, ω paraméterek segítségével a (4.23) transzformációt az ismertebb

$$y = e^{-2i\omega} \frac{z + \bar{\gamma}}{1 + \gamma z}$$

alakban írhatjuk fel.

4f. *Megjegyzések \mathfrak{S} egyparaméteres alcsoportjairól.* Az \mathfrak{S} csoport egyparaméteres alcsoportjainak a 2. § végén definiált három osztálya: az elliptikus, a hiperbolikus és a parabolikus alcsoportok, könnyen jellemezhetők a (4.23) transzformációk fix pontjaival. Az $a(t) = \exp(t\chi)$ egyparaméteres alcsoport u fix pontja kielégíti a $\lambda_\chi(u) = 0$ másodfokú egyenletet [vö. (4.24)]. Attól függően, hogy milyen $\kappa^r \kappa_r$ előjele, a következő három eset lehetséges:

I. *Elliptikus alcsoport* ($\kappa^r \kappa_r > 0$). Feltehetjük, hogy $\kappa^0 > 0$. A $\lambda_\chi(u) = 0$ egyenletnek két különböző gyöke van, u és $1/\bar{u}$, melyek egyike, mondjuk u , egynél kisebb abszolút-értékű. Az egységkör belsejébe eső fix pontra kapjuk:

$$u = (\kappa^1 + i\kappa^2) / (\kappa^0 + \sqrt{\kappa^r \kappa_r}), \quad \sqrt{\kappa^r \kappa_r} > 0.$$

Ha $\chi = \chi_0$, akkor a fix pont a kezdőpont.

¹² Itt y^2 az y négyzetét jelöli.

II. *Hiperbolikus alcsoport* ($\kappa' \kappa_r < 0$). Most két fix pont van, u_+ és u_- ; mind a kettő rajta van a $|z|=1$ egységkörön. Ezeket explicite az

$$\left. \begin{matrix} u_+ \\ u_- \end{matrix} \right\} = (\kappa^0 \pm i \sqrt{-\kappa' \kappa_r}) / (\kappa^1 - i \kappa^2)$$

képlet adja meg; χ_1 és χ_2 esetében a fix pontok $\pm i$, ill. ± 1 .

III. *Parabolikus alcsoport* ($\kappa' \kappa_r = 0$): $\lambda_\chi(u) = 0$ -nak egységnyi abszolút-értékű kétszeres gyöke van. Ez az eset mind I-nek ($|u| \rightarrow 1$), mind II-nek (u_+ és u_- egybeesik) határeseté. Most $u = (\kappa^1 + i \kappa^2) / \kappa^0$; $\chi_0 + \chi_1$ és $\chi_0 + \chi_2$ esetében $u = 1$, ill. $u = i$.

5. §. Az \mathfrak{S} csoport infinitezimális ábrázolásai

A következőkben megszerkesztjük az \mathfrak{S} csoport irreducibilis unitér ábrázolásait. Ebben a §-ban \mathfrak{S} Lie-algebrájának ábrázolásait határozzuk meg, majd pedig \mathfrak{S} megfelelő ábrázolásait szerkesztjük meg (6—9. §§).

5a. *Bevezető megjegyzések.* Legyen \mathfrak{H} egy komplex Hilbert-tér, melynek elemei f, g, \dots . A \mathfrak{H} tér két vektorának, f -nek és g -nek belső szorzatát a következőképpen jelöljük: $(f, g) = (g, f)$, az f vektor normája: $\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$. Feltesszük, hogy a belső szorzat a második tényezőben lineáris, vagyis bármely komplex λ szám mellett fennáll:

$$(f, \lambda g) = \lambda (f, g), \quad (\lambda f, g) = \bar{\lambda} (f, g). \quad (5.1)$$

Csupán az *erős konvergencia* fogalmát fogjuk felhasználni; azt mondjuk, hogy az f_n sorozat konvergál f -hez ($f_n \rightarrow f$), ha $\|f_n - f\| \rightarrow 0$.

Legyen A tetszőleges operátor, amelynek értelmezési tartománya mindenütt sűrű; A adjungáltját az A^* szimbólummal jelöljük. A B lineáris operátor kiterjesztése A -nak ($B \supset A$), ha B értelmezési tartománya magában foglalja A értelmezési tartományát s ott $Bf = Af$.

Az \mathfrak{S} csoport egy irreducibilis unitér ábrázolását a \mathfrak{H} téren a következőképpen definiáljuk:

1. Az \mathfrak{S} csoport minden egyes a elemének megfelel egy-egy $U(a)$ operátor a \mathfrak{H} téren.

2. Ha a és b az \mathfrak{S} csoport két tetszőleges eleme, fennáll: $U(a)U(b) = U(ab)$. (Ábrázolási tulajdonság.)

3. Ha az $a_n \in \mathfrak{S}$ sorozat a -hoz konvergál, akkor a \mathfrak{H} tér tetszőleges f elemére fennáll $U(a_n)f \rightarrow U(a)f$. (Folytonosság.)

4. A \mathfrak{H} térnek nincs olyan valódi zárt lineáris altere, amely invariáns volna valamennyi $U(a)$ -val szemben, vagyis ha a \mathfrak{R} zárt lineáris alterre fennáll az $U(a)\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$ reláció tetszőleges $a \in \mathfrak{S}$ mellett, akkor \mathfrak{R} vagy $\{0\}$, vagy \mathfrak{H} . (Irreducibilitás.)¹³

Ad 2. Minthogy $ae = a$, $aa^{-1} = e$, fennáll: $U(a)U(e) = U(a)$, és $U(a)U(a^{-1}) = U(e)$, következésképpen

$$U(e) = 1, \quad U(a^{-1}) = U(a)^{-1}. \quad (5.3)$$

Ad 3. Amint az jól ismeretes, az ábrázolási tulajdonság folytán elegendő 3-at az e -hez konvergáló sorozatokra megkövetelni.

¹³ $\{0\}$ az a lineáris sokaság, amely csak az $f=0$ elemet tartalmazza.

5b. *Az irreducibilitás kritériuma.* Fel fogjuk használni a következő jól ismert kritériumot:

1. *segéd-tétel.* Legyen \mathcal{U} a \mathfrak{H} téren ható unitér operátorok egy halmaza, mely U -val együtt annak inverzét, U^{-1} -et is tartalmazza. Az \mathcal{U} halmaz akkor és csak akkor irreducibilis, ha minden olyan A korlátos lineáris operátor, amely mindegyik U -val felcserélhető, az $A = \alpha \cdot 1$ alakú (ahol α komplex szám).

A teljesség kedvéért közöljük ezen segéd-tétel bizonyítását. Legyen \mathfrak{R} az $U(\in \mathcal{U})$ transzformációkkal szemben invariáns zárt lineáris sokaság, azaz: $Uf \in \mathfrak{R}$, ha $f \in \mathfrak{R}$. Jelölje \mathfrak{R} projekció-operátorát E ; fennáll: $E^* = E$, $E^2 = E$, minden Ef alakú vektor ($f \in \mathfrak{H}$) benne van \mathfrak{R} -ban, és minden $f \in \mathfrak{R}$ vektorra teljesül $Ef = f$. Ekkor $E(Uf) = UEf$ minden f -re, vagyis $EUE = UE$. Ugyanez az egyenlet $U^{-1} = U^*$ -ra is fennáll, úgyhogy $EU^*E = U^*E$. Mindkét oldal adjungáltját képezve kapjuk: $EUE = EU$, így tehát $EU = UE$. Megfordítva, ha az E projekció-operátor mindegyik U -val kommutál, akkor $E(Uf) = E(EU) = EU = UE$, és így az E segítségével definiált \mathfrak{R} zárt lineáris sokaság invariáns az U transzformációkkal szemben.

1. Legyen először \mathcal{U} reducibilis. Ekkor létezik olyan \mathfrak{R} invariáns sokaság, amely különbözik \mathfrak{H} -től és $\{0\}$ -től, s amelynek projekció-operátora így különbözik 1-től és 0-tól. Így tehát U kommutál az $\alpha \cdot 1$ -től különböző alakú E korlátos operátorral.

2. Ha \mathcal{U} irreducibilis, akkor az egyedüli projekció-operátorok, amelyek valamennyi U -val kommutálnak, az $E=1$ és az $E=0$. Legyen B korlátos, önadjungált operátor, mely kommutál valamennyi U -val, és legyen $B = \int_{c_1}^{c_2} \lambda dE(\lambda)$ annak spektrális előállítás (c_1, c_2 véges). Ekkor mindegyik $E(\lambda)$ kommutál valamennyi U -val, és így az $E(\lambda)$ -k mindegyike vagy 0, vagy 1. Ebből következik, hogy $B = \beta \cdot 1$. Legyen végül A tetszőleges korlátos lineáris operátor, mely minden U -val kommutál. Ekkor $AU = UA$, azonkívül $AU^* = U^*A$ (minthogy $U^* = U^{-1}$ ugyancsak benne van \mathcal{U} -ban), következésképpen $A^*U = UA^*$. Ebből következik, hogy a két önadjungált korlátos operátor, $B = A^* + A$ és $C = i(A^* - A)$, szintén kommutál valamennyi U -val. Így a fentiek alapján $B = \beta \cdot 1$, $C = \gamma \cdot 1$ (alkalmas β, γ mellett), és $A = \frac{1}{2}(B + iC) = \alpha \cdot 1$, ahol $\alpha = \frac{1}{2}(\beta + i\gamma)$ q.e.d.

5c. *Egyparaméteres alcsoportok.* Tárgyalásunk alapjául (gyengébb alakjában) Stone tétele szolgál, melyet a következő alakban mondunk ki (vö. [Stone 1, 2], [von Neumann 2]).

Stone tétele: 1. Legyen U_t ($-\infty < t < \infty$) a \mathfrak{H} téren ható unitér operátorok egyparaméteres csoportja; teljesüljön $U_s U_t = U_{s+t}$, továbbá $U_t f \rightarrow U_{t_0} f$, ha $f \in \mathfrak{H}$ és $t \rightarrow t_0$. Ekkor U_t kifejezhető az $U_t = \exp(-itH)$ alakban, ahol H önadjungált operátor a \mathfrak{H} téren. Ha $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$, $U_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} dE(\lambda)$. 2. Konvergáljon t_n ($t_n \neq 0$; $n=1, 2, \dots$) zérushoz. A $t_n^{-1}(U_{t_n} - 1)f$ sorozat ($f \in \mathfrak{H}$), akkor és csak akkor konvergens, ha Hf létezik. Ha Hf létezik, $t^{-1}(U_t - 1)f \rightarrow -iHf$ ($t \rightarrow 0$, $t \neq 0$).

Térjünk most vissza \S (5.2) alatt jellemzett ábrázolásainak tanulmányozásához. Legyen $a(t) = \exp(t\chi)$ egyparaméteres alcsoport \mathfrak{S} -en, és legyen $U_t = U(a(t))$. Az U_t operátorok teljesítik a Stone-tétel feltételeit és kifejezhetők az $U_t = \exp(-itH_\chi)$

alakban, ahol a H_χ önadjungált operátor függ χ -től. Ez az összefüggés megfelel annak, amit végesdimenziós ábrázolások esetében találtunk [vö. 1e. §, ahol L_χ áll $(-iH_\chi)$ helyett]. A H_χ operátorok neve: ábrázolásunk *infinitezimális operátorai*. Ha $\chi = \chi_r$, a megfelelő infinitezimális operátor jele: H_r ($r=0, 1, 2$).

Konjugált alcsoportok. Ugyanúgy, mint az 1e. §-ban, meg lehet mutatni, hogy $\exp(-itH_{\chi'}) = U(b) \exp(-itH_\chi) U(b)^{-1}$, ha $\chi' = b\chi b^{-1}$. Következésképpen

$$H_{\chi'} = U(b) H_\chi U(b)^{-1}, \quad \chi' = b\chi b^{-1}. \quad (5.4)$$

Ha \mathfrak{D}_χ a H_χ operátor értelmezési tartománya, vagyis az a lineáris sokaság, amelyen H_χ értelmezve van, akkor (5.4) értelmében fennáll:

$$\mathfrak{D}_{\chi'} = U(b) \mathfrak{D}_\chi. \quad (5.5)$$

Szeretnénk a H_χ operátorokra megkövetelni az \mathfrak{S} csoport s Lie-algebrájának ábrázolásait jellemző, 1e. §-beli összefüggések valamilyen analogonját. Várható azonban, hogy a H_χ operátorok nemkorlátosak (ki fog tűnni, hogy valóban ez a helyzet), s így a H_χ operátorok lineáris kombinációi és kommutátorai nem definiálhatók megfelelő módon, csak ha értelmezési tartományaikra vonatkozóan alkalmas feltevéseket teszünk. Ezt fogjuk tenni a következőkben.

5d. Az *infinitezimális ábrázolásokra vonatkozó feltevések.* Kiindulásképpen néhány észrevételt teszünk a H_χ operátorok \mathfrak{D}_χ értelmezési tartományaira vonatkozóan.

2. definíció. *Valamennyi \mathfrak{D}_χ értelmezési tartomány közös részét \mathfrak{A} -val jelöljük, \mathfrak{A} tehát mindazon f vektorokból álló lineáris sokaság, amelyekre mindegyik H_χ alkalmazható. Azon f vektoroknak, melyekre minden $H_{\chi'} \cdot H_\chi$ szorzat alkalmazható, a lineáris sokaságát jelölje \mathfrak{B} (itt χ', χ az s Lie-algebrának tetszőleges elemei). \mathfrak{A} és \mathfrak{B} jelölje \mathfrak{A} , ill. \mathfrak{B} lezárását.*

Nilvánvaló, hogy $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{A}} \supset \overline{\mathfrak{B}}$.

2. segédtétel. *Irreducibilis ábrázolás esetében vagy $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} = \{0\}$, vagy $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{H}$; továbbá vagy $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} = \{0\}$, vagy $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{H}$.¹⁴*

Elegendő, ha ezt $\overline{\mathfrak{A}}$ -ra igazoljuk, mivel ugyanaz a megfontolás $\overline{\mathfrak{B}}$ -re is alkalmazható. Az (5.4) és (5.5) képletekből következik, hogy $U(b)f \in \mathfrak{A}$, valahányszor $f \in \mathfrak{A}$ (tetszőleges $b \in \mathfrak{S}$ mellett), azaz $U(b)\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$. Minthogy $U(b)$ unitér, $U(b)\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$ ugyancsak fennáll. Mivel $\overline{\mathfrak{A}}$ zárt, az állítás következik. (Vö. [Wigner, 155. old.])

Minthogy tárgyalásunkat az s Lie-algebra egy ábrázolására kívánjuk alapozni, a $\mathfrak{B} = \{0\}$ esetet kizárjuk, feltesszük, hogy $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{H}$, és *a fortiori* $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{H}$. Ezenkívül bevezetjük a következő feltevést. Ha f a \mathfrak{D}_χ értelmezési tartomány egy vektora, létezik olyan f_n sorozat ($f_n \in \mathfrak{D}$), hogy $f_n \rightarrow f$, $H_\chi f_n \rightarrow H_\chi f$. (Ez már maga után vonja $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{H}$ fennállását, minthogy a \mathfrak{D}_χ lineáris sokaság sűrű \mathfrak{H} -ban.) Ezt a feltevést csupán a H_0 operátorra vonatkozóan fogjuk felhasználni [vö. (5.17)].

Ami a Lie-algebra ábrázolását illeti, elegendő megkövetelnünk, hogy $H_{(\alpha\chi + \alpha'\chi')} = \alpha H_\chi + \alpha' H_{\chi'}$ teljesüljön \mathfrak{A} -n (tetszőleges α, α' állandók, és s tetszőleges χ, χ' elemei mellett), illetőleg hogy $H_{(\chi + \chi')} = H_\chi + H_{\chi'}$ teljesüljön, mivel a $H_{(\alpha\chi)} = \alpha H_\chi$

¹⁴ $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ legalább egy $f \neq 0$ elemet tartalmaz, akkor sűrű \mathfrak{H} -ban.

reláció nyilvánvalóan fennáll. A felcserélési szabályok ekkor levezethetők. Felteteleinket a következőkben összegezzük.

1. Ha f a H_χ operátor \mathfrak{D}_χ értelmezési tartományának egy vektora, akkor létezik \mathfrak{B} -ben olyan f_n sorozat (lásd fent a 2. definíciót), hogy $f_n \rightarrow f$, $H_\chi f_n \rightarrow H_\chi f$. (5.6)
2. Minden f vektorra, mely benne van \mathfrak{A} -ban, fennáll $H_{(\chi+\chi')}f = H_\chi f + H_{\chi'}f$.

1.-ből következik, hogy

$$\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{H}. \quad (5.7)$$

A (2.17) egyenlet szerint $b\chi_k b^{-1} = w_k^l(b)\chi_l$. Az (5.4) összefüggést s a fenti 2. feltételt alkalmazva, bármely $f \in \mathfrak{A}$ mellett kapjuk:

$$U(b)H_k U(b)^{-1}f = w_k^l(b)H_l f \quad (k = 0, 1, 2). \quad (5.8)$$

Szintén következik, hogy \mathfrak{A} -n minden H_χ lineáris kombinációja H_0 -nak, H_1 -nek és H_2 -nek. Ha H_r értelmezési tartományát \mathfrak{D}_r -rel jelöljük, \mathfrak{A} -t mint \mathfrak{D}_0 , \mathfrak{D}_1 és \mathfrak{D}_2 közös részét jellemezhetjük.

5e. A Q operátor. A Q operátort a következőképpen definiáljuk. Értelmezési tartománya \mathfrak{B} , és bármely $f \in \mathfrak{B}$ mellett

$$Qf = (H_1)^2 f + (H_2)^2 f - (H_0)^2 f = -g^{rs} H_r H_s f. \quad (5.9)$$

[Ez megfelel a (2.23) definíciónak.] Mivel a H_r -ek önadjungáltak, $(Qf, g) = (f, Qg)$ bármely két $f, g \in \mathfrak{B}$ vektorra, azaz $Q \subset Q^*$.

Az (5.8) képlet alapján kiszámíthatjuk $U(b)QU(b)^{-1}f$ -et ($f \in \mathfrak{B}$). Valóban, kapjuk: $g^{rs}U(b)H_r H_s U(b)^{-1}f = g^{rs}U(b)H_r U(b^{-1})U(b)H_s U(b)^{-1}f = g^{rs}w_r^k(b)w_s^l(b)H_k H_l f = g^{kl}H_k H_l f$; itt felhasználtuk a (2.3) ortogonalitási összefüggéseket. Így bármely $b \in \mathfrak{S}$ mellett fennáll:

$$U(b)QU(b)^{-1}f = Qf \quad (f \in \mathfrak{B}) \quad (5.10)$$

vagy

$$U(b)Qf = QU(b)f \quad (f \in \mathfrak{B}). \quad (5.11)$$

A Q operátort kiterjeszthetjük, lezárását \overline{Q} -sal jelöljük; ennek értelmezési tartományát jelölje \mathfrak{E} . Minthogy \mathfrak{E} tartalmazza \mathfrak{B} -t, mindenütt sűrű a \mathfrak{H} térben. (Valahányszor van egy konvergens sorozatunk: $f_n \rightarrow f$ ($f_n \in \mathfrak{B}$), a Qf_n sorozat szintén konvergens: $f \in \mathfrak{E}$ és $\overline{Q}f = \lim Qf_n$. A \mathfrak{B} értelmezési tartományon $\overline{Q}f = Qf$.) \overline{Q} zárt hermitikus operátor, és (5.11)-ből következik, hogy

$$U(b)\mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}, \quad U(b)\overline{Q}f = \overline{Q}U(b)f. \quad (5.12)$$

Képezzük most \overline{Q} Cayley-transzformáltját: $V = (\overline{Q} - i)(\overline{Q} + i)^{-1}$ (vö. [von Neumann I, 80. old.]). A V operátor \mathfrak{D}_V értelmezési tartománya az összes $h = (\overline{Q} + i)f$ ($f \in \mathfrak{E}$) alakú vektorból áll; \mathfrak{D}_V -n $Vh = (\overline{Q} - i)f$. Azonfelül $\|Vh\| = \|h\|$ és $Vh \neq h$, kivéve ha $h = 0$ (azaz $f = 0$). Az (5.12) képletből következik:

$$U(b)\mathfrak{D}_V \subset \mathfrak{D}_V, \quad U(b)Vh = VU(b)h \quad (h \in \mathfrak{D}_V). \quad (5.13)$$

Minthogy \mathfrak{D}_V zárt lineáris sokaság és különbözik $\{0\}$ -tól, az (5.13) egyenletek közül az elsőből s az $U(b)$ operátorok irreducibilitásából következik, hogy $\mathfrak{D}_V = \mathfrak{H}$. Ennél fogva V a \mathfrak{H} téren mindenütt értelmezve van, korlátos ($\|Vh\| = \|h\|$), és (5.13) második egyenlete folytán kommutál az $U(b)$ -k mindegyikével. Így tehát a $V = \alpha \cdot 1$

alakú (vö. fent: 1. segédétel), ahol α egységnyi abszolút-értékű szám, azonban különbözik 1-től. Ekkor bármely $f \in \mathfrak{E}$ mellett fennáll: $(\bar{Q} - i)f = \alpha(\bar{Q} + i)f$, azaz $\bar{Q}f = q \cdot f$, ahol q az $i(1 + \alpha)/(1 - \alpha)$ valós szám. (Következik, hogy $\mathfrak{E} = \mathfrak{H}$.) Ez speciálisan igaz az $f \in \mathfrak{B}$ elemre; ekkor $\bar{Q}f = Qf$. Következésképpen

$$Qf = q \cdot f \quad (f \in \mathfrak{B}). \quad (5.14)$$

Ezen egyenlet és az (5.6) feltételek közül az első alapján következtetést vonhatunk le a H_0 operátor \mathfrak{D}_0 értelmezési tartományára vonatkozóan. Minden $f \in \mathfrak{B}$ vektorra fennáll $(f, Qf) = q \cdot (f, f)$ s így Q definíciója alapján

$$\|H_1 f\|^2 + \|H_2 f\|^2 - \|H_0 f\|^2 = q \cdot \|f\|^2. \quad (5.15)$$

Legyen g egy vektora \mathfrak{D}_0 -nak. Létezik olyan g_n ($g_n \in \mathfrak{B}$) sorozat, amelyre $g_n \rightarrow g$, $H_0 g_n \rightarrow H_0 g$. Az (5.15) összefüggést $f = g_m - g_n$ -re alkalmazva kapjuk:

$$\|H_1 g_m - H_1 g_n\|^2 + \|H_2 g_m - H_2 g_n\|^2 = \|H_0 g_m - H_0 g_n\|^2 + q \|g_m - g_n\|^2. \quad (5.16)$$

Az (5.16) egyenlet jobb oldala zérushoz tart, ha $m, n \rightarrow \infty$, s ebből következik, hogy a $H_1 g_n$, $H_2 g_n$ sorozatok konvergálnak. Minthogy a H_1 és H_2 operátorok zártak, g benne foglaltatik a \mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2 tartományokban, s így valamennyi \mathfrak{D}_r közös részében, azaz \mathfrak{A} -ban. Ez azt mutatja, hogy

$$\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{A} \quad (5.17)$$

(Megjegyezzük, hogy ez az egyenlőség csak \mathfrak{D}_0 esetében áll fenn, tekintettel arra, hogy a három H_r operátor aszimmetrikusan szerepel Q kifejezésében.)

5f. Az \mathfrak{S} csoport infinitezimális ábrázolásainak megszerkesztése. Az $a(t) = \exp(t\chi_0)$ egyparaméteres alcsoport kompakt Abel-csoport. A (4.11), (4.12) képleteket összehasonlítva láthatjuk, hogy $\exp(4\pi\chi_0) = e$. Ebből következik, hogy $U_t = \exp(-itH_0)$ spektruma tiszta pontspektrum, azaz létezik \mathfrak{H} -ban olyan g_n teljes ortonormált vektorendszer, amelyre fennáll¹⁵

$$U_t g_n = e^{-i\lambda_n t} g_n, \quad H_0 g_n = \lambda_n g_n. \quad (5.18)$$

Minthogy $a(4\pi) = e$, a λ_n sajátértékek vagy egész, vagy feles számok. Az (5.18) egyenlet közvetlenül megkapható Stone tételéből, vagy pedig felhasználhatjuk azt a tényt, hogy bármely kompakt csoport unitér ábrázolása felbontható végesdimenziós irreducibilis részekre, melyek Abel-csoport esetében egydimenziósak és (5.18) alakúak. (Vö. [Wigner, 194. old.].)

Válasszuk ki H_0 egy sajátértékét. Jelöljük ezt g -vel ($\|g\| = 1$) és legyen λ a megfelelő sajátérték: $H_0 g = \lambda g$. Az (5.17) képlet szerint $g \in \mathfrak{A}$ és így alkalmazhatók az (5.8) egyenletek. Legyen először $b = \exp(t\chi_0)$, $k = 1, 2$, és írjuk: $U_t = \exp(-itH_0)$. Csupán a következő w_k^j együtthatók nem tűnnek el: $w_1^1 = w_2^2 = \cos t$, $w_1^2 = -w_2^1 = \sin t$ [vö. (4.13a)]. Az (5.18) képlet felhasználásával kapjuk:

$$e^{i\lambda t} U_t H_1 g = (\cos t H_1 + \sin t H_2) g, \quad e^{i\lambda t} U_t H_2 g = (-\sin t H_1 + \cos t H_2) g. \quad (5.19)$$

¹⁵ A következőkben az összegezési konvenciót csak az 1. és 2. §-ban bevezetett mennyiségekre alkalmazzuk, speciálisan a χ_k^i , ω^r , g_{rs} , és w_j^i mennyiségekre. Az összes többi esetben a felső index kitévő, kivéve ha ennek ellenkezőjét állítjuk, és az ismételt fellépő indexekre nem kell összegezni.

Célszerű lesz, ha bevezetjük \mathfrak{A} -n a következő két operátort:

$$F = H_1 + iH_2, \quad G = H_1 - iH_2. \quad (5.20)$$

Az (5.19) egyenletekből kapjuk:

$$U_t Fg = e^{-i(\lambda+1)t} Fg, \quad U_t Gg = e^{-i(\lambda-1)t} Gg,$$

továbbá

$$t^{-1}(U_t - 1)Fg = t^{-1}(e^{-i(\lambda+1)t} - 1)Fg,$$

$$t^{-1}(U_t - 1)Gg = t^{-1}(e^{-i(\lambda-1)t} - 1)Gg \quad (t \neq 0).$$

Ha t -vel zérushoz tartunk, a két utóbbi egyenlet jobboldalán álló kifejezések $-i(\lambda+1)Fg$ -hez, ill. $-i(\lambda-1)Gg$ -hez tartanak. A baloldali kifejezéseknek ugyanezekhez a határértékekhez kell tartaniok, és Stone képletéből következik, hogy mind Fg , mind Gg benne van \mathfrak{D}_0 -ban s ennél fogva \mathfrak{A} -ban, továbbá hogy

$$H_0(Fg) = (\lambda+1)Fg, \quad H_0(Gg) = (\lambda-1)Gg. \quad (5.21)$$

Minthogy az előbbi megfontolás a $H_0g = \lambda g$ egyenleten alapult (nem használtuk ki azt a tényt, hogy $g \neq 0$), alkalmazhatjuk azt g helyett Fg -re és Gg -re, λ helyére $\lambda+1$ -et, ill. $\lambda-1$ -et írva. Indukcióval F és G tetszőleges egész kitevőjű hatványára kapjuk:

$$H_0(F^s g) = (\lambda+s)F^s g, \quad H_0(G^s g) = (\lambda-s)G^s g, \quad (5.22)$$

ahol az $F^s g$ és $G^s g$ vektorok benne fekszenek \mathfrak{A} -ban. [Ha $s=0$, (5.22) a $H_0g = \lambda g$ egyenletre redukálódik.] Mindegyik el nem tűnő $F^s g$ és $G^s g$ vektor sajátvektora H_0 -nak; a megfelelő sajátértékek $\lambda+s$ és $\lambda-s$.

Minthogy Fg és Gg benne fekszenek \mathfrak{A} -ban, ugyanez érvényes H_1g -re és H_2g -re, valamint $H_0g = \lambda g$ -re is. Ez azt mutatja, hogy még g is benne foglaltatik \mathfrak{B} -ben. Általánosabban meg lehet mutatni indukcióval, hogy a H_r operátorok minden véges szorzata alkalmazható g -re.

Felcserélési szabályok. Ha kivonjuk a két (5.21) egyenletből az $F(H_0g) = \lambda Fg$ és $G(H_0g) = \lambda Gg$ egyenleteket, a

$$(H_0F - FH_0)g = Fg, \quad (H_0G - GH_0)g = -Gg, \quad (5.22a)$$

$$(H_0H_1 - H_1H_0)g = iH_2g, \quad (H_2H_0 - H_0H_2)g = iH_1g \quad (5.22b)$$

ekvivalens alakokban felírható két egyenletet kapjuk. Látható, hogy az (5.22b) egyenletek a (2.22) egyenletek közül az elsőnek, ill. a harmadiknak felelnek meg, minthogy H_r az iL_r transzformációnak felel meg.

Abból a célból, hogy megkapjuk a második (2.22) egyenlet analogonját, újból (5.8)-at alkalmazzuk, most azonban a

$$H_k U(b)^{-1} g = U(b)^{-1} w_k^r(b) H_r g$$

alakban, ahol $b = \exp(t\chi_2)$, $k=1$. A w_1^r együtthatókat $w_2^r = \text{sh } t$, $w_1^1 = \text{ch } t$, $w_1^2 = 0$ [vö. (4.13b)] adja meg. Eszerint az $U_t = \exp(itH_2)$ jelölés mellett írható:

$$H_1 U_t g = U_t (\text{sh } t H_0 + \text{ch } t H_1) g$$

és

$$H_1 \{t^{-1}(U_t - 1)g\} = t^{-1} \text{sh } t U_t H_0 g + t^{-1} (\text{ch } t U_t - 1) H_1 g \quad (t \neq 0).$$

Itt felhasználjuk azt a tényt, hogy minden $f \in \mathfrak{D}_2$ vektorra és minden $\varphi(t)$ differenciálható függvényre fennáll: $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(\varphi(t)U_t - \varphi(0))g = i\varphi(0)H_2g + \varphi'(0)g$, ahol $\varphi'(t)$ a $\varphi(t)$ függvény deriváltja. Ennélfogva a legutolsó egyenlet jobboldala $t \rightarrow 0$ esetén $(H_0 + iH_2H_1)g$ -hez konvergál, aminek meg kell egyeznie a baloldal határértékével, iH_1H_2g -vel. Egyenlővé téve egymással ezt a két kifejezést, a harmadik felcserélési törvényt kapjuk két ekvivalens alakban:

$$(H_1H_2 - H_2H_1)g = -iH_0g, \quad (GF - FG)g = 2H_0g. \quad (5.23)$$

Az (5.22), (5.23) összefüggések nyilvánvalóan minden $F^s g$, $G^s g$ vektorra érvényesek. Megjegyezzük, hogy \mathfrak{B} -n fennáll:

$$2Q = GF + FG - 2(H_0)^2$$

és így

$$(GF + FG)g = 2(Q + (H_0)^2)g = 2(q + \lambda^2)g.$$

Kivonva ebből, ill. hozzáadva ehhez a második (5.23) egyenletet, kapjuk:

$$G(Fg) = \varrho_1 \cdot g, \quad \varrho_1 = q + \lambda(\lambda + 1), \quad (5.24a)$$

$$F(Gg) = \sigma_1 \cdot g, \quad \sigma_1 = q + \lambda(\lambda - 1). \quad (5.24b)$$

Az (5.24a) egyenletben g -t $F^{s-1}g$ -vel ($s \geq 1$), λ -t $\lambda + s - 1$ -gyel, az (5.24b) egyenletben g -t $G^{s-1}g$ -vel, λ -t $\lambda - s + 1$ -gyel helyettesítve kapjuk:

$$G(F^s g) = \varrho_s F^{s-1} g, \quad \varrho_s = q + (\lambda + s - 1)(\lambda + s), \quad (5.25a)$$

$$F(G^s g) = \sigma_s G^{s-1} g, \quad \sigma_s = q + (\lambda - s + 1)(\lambda - s). \quad (5.25b)$$

Ezeket az egyenleteket most arra használjuk fel, hogy rekurziós képleteket nyerjünk az $F^s g$, $G^s g$ vektorok normáira vonatkozóan. Minthogy \mathfrak{A} bármely két f_1, f_2 vektorára fennáll $(Ff_1, f_2) = (f_1, Gf_2)$, kapjuk:

$$\|F^{s+1}g\|^2 = (F^{s+1}g, F^{s+1}g) = (F^s g, GF^{s+1}g) = \varrho_{s+1}(F^s g, F^s g),$$

és így, elvégezve $G^s g$ -re is az analóg számítást:

$$\|F^{s+1}g\|^2 = \varrho_{s+1}\|F^s g\|^2, \quad \|G^{s+1}g\|^2 = \sigma_{s+1}\|G^s g\|^2 \quad (s \geq 0). \quad (5.26)$$

A következőkben az $F^s g$, $G^s g$ sorozatokat fogjuk tárgyalni az (5.22), (5.25) és (5.26) egyenletek alapján. Az 5h. §-ban meg fogjuk mutatni, hogy ezen sorozatok osztályozása \mathfrak{S} összes infinitezimális ábrázolásainak osztályozását jelenti.

5g. *A lehetséges ábrázolások osztályozása. I. A folytonos osztály.* Tegyük fel először, hogy az $F^s g$, $G^s g$ sorozat vektorai mind különböznek zérustól. Ekkor a $\lambda \pm s$ számok valamennyien sajátértékei H_0 -nak, és vagy egészek, vagy felesek. Azonfelül a ϱ_s, σ_s számok mindegyike pozitív. [Vö. (5.26).] Az (5.25a), (5.25b) egyenletekből következik, hogy egy el nem tűnő tényezőtől eltekintve, a sorozat minden vektora megkapható bármely rögzített $F^s g$ vagy $G^s g$ vektorból, ha arra F vagy G alkalmas hatványát alkalmazzuk; azaz: bármely $F^s g$, vagy bármely $G^s g$ elfoglalhatja g helyét.

1. Ha a $\lambda \pm s$ sorozat az *egész* számokból áll, a zérus érték fellép közöttük; célszerű az alapul vett g vektornak a zérus sajátértékhez tartozó sajátvektort választani, melyről feltesszük, hogy normált ($\|g\|=1$). Ekkor

$$H_0(F^s g) = s \cdot F^s g, \quad H_0(G^s g) = -s \cdot G^s g, \quad s \geq 0.$$

Azonfelül (5.26) szerint

$$\left. \begin{aligned} \|F^s g\| &= r_s, \quad r_s = \prod_{n=1}^s \varrho_n^{\frac{1}{2}}, \quad s \geq 1, \\ \|G^s g\| &= r'_s, \quad r'_s = \prod_{n=1}^s \sigma_n^{\frac{1}{2}}, \quad s \geq 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Az a követelmény, hogy a ϱ_s és σ_s számok mindegyike legyen *pozitív*, korlátozza q megengedett értékeit. Az (5.25) képletekből $\lambda=0$ behelyettesítésével a $q>0$ szükséges és elegendő feltételt kapjuk. Látható továbbá, hogy $\varrho_s = \sigma_s = q + s(s-1)$, és így $r_s = r'_s$.

Végül vezessük be a következő f_m vektorokat ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$f_0 = \eta_0 g, \quad f_m = (\eta_m/r_m) F^m g, \quad f_{-m} = (\eta_{-m}/r'_m) G^m g \quad (m \geq 1), \quad (5.28)$$

ahol az η tényezők tetszés szerint választható egységnyi abszolút-értékű komplex számok. Az f_m -ek *ortogonális egységvektor*-rendszert képeznek. Valóban, (5.27) folytán $\|f_m\|=1$, és minthogy $H_0 f_m = m f_m$ a rendszer bármely két különböző vektora ortogonális egymásra. Az (5.25) képletet ($\lambda=0$ mellett) felhasználva végül a következő egyenleteket kapjuk $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ esetére:

$$\left. \begin{aligned} H_0 f_m &= m f_m, \quad F f_m = \omega_{m+1} (q + m(m+1))^{\frac{1}{2}} f_{m+1}, \\ G f_m &= (1/\omega_m) (q + m(m-1))^{\frac{1}{2}} f_{m-1}, \quad \omega_m = \eta_{m-1}/\eta_m, \quad |\omega_m| = 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

2. Hasonló eljárás alkalmazható a *feles* esetre. A $\lambda \pm s$ sorozatban fel kell lépnie az $\frac{1}{2}$ értéknek; az ennek megfelelő sajátvektort fogjuk alapul választani mint g vektort ($\|g\|=1$), úgyhogy

$$H_0(F^s g) = (\tfrac{1}{2} + s) F^s g, \quad H_0(G^s g) = (\tfrac{1}{2} - s) G^s g;$$

(5.27) változatlanul érvényes. Az (5.25) egyenletekből ($\lambda=\frac{1}{2}$ és $s \geq 1$ mellett) kapjuk: $\varrho_s = (q - \frac{1}{4}) + s^2$, $\sigma_s = (q - \frac{1}{4}) + (s-1)^2$. Következésképpen az összes ϱ_s és σ_s akkor és csakis akkor lesz pozitív, ha $q > \frac{1}{4}$.

Analógiában (5.28)-cal, bevezetjük az f_m normált ortogonális vektorok rendszerét ($m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$) a következő definíciókkal:

$$f_{\frac{1}{2}} = \eta_{\frac{1}{2}} \cdot g, \quad f_{\frac{1}{2}+s} = (\eta_{\frac{1}{2}+s}/r_s) F^s g, \quad f_{\frac{1}{2}-s} = (\eta_{\frac{1}{2}-s}/r'_s) G^s g \quad (s \geq 1), \quad (5.31)$$

ahol az η_m -ek egységnyi abszolút-értékű komplex számok. Az (5.29) összefüggések változatlanok maradnak, az m -ek azonban más értékeket vesznek fel.

Az itt vizsgált osztály neve „*folytonos osztály*”, minthogy q lehetséges értékei az egész és a feles esetben egyaránt egy (végtelen) intervallumot töltenek ki.

II. A diszkrét osztály.

1. Tegyük fel, hogy valamely pozitív s -re $F^s g = 0$. Ez érvényes lesz s valamennyi következő értékére is. Ha $h+1$ ($h \geq 0$) az a *legkisebb* egész szám, amelyre ez bekövetkezik, akkor a $g, \dots, F^h g$ vektorok mind különböznek zérustól, és most is következik, hogy a rendszer minden vektorát megkaphatjuk $F^h g$ -ből oly módon, hogy G -nek valamely hatványát alkalmazzuk rá, és így az alapul vett g -nek választhatjuk $F^h g$ -t. Ekkor $H_0 g = \lambda g$, $Fg = 0$, és $\varrho_1 = 0$. Következésképpen $q = -\lambda(\lambda+1)$ [vö. (5.25a)]. A rendszer minden vektora $G^s g$ alakú, és $\sigma_s = s(s-1-2\lambda)$ [vö. (5.25b)]. Minthogy $\sigma_1 \geq 0$, következik, hogy $\lambda \leq 0$.

Ha $\lambda = 0$, fennáll: $\sigma_1 = 0$, és így $Gg = 0$. Ekkor a rendszer az egyetlen g vektorra redukálódik és a triviális $H_0 g = H_1 g = H_2 g = 0$ esettel van dolgunk. Látható, hogy $\exp(-itH_r)g = g$ minden r -re, s minthogy (4.12) folytán minden csoportelem három ilyen exponenciális kifejezés szorzata, $U(b)g = g$ minden $b \in \mathfrak{S}$ csoportelemre. A g vektor generálta sokaság invariáns az $U(b)$ operátorokkal szemben, így tehát az az egész \mathfrak{H} ábrázolási tér.

Ha $\lambda < 0$, legyen $\lambda = -k$; k egész vagy feles szám. Ekkor $\sigma_s = s(s-1) + 2ks$ pozitív minden $s \geq 1$ mellett, s így minden $G^s g$ zérustól különböz. Az f_m rendszert az $m = -k, -(k+1), \dots$ értékek mellett a következő egyenletek definiálják:

$$f_{-k} = \eta_{-k} \cdot g, \quad f_{-(k+s)} = (\eta_{-(k+s)} / r_s') G_s g \quad (s \geq 1). \quad (5.31)$$

Az (5.29) egyenletek most is érvényesek, csak egy kiegészítést kell tenni: Ha $m = -k$, az Ff_{-k} -ra vonatkozó egyenletben fellép az $f_{-(k-1)}$ vektor, amely nincs definiálva. A megfelelő együttható azonban eltűnik, s az egyenletet így kell értelmezni: $Ff_{-k} = 0$.

Feljegyezzük még a következő összefüggéseket:

$$q = k(1-k), \quad q + m(m+1) = (m+k)(m-k+1). \quad (5.32)$$

2. Az az eset, amikor valamelyik $G^s g$ ($s \geq 1$) vektor eltűnik, pontosan ugyanígy tárgyalható. Figyelman kívül hagyva a triviális egydimenziós esetet, az eredményt a következő alakban mondhatjuk ki: Legyen g a *legkisebb* k sajátértékhez tartozó sajátvektor ($k > 0$). Ekkor $Gg = 0$, és az f_m ($m = k, k+1, \dots$) vektorokat a következő egyenletekkel definiáljuk:

$$f_k = \eta_k g, \quad f_{k+s} = (\eta_{k+s} / r_s) F^s g \quad (s \geq 1). \quad (5.33)$$

Ismét $q = k(1-k)$, és az (5.29), (5.32) egyenletek most is érvényesek.

A „diszkrét osztály” elnevezés arra utal, hogy q csak a $k(1-k)$, $k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ értékeket veheti fel. Megjegyezzük, hogy a $k = \frac{1}{2}$ ($q = \frac{1}{4}$) és $k = 1$ eseteket kivéve mindezek az értékek *negatívak*.

5h. Tárgyalás. 1. Az f_m vektorok minden esetben kifeszítik a \mathfrak{H} Hilbert-teret. Az (5.29) egyenleteknél következik, hogy a H_0, H_1, H_2 operátorok az f_m -ek bármely véges lineáris kombinációjára alkalmazhatók, és hogy azok ismét az f_m -ek véges lineáris kombinációit eredményezik. Az ezen véges lineáris kombinációk által definiált sokaság ennél fogva *invariáns* a H_r operátorokra vonatkozóan. Ebből kiindulva meg lehet mutatni, hogy e sokaság *lezárása* invariáns valamennyi $U(b)$ -vel szemben, s így az szükségképpen a teljes ábrázolási tér. Ebből következik, hogy a fent tárgyalt sorozatok osztályozása egyet jelent az összes lehetséges irreducibilis infinitezimális ábrázolás osztályozásával.

2. A H_r operátorok jellemzése. Minthogy

$$H_1 = \frac{1}{2}(F+G) \quad \text{és} \quad H_2 = (i/2)(G-F),$$

a (5.29) egyenletből a következő alakba írható egyenletrendszer kapjuk:

$$H_r f_m = \sum_n h_{mn}^{(r)} f_n \quad (r = 0, 1, 2); \quad (5.34)$$

itt $h_{nm}^{(r)} = \overline{h_{mn}^{(r)}}$ és $h_{nm}^{(r)} = 0$, ha $|m-n| > 1$. (Szükségtelen, hogy itt megadjuk $h_{mn}^{(r)}$ explicit kifejezéseit.) Minden esetben meghatároztuk m lehetséges értékeit. A fenti egyenletek meghatározzák a H_r operátorok hatását az f_m vektorok minden véges lineáris kombinációjára. Kíváncsi, hogy a H_r operátorokat ezen egyenletek segítségével explicitebb módon jellemezzük. Ez a következő segédétel segítségével tehető meg, amelyet bizonyítás nélkül közlünk.

3. segédétel. Legyen K_r három operátor ($r=0, 1, 2$) a \mathfrak{H} téren, amelyeket a következőképpen definiálunk. A K_r operátorok értelmezési tartománya legyen a \mathfrak{H} teret kifeszítő f_m vektorok valamennyi véges lineáris kombinációja; ezen a K_r -eket a $K_r f_m = \sum_n h_{mn}^{(r)} f_n$ egyenletekkel definiáljuk. A K_r operátor \overline{K}_r lezárása önadjungált operátor, amelynek \mathfrak{D}_r értelmezési tartománya mindazon g vektorokból áll, amelyekre $\sum_m |\sum_n h_{mn}^{(r)}(f_n, g)|^2$ véges, és \mathfrak{D}_r -en $\overline{K}_r g = \sum_m \{ \sum_n h_{mn}^{(r)}(f_n, g) \} f_m$.

Látjuk, hogy a H_r operátoroknak meg kell egyeznie a 3. segédételben szereplő \overline{K}_r operátorokkal, s levonhatjuk a következtetést, hogy az (5.6) alatti 1. feltevés teljesül. Az ott említett sorozat elemeinek választhatjuk az f_m alapvektorok véges lineáris kombinációit, amelyek bizonyosan benne vannak \mathfrak{B} -ben. (Megemlítendő, hogy a 3. segédétel érvényes akkor is, ha a K_r -eket azok tetszőleges valószínű kombinációival helyettesíthetjük.)

Ami az \mathfrak{A} és \mathfrak{B} sokaságokat illeti, (5.34) alapján meg lehet mutatni a következőket.

4. segédétel. Az \mathfrak{A} sokaság mindazon g vektorokból áll, amelyekre $\sum_m m^2 |(f_m, g)|^2$ véges; a \mathfrak{B} sokaság mindazokból a vektorokból áll, amelyekre $\sum_m m^4 |(f_m, g)|^2$ véges. Más szavakkal, \mathfrak{A} a H_0 operátor értelmezési tartománya, \mathfrak{B} a H_0^2 operátor értelmezési tartománya.

Végül említsük meg a következő eredményt. A H_r operátorokat definiáljuk a 3. segédétel K_r operátorainak lezárásaként; \mathfrak{B} -n fennállnak a

$$[H_0 H_1] = iH_2, \quad [H_1 H_2] = iH_0, \quad [H_2 H_0] = iH_1 \quad (5.35)$$

összefüggések, és $(H_1^2 + H_2^2 - H_0^2)g = q \cdot g$, ahol q -t az (5.34) egyenletek együtthatói definiálják.

3. Még nem mutattuk meg, hogy minden infinitezimális ábrázolásnak, melyet fent találtunk, megfelel magának az \mathfrak{S} csoportnak egy-egy unitér operátorok által létesített ábrázolása. Ezt a következő §§-ban az ábrázolások tényleges megszerkesztése útján mutatjuk meg. Megállapíthatjuk azonban a következőket.

Valamely unitér ábrázolás a H_r operátorok által egyértelműen meg van határozva. Valóban, (4.12) folytán \mathfrak{S} minden eleme kifejezhető az

$$a = \exp(2\mu\chi_0) \cdot \exp(2\zeta\chi_2) \cdot \exp(2\nu\chi_0)$$

alakban, és így a megfelelő U operátort

$$U = \exp(-2i\mu H_0) \cdot \exp(-2i\zeta H_2) \cdot \exp(-2i\nu H_0)$$

adja meg.

Valamely unitér ábrázolás, amelyhez tartozó H_r operátorokat az (5.34) képlet határozza meg, irreducibilis. Ennek bebizonyításához meg kell mutatnunk, hogy minden korlátos A operátor, amely mindegyik $U(a)$ -val kommutál, szükségképpen az $A = \alpha \cdot 1$ alakú. Alkalmazzuk az $U(a)A = AU(a)$ egyenletet \mathfrak{A} valamely g vektorára, és legyen $U(a) = \exp(itH_r) = U_t$. Ekkor $U_t A g = A U_t g$ és $t^{-1}(U_t - 1)A g = A\{t^{-1}(U_t - 1)\}g$. Ha t -vel zérushoz tartunk, \mathfrak{A} bármely g elemére kapjuk: $H_r A g = A H_r g$. Legyen $g = f_m$, $H_r = H_0$. Innen jól ismert megfontolással következik, hogy $A f_m = \alpha_m f_m$. A H_r operátor esetében ennél fogva az $(\alpha_m - \alpha_n)h_{mn}^{(r)} = 0$ egyenletek adódnak, m és n minden értékére. Az (5.29) alatt megadott explicit kifejezések segítségével azt találjuk, hogy az α_m -ek mind egyenlők egymással, azaz $A = \alpha \cdot 1$ q.e.d.

5i. Összefoglalás. Az ábrázolások, amelyeket találtunk, q értékével, valamint m lehetséges értékeivel, azaz H_0 spektrumával jellemezhetők. (Nyilvánvaló, hogy két olyan ábrázolás, amelyeknek mindkét jellemzője különbözik, nem lehet ekvivalens.) A különböző ábrázolások jellemzésére a következő szimbólumokat vezetjük be.

I. Folytonos osztály

(1) Egész eset $C_q^0 \{q > 0, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

(2) Feles eset $C_q^{\frac{1}{2}} \{q > \frac{1}{4}, m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots\}$

II. Diszkrét osztály

(1) Maximális $m D_k^- \{q = k(1-k), m = -k, -(k+1), \dots\} \quad k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

(2) Minimális $m D_k^+ \{q = k(1-k), m = k, k+1, \dots\} \quad k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

(Az egydimenziós esetet mellőztük.) A H_r operátorokat mindegyik esetben az (5.29) egyenletek definiálják.

Megjegyzés. A 3e. §-ban rámutattunk: \mathfrak{S} valamely ábrázolása akkor és csak akkor egyértékű ábrázolása \mathfrak{Q} -nek, ha $U(-e) = 1$. Minthogy (4.11) és (4.12) értelmében $(-e) = \exp(2\pi\chi_0)$, fennáll: $U(-e) = \exp(-2\pi i H_0)$, s így (5.29) folytán $U(-e)f_m = e^{-2\pi i m} f_m$. Következésképpen az egész esetben $U(-e) = 1$, a feles esetben $U(-e) = -1$.

6. §. A folytonos osztály ábrázolásai, $C_q^0 (q \geq \frac{1}{4})$

Könnyen szerkeszthetünk \mathfrak{Q} (és így \mathfrak{S}) számára irreducibilis ábrázolásokat mindaddig, amíg nem vezetjük be az irreducibilitás követelményét. A három változó: x^0, x^1, x^2 euklideszi térben válasszuk pl. a $g_{kl}x^k x^l = d$ ($= \text{const.}$) egyenlettel definiált \mathfrak{M} sokaságot, és vizsgáljuk azokat az $y = ax$ transzformációkat, amelyeket \mathfrak{M} -en

az x változók Lorentz-transzformációi indukálnak. (Attól függően, hogy mi d értéke, \mathfrak{M} egyköpenyű ($d > 0$) vagy kétköpenyű ($d < 0$) hiperboloid, vagy pedig kúp ($d = 0$), a speciális relativitáselmélet fénykúpja.) Könnyen definiálhatunk az \mathfrak{M} sokaságon olyan térfogatelemet, amely invariáns a $T^0(a)f = f(a^{-1}x)$ standard transzformációkkal szemben. A $T^0(a)$ operátorok ennél fogva az \mathfrak{M} sokaságon értelmezett négyzetesen integrálható függvények Hilbert-terének unitér operátorai; azok \mathfrak{Q} ábrázolását képezik, minthogy $T^0(a)T^0(b) = T^0(ab)$.

Egyszerű elemzés mutatja, hogy ezek az ábrázolások *reducibilisek*. Azt találjuk, hogy a $T^0(a)$ operátorok különösen egyszerűek, ha \mathfrak{M} a fénykúp. A következőkben megmutatjuk, hogy a további redukció (a C_q^0 folytonos osztályba tartozó) irreducibilis ábrázolásokat eredményez.

6a. *Transzformációk a fénykúpon.* Elegendő, ha a fénykúp *felső felére* korlátozódunk ($x^0 > 0$); ez a fizikai értelmezésben a jövőnek felel meg. Az \mathfrak{M} sokaságot a

$$g_{kl}x^k x^l = 0, \quad x^0 > 0 \quad (6.1)$$

egyenletekkel definiáljuk. Az \mathfrak{M} sokaságon a paraméterek két fajtáját vezetjük be; a ξ^1, ξ^2 derékszögű koordinátákat:

$$x^1 = \xi^1, \quad x^2 = \xi^2, \quad x^0 = r = ((\xi^1)^2 + (\xi^2)^2)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < r < \infty, \quad (6.2)$$

és az r, φ polárkoordinátákat:

$$x^1 + ix^2 = re^{i\varphi}, \quad x^0 = r; \quad 0 < r < \infty. \quad (6.3)$$

A φ szög mod 2π van meghatározva. Feltesszük, hogy minden előforduló függvény periodikus φ -ben.

Az \mathfrak{M} -en létesített standard ábrázolás A_λ^0 infinitezimális operátorait (2.8a)-ból kapjuk meg. Visszaemlékezve, hogy $A_0^0 = A_{12}^0$, $A_1^0 = A_{02}^0$, $A_2^0 = A_{10}^0$, a következő kifejezéseket kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} A_0^0 &= -\xi^1 \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi^1} = -\frac{\partial}{\partial \varphi}, & A_1^0 &= r \frac{\partial}{\partial \xi^2} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin \varphi r \frac{\partial}{\partial r}, \\ A_2^0 &= -r \frac{\partial}{\partial \xi^1} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \varphi r \frac{\partial}{\partial r}, \\ A_1^0 + iA_2^0 &= r \left(\frac{\partial}{\partial \xi^2} - i \frac{\partial}{\partial \xi^1} \right) = e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - ir \frac{\partial}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

A Q -nak megfelelő operátorra a következő egyszerű kifejezést nyerjük:

$$Q^0 = (A_0^0)^2 - (A_1^0)^2 - (A_2^0)^2 = -D(D+1) \quad (D = r\partial/\partial r) \quad (6.5)$$

Vizsgáljuk meg most adott q konstans mellett a

$$Q^0 f = q \cdot f \quad (6.6a)$$

differenciálegyenletet, ahol f az r, φ változók folytonos második deriváltakkal rendelkező függvénye. Ennek megoldásai:

$$f = r^{-(\frac{1}{2} + \sigma)} g(\varphi) \quad \sigma = \pm(\frac{1}{4} - q)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.6b)$$

ahol $g(\varphi)$ tetszőleges függvény. Megjegyezzük, hogy σ képzetes, ha $q > \frac{1}{4}$, és valós, ha $q < \frac{1}{4}$. E két eset megkülönböztetése a következő tárgyalás folyamán fontosnak fog bizonyulni.

6b. *Transzformációk az egységgörön.* Az 5. §-ban láttuk, hogy \mathfrak{S} minden egyes irreducibilis ábrázolása esetében a Q operátor egy konstans q értéket vesz fel. A (6.6) egyenletek ennél fogva azt sugallják, hogy a (6.6b) alakú függvényekre szorítkozunk, ahol σ konstans. Valóban, többféleképpen is belátható, hogy az \mathfrak{M} -en ható $T^0(a)$ transzformációk hatása alatt minden (6.6b) alakú f függvény ugyanolyan alakú, σ ugyanazon értékéhez tartozó függvénybe megy át.

Vezessük be, $x^0 > 0$ mellett, az $\eta^k = x^k/x^0$ változókat. Tetszőleges Lorentz-transzformáció η^1 és η^2 projektív transzformációját eredményezi. Az \mathfrak{M} fénykúpon $\eta^1 + i\eta^2 = e^{i\varphi}$, ez tehát az egységgörön önmagába való projektív transzformációja. (Tekintettel a fizikai értelmezésre, azt is mondhatjuk, hogy az a *fénysugarak* transzformációja.) Ha az \mathfrak{S} csoport valamely a eleme (r, φ) -t $(r', \varphi') = (ar, a\varphi)$ -be viszi át, (3.18) és (3.19) értelmében fennáll:

$$\left. \begin{aligned} r' &= ar = r|w(a, \varphi)|^2, & e^{i\varphi'} &= e^{i\varphi} \overline{w(a, \varphi)}/w(a, \varphi) \quad (\varphi' = a\varphi), \\ & & w(a, \varphi) &= \alpha + \beta e^{i\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Megjegyezzük továbbá, hogy rögzített a mellett

$$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = \frac{1}{|w(a, \varphi)|^2}. \quad (6.8)$$

Az 1h. §-ban mondottakból közvetlenül következik, hogy

$$\mu(a, \varphi) = |w(a, \varphi)|^2 \quad (6.9)$$

a $\varphi' = a\varphi$ transzformációk csoportjának *multiplikátora*. A kúp az \mathfrak{M} sokaság, s az egységgörön \mathfrak{M}^* -nak felel meg.

Az \mathfrak{M} -en létesített standard ábrázolás segítségével most egy *multiplikátor-ábrázolást* definiálunk az \mathfrak{M}^* egységgörön [vö. (1.57)]:

$$T^0(a)(r^{-(\frac{1}{2}+\sigma)}f(\varphi)) = r^{-(\frac{1}{2}+\sigma)}T_\sigma(a)f(\varphi). \quad (6.10)$$

A multiplikátort $\{\mu(a, \varphi)\}^h$, $h = \sigma + \frac{1}{2}$ adja meg.

Megjegyzendő, hogy $\mu(a, \varphi)$ bármely valós vagy komplex hatványa kétértelműségtől mentesen definiálható. Valóban, írhatjuk: $\mu(a, \varphi) = |\alpha|^2(1 + \gamma e^{i\varphi})(1 + \bar{\gamma} e^{-i\varphi})$, $\mu^h = \exp(h \log \mu)$; μ logaritmus a -nak és φ -nek egyenesen analitikus függvénye, minthogy $|\alpha|^2$ pozitív, és $\gamma = \beta/\alpha$ abszolút értéke kisebb, mint 1. Ennél fogva (6.10) σ tetszőleges valós vagy komplex értékére fennáll.

A $T_\sigma(a)$ multiplikátor-ábrázolások így is felírhatók:

$$T_\sigma(a)f(\varphi) = \mu(a, \varphi)^{\frac{1}{2}+\sigma}f(a^{-1}\varphi). \quad (6.11)$$

A megfelelő infinitezimális transzformációkat

$$A_x^0(r^{-(\frac{1}{2}+\sigma)}f(\varphi)) = r^{-(\frac{1}{2}+\sigma)}A_x f(\varphi)$$

definiálja [vö. (1.58)]. Így tehát (6.4) alapján kapjuk:

$$A_0 = -\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad A_1 + iA_2 = e^{i\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} + i\left(\frac{1}{2} + \sigma\right) \right\},$$

$$A_1 = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left(\frac{1}{2} + \sigma\right) \sin \varphi, \quad A_2 = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left(\frac{1}{2} + \sigma\right) \cos \varphi. \quad (6.12)$$

Következésképpen az infinitezimális multiplikátort

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_1 = -\left(\frac{1}{2} + \sigma\right) \sin \varphi, \quad \tau_2 = \left(\frac{1}{2} + \sigma\right) \cos \varphi; \quad \tau_1 + i\tau_2 = i\left(\frac{1}{2} + \sigma\right) e^{i\varphi} \quad (6.13)$$

adja meg.

Végül vezessük be a

$$Q = (A_0)^2 - (A_1)^2 - (A_2)^2$$

operátort; (1.58a) és (6.6) alapján kapjuk:

$$Qf(\varphi) = r^{\frac{1}{2} + \sigma} Q^0(r^{-(\frac{1}{2} + \sigma)} f(\varphi)) = q \cdot f(\varphi), \quad q = \frac{1}{4} - \sigma^2. \quad (6.14)$$

6c. *A $T_\sigma(a)$ transzformációk vizsgálata.* Legyen \mathfrak{H} az egységkörön értelmezett összes négyzetesen integrálható $f(\varphi)$ függvény Hilbert-tere, és definiáljuk a belső szorzatot a \mathfrak{H} térben az

$$(f, g) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(\varphi)} g(\varphi) d\varphi \quad (6.15)$$

képlettel. A (6.11) képletből következik, hogy σ és τ bármely választása mellett

$$(T_\sigma(a)f, \tau_\tau(a)g) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(\varphi')} g(\varphi') [\mu(a, \varphi')]^{\bar{\sigma} + \tau + 1} \frac{d\varphi'}{d\varphi} d\varphi' \quad (\varphi' = a^{-1}\varphi),$$

és minthogy (6.8) folytán $d\varphi/d\varphi' = [\mu(a, \varphi')]^{-1}$,

$$(T_\sigma(a)f, T_\tau(a)g) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(\varphi')} g(\varphi') [\mu(a, \varphi')]^{\bar{\sigma} + \tau} d\varphi'. \quad (6.16)$$

A (6.16) képletből a következő következtetéseket vonhatjuk le:

1. Ha $\sigma = is$ (s tetszőleges valós szám), a $T_\sigma(a)$ operátorok unitérek. Valóban, $(T_\sigma(a))^{-1}$ létezik, és $(T_\sigma(a)f, T_\sigma(a)g) = (f, g)$.

2. A $T_\sigma(a)$ operátorok minden esetben korlátosak. (Írjuk: $\sigma = \tau, f = g$.) Könnyen meg lehet mutatni, hogy $T_\sigma(a)$ korlátja $e^{((\sigma + \bar{\sigma})\zeta) - 1}$ -kel egyenlő, ahol ζ a 4. §-ban bevezetett paraméter.

3. A $T_\sigma(a)$ operátor adjungáltját $T_\sigma^*(a) = T_{-\bar{\sigma}}(a^{-1})$ adja meg.

Mátrixelemek. Válasszuk \mathfrak{H} -ban alapszámrendszernek az

$$f_m = e^{im\varphi} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (6.17)$$

teljes ortonormált függvényrendszert. Ebben a koordinátarendszerben a $T_\sigma(a)$ operátor mátrixelemei

$$u_{mn}(a) = (f_m, T_\sigma(a)f_n). \quad (6.18)$$

Nyilvánvaló, hogy az $u_{mn}(a)$ mátrixelemek *analitikus függvények* a csoportsokaságon. (A σ kitevőben ugyancsak analitikusak.) Nyilvánvaló, hogy $u_{mn}(e) = \delta_{mn}$.

6d. A C_q^0 ($q \cong \frac{1}{4}$) *osztály ábrázolásai*. Most megmutatjuk, hogy a $T_\sigma(a)$ ($\sigma = is$) unitér ábrázolás a C_q^0 osztály ábrázolása, ahol $q = \frac{1}{4} - \sigma^2 = \frac{1}{4} + s^2$. Az 5h. §-ban mondottak szerint a következőket kell bizonyítanunk:

1. A $T_\sigma(a)$ operátorok teljesítik az (5.2) alatti (3) folytonossági feltételt.
2. Az infinitezimális operátorok kielégítik az (5.29) egyenleteket, ahol $q = \frac{1}{4} - \sigma^2$.

Ad 1. Legyen g rögzített vektora \mathfrak{H} -nak, legyen továbbá tetszőleges egész N mel-

$$\text{lett } g_N = \sum_{m=-N}^N (f_m, g) f_m, \quad h_N = g - g_N.$$

Az $U(a) = T_\sigma(a)$ jelölés használata mellett írhatjuk:

$$\|(U(a) - 1)g\| \leq \|(U(a) - 1)g_N\| + \|(U(a) - 1)h_N\| \leq \|(U(a) - 1)g_N\| + 2\|h_N\|, \quad (6.19)$$

s minthogy $U(a)$ unitér operátor:

$$\begin{aligned} \|(U(a) - 1)g_N\|^2 &= ((U(a) - 1)g_N, (U(a) - 1)g_N) + (g_N, (U(a) - 1)g_N) = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ 2 \sum_{m, n=-N}^N (g, f_m) (u_{mn}(a) - \delta_{mn}) (f_n, g) \right\}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Adott pozitív ε számhoz válasszunk először egy N számot, amelyre fennáll, $2\|h_N\| < \varepsilon$, másodsor válasszuk ki e -nek egy olyan környezetét az \mathfrak{S} csoportsokaságon, hogy bármely, ezen környezetbe eső a elemre a (6.20) alatt álló véges összeg kisebb legyen, mint ε^2 (a mátrixelemek ugyanis folytonosak a -ban és $u_{mn}(e) = \delta_{mn}$). A (6.19) egyenlőtlenség folyományaképpen ezekre az a elemekre $\|(U(a) - 1)g\| < 2\varepsilon$, q.e.d.

Ad 2. Amint az $U(a) = T_\sigma(a)$ operátorok folytonosságát bizonyítottuk, a H_x infinitezimális operátorok létezése következik Stone tételéből. Legyen $U_t = \exp(-itH_x) = T_\sigma(\exp t\chi)$, és legyen $g(\varphi)$ *analitikus* függvénye φ -nek. Ekkor minden φ -re $t^{-1}(U_t - 1)g(\varphi)$ konvergál $\Lambda_x g(\varphi)$ -hez, ha $t \rightarrow 0$ [vö. (1.30)]. Minthogy a konvergencia *egyenletes* az egységkörön, ez normában való konvergenciát, azaz: a \mathfrak{H} Hilbert-térben való konvergenciát jelent. Következésképpen minden g analitikus függvényre (speciálisan $f_m = e^{im\varphi}$ -re) fennáll:

$$H_x g = i\Lambda_x g. \quad (6.21)$$

Képezzük a $\Lambda_r f_m$ ($r=0, 1, 2$) kifejezéseket a (6.12) definíciók alapján; kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} i\Lambda_0 f_m &= m f_m, \quad i(\Lambda_1 + i\Lambda_2) f_m = -(m + \tfrac{1}{2} + \sigma) f_{m+1}, \\ i(\Lambda_1 - i\Lambda_2) f_m &= -(m - \tfrac{1}{2} - \sigma) f_{m-1}; \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_1 f_m &= \frac{i}{2} (m + \tfrac{1}{2} + \sigma) f_{m+1} + \frac{i}{2} (m - \tfrac{1}{2} - \sigma) f_{m-1}, \\ \Lambda_2 f_m &= \tfrac{1}{2} (m + \tfrac{1}{2} + \sigma) f_{m+1} - \tfrac{1}{2} (m - \tfrac{1}{2} - \sigma) f_{m-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.22a)$$

A (6.22) egyenletek megegyeznek (5.29)-cel, hacsak az $\eta_m(\sigma)$ állandókat a következőképpen választjuk ($q = \frac{1}{4} - \sigma^2 = \frac{1}{4} + s^2$):

$$\left. \begin{aligned} \eta_0(\sigma) &= 1, \\ \eta_m(\sigma) &= (-1)^m \prod_{h=1}^m \frac{h - \frac{1}{2} - \sigma}{((h - \frac{1}{2})^2 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}} = (-1)^m \prod_{h=1}^m \left(\frac{h - \frac{1}{2} - \sigma}{h - \frac{1}{2} + \sigma} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \eta_{-m}(\sigma) &= (-1)^m \eta_m(\sigma) \quad (m \geq 1), \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

úgyhogy m minden értékére

$$\omega_m(\sigma) = \frac{\eta_{m-1}(\sigma)}{\eta_m(\sigma)} = -\frac{m - \frac{1}{2} - \sigma}{((m - \frac{1}{2})^2 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}} = -\left(\frac{m - \frac{1}{2} + \sigma}{m - \frac{1}{2} - \sigma}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.24)$$

Ha σ képzetes, valamennyi $\eta_m(\sigma)$ -nak 1 az abszolút értéke.

Az eddigiekben azt mutattuk meg, hogy analitikus függvényekre H_x megegyezik iA_x -vel. Az 5h. §-ban mondottakból (vö. speciálisan a 3. segédtételel) látható, hogy H_x a lezárása iA_x -nek. Analitikus függvényekre a $H_{(x+x')} = H_x + H_{x'}$ feltétel ugyancsak fennáll, minthogy a A_x operátorokra teljesül, és kiterjeszthető az 5. §-ban definiált \mathfrak{A} lineáris sokaságra. Ugyanez igaz az (5.35) felcserélési szabályokra, amelyek (1.48)-ból is levezethetők. Ez azt mutatja, hogy a $T_\sigma(a)$ ábrázolás teljesíti az 5. §-ban kimondott valamennyi feltételt. Eredményünket a következőképpen rögzíthetjük.

1. tétel. A $T_\sigma(a)$ ($\sigma = is$) multiplikátor-ábrázolás \mathfrak{S} -nek irreducibilis unitér ábrázolása a (6.15)-tel definiált \mathfrak{H} Hilbert-téren. Ez az ábrázolás a C_q^0 osztályba tartozik, ahol $q = \frac{1}{4} + s^2$.

A többi C_q^0 osztálybeli ábrázolásokat, amelyekre nézve q a $0 < q < \frac{1}{4}$ „kivételes intervallumba” esik, a 8. §-ban tárgyaljuk.

6e. Egy új koordinátarendszer a \mathfrak{H} térben. Nyilvánvaló, hogy a

$$g_m = (1/\eta_m(\sigma))f_m \quad (6.25)$$

függvények teljes ortonormált vektorrendszert alkotnak \mathfrak{H} -ban, ha $\sigma = is$. A (6.23) definíciók mellett nyomban következik, hogy

$$\left. \begin{aligned} iA_0 g_m &= m g_m, & i(A_1 + iA_2) g_m &= (q + m(m+1))^{\frac{1}{2}} g_{m+1}, \\ i(A_1 - iA_2) g_m &= (q + m(m-1))^{\frac{1}{2}} g_{m-1}; \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 g_m &= \frac{i}{2} (q + m(m+1))^{\frac{1}{2}} g_{m+1} + \frac{i}{2} (q + m(m-1))^{\frac{1}{2}} g_{m-1}, \\ A_2 g_m &= \frac{1}{2} (q + m(m+1))^{\frac{1}{2}} g_{m+1} - \frac{1}{2} (q + m(m-1))^{\frac{1}{2}} g_{m-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

A $T_\sigma(a)$ operátornak a g_m rendszerre vonatkoztatott mátrixelemeit a következőképpen jelöljük:

$$v_{mn}(a) = (g_m, T_\sigma(a) g_n). \quad (6.28)$$

A (6.18) képlet alapján írható:

$$v_{mn}(a) = (\eta_m(\sigma)/\eta_n(\sigma)) u_{mn}(a). \quad (6.29)$$

Míg az f_m vektorok függetlenek σ -tól, a g_m vektorok explicite függenek a $T_\sigma(a)$ ábrázolástól.

Megjegyzés. A későbbiekben (8d. §) való felhasználás céljából megjegyezzük a következőket. Ha σ valós, és $\sigma^2 < \frac{1}{4}$, a g_m -eket ugyancsak definiálhatjuk (6.25) segítségével. Ezek nem lesznek normáltak \mathfrak{H} -ban, a (6.26) és (6.27) egyenletek azonban továbbra is érvényben maradnak.

7. §. A $C_q^{\frac{1}{2}}$ folytonos osztály ábrázolásai

7a. A $T'_\sigma(a)$ ábrázolások. Az 5i. § végén megmutattuk, hogy a feles esetben $U(-e) = -1$; itt $(-e)$ az $\alpha = -1$, $\beta = 0$ paraméterekhez tartozó csoportelem. Ha a $C_q^{\frac{1}{2}}$ osztályba tartozó

$$T'_\sigma(a)f(\varphi) = \mu'_\sigma(a, a^{-1}\varphi)f(a^{-1}\varphi) \quad (7.1)$$

multiplikátor-ábrázolást kívánunk kapni (az egységkörön), teljesülnie kell a

$$\mu'_\sigma(-e, \varphi) = 1 \quad (7.2)$$

feltételnek, minthogy $a^{-1}\varphi = \varphi$ esetén $a = -e$. Legyen

$$\mu'_\sigma(a, \varphi) = \mu(a, \varphi)^{\frac{1}{2} + \sigma} v(a, \varphi), \quad (7.3)$$

ahol $\mu(a, \varphi)$ -t (6.8) definiálja, $v(a, \varphi)$ -t pedig

$$v(a, \varphi) = w(a, \varphi)/|w(a, \varphi)|, \quad w(a, \varphi) = \alpha + \beta e^{i\varphi} \quad (7.4)$$

adja meg [vö. (6.7)]. A (7.1) egyenlet felírható a

$$T'_\sigma(a)f(\varphi) = v(a, a^{-1}\varphi) \cdot T_\sigma(a)f(\varphi) \quad (7.5)$$

alakban; az itt fellépő $T_\sigma(a)$ operátort az előző szakaszban definiáltuk.

Annak igazolására, hogy v multiplikátor, elegendő megmutatnunk, hogy w multiplikátor (minthogy $v(a, \varphi) = w(a, \varphi) \cdot \mu(a, \varphi)^{-\frac{1}{2}}$, ez pedig következik abból, hogy $w(a, \varphi)$ megegyezik az $\alpha + \beta z$ multiplikátorral [vö. (4.25)], ha $z = e^{i\varphi}$. (Nyilvánvaló, hogy a 4c. §-ban mondottak érvényesek a $|z|=1$ pontokra.) Azonfelül $\mu(-e, \varphi) = 1$, és $v(-e, \varphi) = -1$, úgyhogy (7.2) teljesül. Következésképpen (7.5) egy multiplikátor-ábrázolást definiál, és $T'_\sigma(-e) = -1$. Megjegyezzük, hogy $v(a, \varphi)$ analitikusan függ a -tól és φ -től.

A (6.7) egyenletek közül a második szerint $v(a, \varphi)$ négyzete egyenlő $e^{-i\varphi'}/e^{-i\varphi}$ -vel ($\varphi' = a\varphi$). Ha φ -t valamely φ_0 elég kicsiny környezetére korlátozzuk, és a -t \mathfrak{S} -en szintén az egységelem egy elég kicsiny környezetére korlátozzuk, akkor írható:

$$v(a, \varphi) = \varrho(a\varphi)/\varrho(\varphi). \quad (7.6)$$

Így tehát $v(a, \varphi)$ lokálisan egy (1.43) alakú multiplikátor.

Most a (7.6) összefüggést felhasználva leszámaztatjuk a $T'_\sigma(a)$ ábrázolás Λ'_x infinitezimális operátorát. A (7.3), (7.5) és (7.6) összefüggések értelmében lokálisan

$$T'_\sigma(a)f(\varphi) = \varrho(\varphi)T_\sigma(a)(f(\varphi)/\varrho(\varphi))$$

és így

$$\chi T'_\sigma(a)f = \Lambda'_x(T'_\sigma(a)f) = \varrho \cdot \chi(T_\sigma(a)(f/\varrho)) = \varrho \Lambda_x(T_\sigma(a)(f/\varrho)),$$

ahol $T_\sigma(a)$ -t és Λ_x -t (6.11) és (6.12) definiálja. Speciálisan, ha $a = e$,

$$\Lambda_x f(\varphi) = \varrho(\varphi) \Lambda_x(f(\varphi)/\varrho(\varphi)), \quad \varrho(\varphi) = e^{-i\varphi/2}. \quad (7.7)$$

A $Q' = (\Lambda'_0)^2 - (\Lambda'_1)^2 - (\Lambda'_2)^2$ operátorra vonatkozóan (7.7) és (6.14) alapján kapjuk:

$$Q'f(\varphi) = \varrho(\varphi) Q(f(\varphi)/\varrho(\varphi)) = q \cdot f(\varphi), \quad q = \frac{1}{4} - \sigma^2. \quad (7.8)$$

7b. $A C_q^{\frac{1}{2}}$ osztály ábrázolásai. Ha $\sigma = is$, $T'_\sigma(a)$ unitér operátor a \mathfrak{H} téren, mint-hogy ekkor $T_\sigma(a)$ unitér, és $v(a, \varphi)$ abszolút értéke 1. A \mathfrak{H} térben ugyanazt az ortonormált vektorrendszert használjuk, mint az előzőekben, célszerű lesz azonban az alapvektorokra más jelölést bevezetni:

$$f'_m = e^{i(m-\frac{1}{2})\varphi} \quad (m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots). \quad (7.9)$$

Ha (7.7) alapján kiszámítjuk a $A'_r f'_m$ kifejezéseket ($r=0, 1, 2$), újból a (6.22) és (6.22a) egyenleteket kapjuk, azzal az eltéréssel, hogy az m számok *felesek*; az $\eta_m(\sigma)$ egységnyi abszolút értékű számokat a következőképpen választjuk:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{\frac{1}{2}} &= 1, \\ \eta_{m+\frac{1}{2}} &= (-1)^m \prod_{h=1}^m \frac{h-\sigma}{(h^2-\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} = (-1)^m \prod_{h=1}^m \left(\frac{h-\sigma}{h+\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (m \geq 1), \\ \eta_{-\frac{1}{2}} &= \frac{-\sigma}{|\sigma|}, \quad \eta_{-(m+\frac{1}{2})} = (-1)^{m-1} \frac{\sigma}{|\sigma|} \cdot \eta_{m+\frac{1}{2}} \quad (m \geq 1). \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Az $\omega_m(\sigma)$ mennyiségek kifejezését most is (6.24) adja meg. Itt feltesszük, hogy $\sigma \neq 0$. Ha $\sigma=0$ unitér ábrázolást kapunk, ez azonban *reducibilis*, minthogy a pozitív m -hez tartozó f'_m vektorok kifeszítette sokaság és a rá ortogonális (komplementer) altér invariáns.

2. tétel. $A T'_\sigma(a)$ ($\sigma = is$, $s \neq 0$) multiplikátor-ábrázolás \mathfrak{S} -nek irreducibilis unitér ábrázolása a (6.15) segítségével definiált \mathfrak{H} Hilbert-téren. Ez az ábrázolás a $C_q^{\frac{1}{2}}$ osztályba tartozik, ahol $q = \frac{1}{4} + s^2$.

A bizonyítás szó szerint követi az 1. tételnek a 6d. §-ban megadott bizonyítását.

7c. Új koordinátarendszer a \mathfrak{H} térben. A (7.10) alatt definiált $\eta_m(\sigma)$ -k felhasználásával bevezethetjük a

$$g'_m = (1/\eta_m(\sigma)) f'_m \quad (7.11)$$

vektorokat, melyek teljes ortonormált rendszert képeznek, és eleget tesznek a (6.26) és (6.27) egyenleteknek.

A $T'_\sigma(a)$ operátornak az f'_m , valamint a g'_m rendszerre vonatkoztatott mátrix-elemeit a következőképpen jelöljük:

$$u_{mn}(a) = (f'_m, T'_\sigma(a) f'_n), \quad v_{mn}(a) = (g'_m, T'_\sigma(a) g'_n), \quad (7.12)$$

$$v_{mn}(a) = (\eta_m(\sigma)/\eta_n(\sigma)) u_{mn}(a). \quad (7.13)$$

7d. Megjegyzések a többértékű ábrázolásokról. Említsük meg itt, hogy hasonló eljárással kaphatjuk meg a \mathfrak{C} fedőcsoport azon irreducibilis unitér ábrázolásait, amelyek nem egyértékű ábrázolásai \mathfrak{S} -nek. Ezeket a (7.5) alakúaknak választjuk, ahol $\sigma = is$; a v multiplikátort a 4. §-ban bevezetett (γ, ω) paraméterek segítségével a következőképpen kell definiálnunk:

$$v(a, \varphi) = \left(\frac{w(a, \varphi)}{\bar{w}(a, \varphi)} \right)^h = e^{2ih\omega} \left(\frac{1 + \gamma e^{i\varphi}}{1 + \bar{\gamma} e^{-i\varphi}} \right)^h. \quad (7.14)$$

A h kitevő tetszőleges valós szám lehet; h és $h+1$ *ekvivalens* ábrázolásokra vezetnek. [A fent használt (7.4) multiplikátort $h=\frac{1}{2}$ mellett kapjuk.] Most is fennáll:

Legyen a és b a \mathfrak{C} csoportnak két olyan eleme, amelyek \mathfrak{S} ugyanazon elemének felelnek meg; paramétereik; (γ, ω) és $(\gamma, 2l\pi + \omega)$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Ekkor a vizsgált ábrázolás operátorai eleget tesznek az

$$U(b) = e^{i l h \pi} U(a) \quad (7.15)$$

összefüggésnek, amely jellemzi az ábrázolás multiplicitását. A H_0 operátor spektruma az $m = h \pm l$ számokból áll; $f'_m = e^{i(m-h)\varphi}$ -re a (6.22) egyenleteket kapjuk.

8. §. A C_q^0 folytonos osztály ábrázolásai A $0 < \frac{1}{4} < q$ kivételes intervallum

8a. Az $L(\varphi, \psi)$ mag meghatározása. Amint azt a 6. §-ban láttuk, a $T_\sigma(a)$ operátorok a \mathfrak{H} téren nem unitérek, ha a σ kitevő *valós* és zérustól különböző. Most megmutatjuk, hogy a belső szorzat más definíciója, vagyis a Hilbert-tér más definíciója segítségével unitérré tehetők, ha $0 < \sigma < \frac{1}{2}$. A belső szorzatot *pozitív definit integrálforma* segítségével definiáljuk:

$$(f, g)_\sigma = (2\pi)^{-2} \iint L_\sigma(\varphi, \psi) \overline{f(\varphi)} g(\psi) d\varphi d\psi, \quad -\pi \leq \varphi, \psi \leq \pi; \quad (8.1)$$

itt $L_\sigma(\varphi, \psi)$ alkalmasan választott mag, mely függ σ -tól. Meg kell követelnünk, hogy ez a belső szorzat invariáns legyen a $T_\sigma(a)$ transzformációkkal szemben:

$$(T_\sigma(a)f, T_\sigma(a)g)_\sigma = (f, g)_\sigma. \quad (8.2)$$

Ez elvezet az „*invariáns sűrűségek*” problémájához, amelyet az 1i. §-ban tárgyaltunk. Az 1i. §-beli \mathfrak{M} sokaság két egységkör szorzata; ennél fogva x a (φ, ψ) párnak felel meg, s az ott vizsgált multiplikátor a $\mu(a, \varphi)^{\sigma+\frac{1}{2}} \cdot \mu(a, \psi)^{\sigma+\frac{1}{2}}$ szorzattal helyettesítendő. Az M_r operátor ennél fogva két ilyen operátor összege; egyikük a φ , másikuk a ψ változóra hat. Következésképpen ha feltesszük, hogy $L_\sigma(\varphi, \psi)$ differenciálható, (1.61) és (6.12) alapján a következő differenciálegyenleteket kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} M_0 L_\sigma &= \frac{\partial L_\sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial L_\sigma}{\partial \psi} = 0, \\ (M_1 + iM_2) L_\sigma &= -\frac{\partial}{\partial \varphi} (e^{i\varphi} L_\sigma) - \frac{\partial}{\partial \psi} (e^{i\psi} L_\sigma) + i(\tfrac{1}{2} + \sigma)(e^{i\varphi} + e^{i\psi}) L_\sigma = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Az első egyenletből következik, hogy L_σ a $\varphi - \psi$ különbség függvénye, a másodikból pedig az, hogy a következő alakú:

$$L_\sigma(\varphi, \psi) = \mathcal{L}_\sigma(\varphi - \psi) = c \cdot (1 - \cos(\varphi - \psi))^{\sigma-\frac{1}{2}} = c \cdot [2d(\varphi, \psi)]^{\sigma-\frac{1}{2}}; \quad (8.4)$$

a c állandót később határozzuk meg. [Itt $d(\varphi, \psi)$ a φ, ψ pontok távolsága.]

Mielőtt az L_σ függvény tulajdonságait megtárgyalnánk, megemlítünk egy másik levezetést, mely könnyebben általánosítható az \mathfrak{Q}_4 csoport esetére, amelyet ezen dolgozat II. részében fogunk tárgyalni. Az (1.60) összefüggésből kapjuk a

$$[\mu(a, \varphi) \mu(a, \psi)]^{\sigma+\frac{1}{2}} \frac{d\varphi'}{d\varphi} \frac{d\psi'}{d\psi} L_\sigma(\varphi', \psi') = L_\sigma(\varphi, \psi) \quad (\varphi' = a\varphi, \psi' = a\psi)$$

feltételt. Behelyettesítve a deriváltak (6.8) kifejezését, a

$$[\mu(a, \varphi) \mu(a, \psi)]^{\sigma-1/2} L_\sigma(a\varphi, a\psi) = L_\sigma(\varphi, \psi) \quad (8.5)$$

eredményre jutunk.

Legyen x és y a fénykúp két pontja, melyeknek polárkoordinátái (r, φ) , ill. (R, ψ) . Az a transzformáció ezeket az (r', φ') és (R', ψ') koordinátájú pontokba viszi át, ahol (6.7) és (6.7) szerint $r' = \mu(a, \varphi)r$, $R' = \mu(a, \psi)R$. Minthogy ezek $g_{kl}x^kx^l = rR(1 - \cos(\varphi - \psi))$ skalárszorzata változatlan marad, ily módon a

$$\mu(a, \varphi) \mu(a, \psi) (1 - \cos(\varphi' - \psi')) = 1 - \cos(\varphi - \psi) \quad (\varphi' = a\varphi, \psi' = a\psi) \quad (8.6)$$

egyenletre jutunk, mely mutatja, hogy a (8.4) kifejezés megoldása (8.5)-nek. Elég, ha (8.5)-nek egy megoldását ismerjük. Valóban, ha $\varrho(\varphi, \psi)$ két megoldásnak a viszonya, akkor $\varrho(a\varphi, a\psi) = \varrho(\varphi, \psi)$, s a $\varphi - \psi = 0$ alacsonyabb dimenziószámú tartományon kívül bármely (φ, ψ) pár (alkalmasan választott a -val) bármely más párba transzformálható. Eszerint ϱ konstans minden olyan pár esetében, amelyekre $\varphi \neq \psi$ teljesül.

Az L_σ mag pozitív definit jellegével alább foglalkozunk. [Vö. (8.14).]

8b. $L_\sigma(\varphi, \psi)$ tulajdonságai. A (8.4) függvény véges, amíg $\sigma \geq \frac{1}{2}$. Ha $\sigma < \frac{1}{2}$, úgy $\varphi = \psi$ esetén végtelen; φ -re és ψ -re képezett integrálja azonban $\sigma > 0$ esetén véges marad. A (8.1) kifejezés ennélfogva korlátos f, g függvényekre bizonyosan definiálva van. Azonfelül a konstanst (8.4)-ben oly módon választhatjuk, hogy $(f, g)_\sigma = 1$ teljesüljön, ha $f(\varphi) = g(\varphi) = 1$, ami az

$$\mathcal{L}_\sigma(\varphi) = 2^{1-\sigma} \pi (B(\sigma, \frac{1}{2}))^{-1} (1 - \cos \varphi)^{\sigma-1/2}, \quad \sigma > 0 \quad (8.7)$$

definícióra vezet. [Itt $B(x, y)$ a $\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ Euler-függvény.]

Most megmutatjuk, hogy a (8.1) integrál tetszőleges négyzetesen integrálható f és g függvényre definiálva van. Az (f, g) szimbólummal (a σ alsó index nélkül) a \mathfrak{H} Hilbert-térben (6.15) alatt bevezetett belső szorzatot jelöljük; ennek megfelelően $\|f\|$ az $(f, f)^{1/2}$ norma jele.

A (8.1) és (8.7) egyenletek alapján kapjuk:

$$\begin{aligned} |(f, g)_\sigma| &\leq (2\pi)^{-2} \iint \mathcal{L}_\sigma(\varphi - \psi) |f(\varphi)| \cdot |g(\psi)| d\varphi d\psi \leq \\ &\leq (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{L}_\sigma(\zeta) \left\{ (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\xi + \psi)| \cdot |g(\psi)| d\psi \right\} d\zeta, \end{aligned}$$

ahol bevezettük a $\zeta = \varphi - \psi$ változót. A Schwartz-féle egyenlőtlenség szerint a belső integrál legfeljebb akkora, mint $\|f\| \cdot \|g\|$, és minthogy \mathcal{L}_σ integrálját egyre normáltuk, az

$$|(f, g)_\sigma| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad (8.8)$$

eredményt kapjuk. Speciálisan a (8.8) egyenlőtlenségből az ismert gondolatmenettel következik, hogy $(f, g)_\sigma$ folytonos az f, g Hilbert-vektorok mindegyikében, azaz ha

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0, \quad \|g_n - g\| \rightarrow 0,$$

akkor $(f_n, g_n)_\sigma \rightarrow (f, g)_\sigma$.

Legyen $f_m = e^{im\varphi}$ minden egész m -re.

Ekkor

$$(f_m, f_n)_\sigma = 0, \text{ ha } m \neq n, \quad (f_m, f_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{L}_\sigma(\varphi) e^{-im\varphi} d\varphi = \lambda_m(\sigma). \quad (8.9)$$

A Fourier-együtthatók kiszámításával kapcsolatban megjegyezzük, hogy $\lambda_m = \lambda_{-m}$, és hogy a (8.9) integrálban az exponenciális függvény helyettesíthető $\cos m\varphi$ -vel. Kifejezve $\cos m\varphi$ -t ($m \geq 0$) a $T_m(\cos \varphi)$ Csebisev-polinomokkal:

$$T_m(z) = (-1)^m \prod_{l=1}^m (2l-1)^{-1} (1-z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d^m}{dz^m} [(1-z^2)^{m-\frac{1}{2}}],$$

parciális integrálással kapjuk:

$$\lambda_0(\sigma) = 1, \quad \lambda_m(\sigma) = \prod_{l=1}^m \left(\frac{l - \frac{1}{2} - \sigma}{l - \frac{1}{2} + \sigma} \right) < 1 \quad (m \geq 1), \quad (8.10)$$

$$\lambda_{-m}(\sigma) = \lambda_m(\sigma);$$

Γ -függvények segítségével írhatjuk minden m -re:

$$\lambda_m(\sigma) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \sigma)} \cdot \frac{\Gamma(|m| + \frac{1}{2} - \sigma)}{\Gamma(|m| + \frac{1}{2} + \sigma)}. \quad (8.11)$$

A (8.10) és (8.11) képletekből levonhatjuk a következőt:

1. Ha $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, valamennyi $\lambda_m(\sigma)$ pozitív. Ha $\sigma \geq \frac{1}{2}$, legalább egy koefficiens negatív vagy zérussal egyenlő.

2. Ha $|m|$ nagy, a Stirling-képlet felhasználásával kapjuk a

$$\lambda_m(\sigma) \sim (\Gamma(\frac{1}{2} + \sigma)/\Gamma(\frac{1}{2} - \sigma)) |m|^{-2\sigma} \quad (8.12)$$

aszimptotikus kifejezést.

Legyen $g = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (f_m, g) f_m$ és $h = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (f_m, h) f_m$ a \mathfrak{H} Hilbert-tér két eleme.

A $(g, h)_\sigma$ skaláris szorzat folytonosságából, (8.9)-ből és (8.10)-ből következik, hogy

$$(g, h)_\sigma = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_m(\sigma) (g, f_m) (f_m, h),$$

$$(g, g)_\sigma = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_m(\sigma) |(f_m, g)|^2 \equiv (g, g). \quad (8.13)$$

Ha $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ és $g \in \mathfrak{H}$, akkor $(g, g)_\sigma > 0$, ha $g \neq 0$. (8.14)

(8.14) abból a tényből következik, hogy valamennyi $\lambda_m(\sigma) > 0$. (Ez az a tulajdonság, amely σ nagyobb értékeit kizárja.)

8c. A \mathfrak{H}_σ Hilbert-tér. A következőkben feltesszük, hogy $0 < \sigma < \frac{1}{2}$.

3. definíció. A \mathfrak{H}_σ^0 lineáris sokaság \mathfrak{H} összes vektorából áll. A \mathfrak{H}_σ^0 sokaság f, g vektorainak belső szorzatát (8.1) definiálja, s az f vektor normájának a definíciója $\|f\|_\sigma = (f, f)_\sigma^{\frac{1}{2}}$. A \mathfrak{H}_σ^0 sokaság lezárását, amely Hilbert-tér, \mathfrak{H}_σ jelöli.

Megmutattuk [vö. (8.14)], hogy $(f, g)_\sigma$ minden tulajdonsággal rendelkezik, amit egy belső szorzattól megkövetelünk. A \mathfrak{H}_σ^0 lineáris sokaság nem zárt az $\|f - g\|_\sigma$ metrikára nézve. Minthogy a $\lambda_m(\sigma)$ -k zérushoz tartanak [vö. (8.12)], \mathfrak{H}_σ^0 -ban vannak olyan h_m sorozatok, melyekre fennáll $\|h_m - h_n\|_\sigma \rightarrow 0$, ha $m, n \rightarrow \infty$, amelyeknek azonban nincs limeszük \mathfrak{H}_σ^0 -ban. A \mathfrak{H}_σ lezárást a szokott módon kapjuk, ezeket a sorozatokat is odaszámítva (mint „ideális” elemeket). A következő megfontolások nagyobbik része keresztülvihető \mathfrak{H}_σ^0 -ra, minthogy \mathfrak{H}_σ^0 sűrű \mathfrak{H}_σ -ban.

Ortonormált bázis \mathfrak{H}_σ -ban. A (8.9) képlet szerint az f_m vektorok — bár ortogonálisak — nem normáltak. Összehasonlítva (8.10)-et (6.23)-mal látjuk, hogy $\lambda_m(\sigma) = (\eta_m(\sigma))^2$ minden m -re. Így tehát a

$$g_m = (1/\eta_m(\sigma)) f_m, \quad (\eta_m(\sigma))^2 = \lambda_m(\sigma) \quad (8.15)$$

definícióval ortonormált vektorrendszert kapunk. Tetszőleges $h \in \mathfrak{H}_\sigma^0$ mellett (8.13) alapján kapjuk: $(g_m, h)_\sigma = \eta_m(\sigma)(f_m, h)$, s így bármely $h', h'' \in \mathfrak{H}_\sigma^0$ vektorokra

$$(h', h'')_\sigma = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (h', g_m)_\sigma (g_m, h'')_\sigma. \quad (8.16)$$

Ez az egyenlet kiterjeszthető \mathfrak{H}_σ bármely két vektorára, és azt mutatja, hogy a g_m ortonormált rendszer teljes.

8d. A C_q^0 osztály ábrázolásai ($q = \frac{1}{4} - \sigma^2$). A \mathfrak{H}_σ^0 sokaságon a $T_\sigma(a)$ transzformáció unitér, minthogy az $(f, g)_\sigma$ belső szorzatot változatlanul hagyja és van inverze. A folytonosság révén kiterjeszthető a \mathfrak{H}_σ Hilbert-téren ható $T_\sigma(a)$ unitér transzformációvá. Hasonlóképpen a $T_\sigma(a)T_\sigma(b) = T_\sigma(ab)$ transzformációs tulajdonság is \mathfrak{H}_σ^0 -ról kiterjeszthető annak \mathfrak{H}_σ lezárására.

A 6d. §-ban megadott bizonyítás ismét alkalmazható annak megmutatására, hogy a $T_\sigma(a)$ multiplikátor-ábrázolás C_q^0 osztálybeli ábrázolás, mivel az analitikus függvények, amelyekkel dolgozunk van, benne vannak \mathfrak{H}_σ^0 -ban, úgyhogy a belső szorzat (8.1) explicit definícióját használhatjuk. Csupán azt kell emlékeztetbe idéznünk, hogy $Qf = (\frac{1}{4} - \sigma^2)f$ [vö. (6.14)], és hogy a $A_r g_m$ kifejezéseket (6.26) adja meg, amint azt a 8d. § végén megjegyeztük. A

$$v_{mn}(a) = (g_m, T_\sigma(a)g_n)_\sigma \quad (8.17)$$

mátrixelemek analitikus függvények \mathfrak{S} -en.

3. tétel. A $T_\sigma(a)$ multiplikátor-ábrázolás ($0 < \sigma < \frac{1}{2}$) irreducibilis unitér ábrázolása \mathfrak{S} -nek a \mathfrak{H}_σ Hilbert-téren. Az a C_q^0 osztályba tartozik, ahol $q = \frac{1}{4} - \sigma^2$.

9. §. A D_k^+ , D_k^- diszkrét osztályok ábrázolása¹⁶

9a. A T_l multiplikátor-ábrázolás. A következőkben vizsgált \mathfrak{M} sokaság a komplex sík nyílt egységköre ($z\bar{z} < 1$), azaz a 4e. §-beli \mathfrak{M}^* sokaság. Az \mathfrak{M} sokaságon az \mathfrak{S} csoportot az egységkörnek önmagára való konform leképezései realizálják:

$$z' = az = \frac{\bar{\alpha}z + \bar{\beta}}{\beta z + \alpha} \quad (\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1) \quad (a \in \mathfrak{S}, z \in \mathfrak{M}) \quad (9.1)$$

[vö. (4.23)]; (1) multiplikátorát

$$\mu(a, z) = \alpha + \beta z \quad (9.2)$$

adja meg [vö. (4.25)]. Megjegyezzük, hogy

$$\frac{dz'}{dz} = \mu(a, z)^{-2} 1 - z' \bar{z}' = |\mu(a, z)|^{-2} (1 - z\bar{z}) \quad (z' = az). \quad (9.3)$$

Az itt bevezetett $f(z)$ függvények z -nek analitikus függvényei lesznek, melyek \mathfrak{M} -en regulárisak. Legyen l egy egész exponens; ehhez definiáljuk a

$$T_l(a)f(z) = \mu(a, a^{-1}z)^l \cdot f(a^{-1}z) \quad (9.4)$$

multiplikátor-ábrázolást.

Az ω_l invariáns sűrűség. Most meghatározunk egy folytonos pozitív valós $\omega_l(z)$ függvényt (mely nem analitikus z -ben), oly módon, hogy az

$$(f, g)_l = \int_{\mathfrak{M}} \omega_l(z) f(\bar{z}) g(z) dS \quad (9.5)$$

belső szorzat a $T_l(a)$ transzformációkkal szemben invariáns maradjon. Itt $dS = dx dy$, ahol x és y a z változó valós, ill. képzetes része. A (9.4) képlet alapján kapjuk az

$$\omega_l(az) \cdot |\mu(a, z)|^{2l} \cdot J_a(z) = \omega_l(z)$$

feltételt, ahol $J_a(z)$ a (9.1) transzformáció Jacobi-determinánsa, azaz $J_a(z) = |dz'/dz|^2 = |\mu(a, z)|^{-4}$ [(9.3) szerint]. Írhatjuk tehát:

$$\omega_l(az) |\mu(a, z)|^{2l-4} = \omega_l(z). \quad (9.6)$$

A (9.3) egyenletek közül a második azt mutatja, hogy

$$\omega_l(z) = \text{const} (1 - z\bar{z})^{l-2} \quad (9.7)$$

megoldása (9.6)-nak. Minthogy a (9.1) transzformáció-csoport tranzitív \mathfrak{M} -en, következik, hogy más megoldás nincs (vö. a 8a. § végén tett megjegyzésekkel).

9b. A ξ_l Hilbert-tér. A most következőkben a (9.5) kifejezést tetszőleges pozitív $l > 1$ mellett vizsgáljuk. (Ha $l \leq 1$, $\omega_l(z)$ -nek túl magas fokú szingularitása

¹⁶ Az ezen szakaszban leírt szerkesztés szoros kapcsolatban van az expanzor-ábrázolás Diractól megadott megszerkesztésével, [Dirac 2]. Vö. még e dolgozat II. részének függelékével.

van a $|z|=1$ egységkörön.) A (9.7) képletben a konstans oly módon választható, hogy $f(z) \equiv 1$, $g(z) \equiv 1$ mellett $(f, g)_l \equiv 1$. Ekkor

$$\omega_l(z) = ((l-1)/\pi)(1 - z\bar{z})^{l-2}, \quad (9.8)$$

és az (f, g) skaláris szorzat definíciója

$$(f, g)_l = \frac{l-1}{\pi} \int_{\mathfrak{M}} (1 - z\bar{z})^{l-2} \overline{f(z)} g(z) dS \quad (l > 1). \quad (9.9)$$

Ez a definíció kiterjeszthető az $l=1$ esetre

$$(f, g)_1 = \lim_{l \rightarrow 1} \left\{ \frac{l-1}{\pi} \int_{\mathfrak{M}} (1 - z\bar{z})^{l-2} \overline{f(z)} g(z) dS \right\}. \quad (9.10)$$

A z változó hatványainak fent definiált skaláris szorzatát könnyen kiszámíthatjuk polárkoordináták bevezetésével. Legyen $f = z^m$, $g = z^n$; ekkor $l \geq 1$ mellett

$$(z^m, z^n)_l = 0, \text{ ha } m \neq n; \quad (z^m, z^m)_l = \binom{l-1+m}{m}^{-1} \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (9.11)$$

Ha $f(z)$ hatványsora $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$, akkor

$$(f, f)_l = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l-1+m}{m}^{-1} |c_m|^2. \quad (9.12)$$

Ez az egyenlet a következőképpen értelmezendő: Vagy mind a két oldalnak ugyanaz a véges szám az értéke, vagy mindkét oldal végtelen. A (9.12) egyenletet könnyen megkapjuk (9.11)-ből oly módon, hogy először az $(f, f)_l$ integrált egy $|z| \leq \varrho < 1$ körre képezzük, azután átérünk a $\varrho \rightarrow 1$ limeszre. Azonfelül minden hatványsornak, amelynek c_m együtthatói mellett (9.12) jobboldala konvergál, legalább 1 a konvergenciasugara, így az az \mathfrak{M} sokaságon reguláris analitikus függvényt definiál. Nyilvánvaló, hogy (9.9), (9.10) egy Hilbert-teret határoznak meg.

4. definíció. A \mathfrak{H}_l ($l \geq 1$) Hilbert-tér azon — a nyílt egységkörön reguláris — analitikus függvényekből áll, amelyre $(f, f)_l$ [melyet (9.9) és (9.10) definiál] véges. A belső szorzatot (9.9) [vagy (9.10)] definiálja; \mathfrak{H}_l valamely elemének normáját $\|f\|_l = (f, f)_l^{\frac{1}{2}}$ adja meg.

Legyen $f = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ és $g = \sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m$ a \mathfrak{H}_l tér két eleme; ekkor

$$(f, g)_l = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l-1+m}{m}^{-1} \bar{c}_m d_m. \quad (9.13)$$

A

$$h_m(z) = \binom{l-1+m}{m}^{\frac{1}{2}} z^m, \quad m = 0, 1, \dots \quad (9.14)$$

függvények teljes ortonormált rendszert képeznek \mathfrak{H}_l -ben, és

$$(f, g)_l = \sum_{m=0}^{\infty} (f, h_m)_l (h_m, g)_l$$

\mathfrak{H} -nek bármely két f, g elemére.

Egy egyenlőtlenség. Legyen $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ a \mathfrak{H}_l térnek egy eleme. Ekkor a Schwarz-egyenlőtlenség folytán

$$|f(z)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |c_m| |z|^m \leq \left(\sum_{m=0}^{\infty} \binom{l-1+m}{m}^{-1} |c_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \binom{l-1+m}{m} |z|^{2m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Következésképpen

$$f(z) \leq (1 - \bar{z}z)^{-(l/2)} \|f\|_l \quad (9.15)$$

bármely $z \in \mathfrak{M}$ pontra. Ezt az egyenletet két függvény különbségére alkalmazva látjuk, hogy a konvergencia \mathfrak{H}_l -ben az \mathfrak{M} halmazon értelmezett függvények *pontonkénti* konvergenciáját jelenti.

9c. *A D_k^+ osztály ábrázolásai.* Korlátozzuk most l -et a pozitív egész értékekre; ekkor a $T_l(a)$ transzformációk megfelelően vannak definiálva. Az 1a. §-ban mondtakból következik, hogy ezen transzformációk *unitérek*.

Infinitézimális operátorok. A 4e. § eredményeiből következik, hogy

$$A_x f(z) = -\lambda_x(z) \frac{df(z)}{dz} + l\tau_x(z)f(z),$$

ahol λ_x -t és τ_x -t (4.24), ill. (4.26) definiálja. Speciálisan

$$iA_0 = z \frac{d}{dz} + \frac{1}{2}l, \quad i(A_1 + iA_2) = -z^2 \frac{d}{dz} - lz, \quad i(A_1 - iA_2) = -\frac{d}{dz}. \quad (9.16)$$

Kapjuk:

$$Qf(z) = ((A_0)^2 - (A_1)^2 - (A_2)^2)f(z) = q \cdot f(z), \quad q = \frac{l}{2} \left(1 - \frac{l}{2} \right). \quad (9.17)$$

A A_r operátorok bármely $f(z)$ analitikus függvényre alkalmazhatók, az eredményül kapott függvény azonban nem lesz szükségképpen eleme a \mathfrak{H}_l térnek, még ha f eleme is \mathfrak{H}_l -nek. A (9.9), (9.10) definíciókból nyilvánvaló, hogy $f \in \mathfrak{H}_l$, ha a konvergencia sugara *egynél nagyobb*. Ugyanez érvényes lesz minden $A_r f$ -re és minden $T_l(a)f$ -re. Ezek a függvények ennél fogva felhasználhatók annak bizonyításában, hogy $T_l(a)$ a D_k^+ osztályba tartozó ábrázolás ($k = \frac{1}{2}l$), azon analitikus függvények helyett, amelyeket a 6d. §-ban használtunk fel. Abból a célból, hogy megmutassuk: az (5.29) egyenletek érvényesek, vezessük be a

$$g_m = (-1)^{m-k} h_{m-k} \quad (m = k, k+1, \dots), \quad k = \frac{1}{2}l \quad (9.18)$$

függvényeket. A g_m -ek ortonormált bázist alkotnak \mathfrak{H}_l -ben és a A_r operátorok

alkalmazásával [vö. (9.16)] $m = k, k+1, \dots$ mellett (6.26) alakú egyenleteket kapunk; $q=k(1-k)$. Fennáll tehát a

4. tétel. $A T_l(a)$ multiplikátor-ábrázolás ($l=1, 2, \dots$) az \mathfrak{S} csoport irreducibilis unitér ábrázolása a \mathfrak{H}_l Hilbert-téren. Ez az ábrázolás a D_k^+ ($k=\frac{1}{2}l$) osztályba tartozik.

A

$$v_{mn}(a) = (g_m, T_l(a) g_n)_l \quad (9.19)$$

mátrixelemek analitikus függvények \mathfrak{S} -en.

9d. $A D_k^-$ osztály ábrázolásai. A D_k^- ábrázolásokat röviden elintézhethetjük. A \mathfrak{H}_l Hilbert-térnek ugyanaz a definíciója, a $z'=az$ transzformációt és a $\mu(a, z)$ multiplikátort azonban másképpen definiáljuk:

$$z' = az = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}, \quad \mu(a, z) = \bar{\alpha} + \beta z. \quad (9.20)$$

A (9.16) infinitezimális operátorokat az

$$iA_0 = -\left(z \frac{d}{dz} + \frac{1}{2}l\right), \quad i(A_1 + iA_2) = \frac{d}{dz}, \quad i(A_1 - iA_2) = z^2 \frac{d}{dz} + lz \quad (9.21)$$

operátorokkal helyettesítjük; legyen továbbá

$$g_m = h_{k-m} \quad (m = -k, -(k+1), \dots), \quad k = \frac{1}{2}l.$$

A (9.17) egyenletek változatlanok maradnak.

5. tétel. $A T_l(a)$ ($l=1, 2, \dots$) multiplikátor-ábrázolás, melyet (9.20) definiál, \mathfrak{S} irreducibilis unitér ábrázolása a \mathfrak{H}_l Hilbert-téren. Ez az ábrázolás a D_k^- ($k=\frac{1}{2}l$) osztályba tartozik.

Megjegyzés. A nem-egész l értékek ($l>1$) a \mathfrak{C} fedőcsoport olyan ábrázolásaihoz vezetnek, amelyek \mathfrak{S} -nek többértékű ábrázolásai. A multiplikátort a (γ, ω) paraméterek segítségével kell definiálnunk, amint arra a 7d. §-ban rámutattunk; q megfelelő értéke $k(1-k)$, ahol $k=\frac{1}{2}l$. A H_0 operátor spektruma a $k, k+1, \dots$ vagy a $-k, -(k+1), \dots$ számokból áll, attól függően, hogy (9.1)-et vagy (9.20)-at használjuk.

10. §. A mátrixelemek explicit kifejezése

Most levezetjük az előző szakaszokban megszerkesztett ábrázolások $v_{mn}(a)$ mátrixelemeinek explicit kifejezését. Speciálisan foglalkozni fogunk a q invariánstól való függésükkel, és analitikus viselkedésükkel (a ζ paraméterek nagy értékeire) a csoportsokaságon.

Ezen szakasz eredményeit fel fogjuk használni a 12. §-ban ortogonalitási összefüggések levezetésére.

10a. *Differenciális relációk.* Az ábrázolásokat minden esetben valamely Hilbert-téren ható $T(a)$ operátorok megadásával definiáltuk, amelyekre fennáll

$$(f, g) = (T(a)f, T(a)g). \quad (10.1)$$

A (10.1) jelölés a 6—9. §§-ban bevezetett különböző belső szorzatok összefoglaló jelzésére szolgál, ezért a különféle indexek feltüntetését mellőztük.

A jelen tárgyalásban csak olyan f függvényeket veszünk tekintetbe, amelyek — a \mathfrak{H} , \mathfrak{H}_σ terek esetében — *analitikusak* (6., 7., 8. §§), ill. — a \mathfrak{H}_1 tér esetében — amelyeknek konvergencia-sugara *egynél nagyobb* (9. §). Ekkor $\Lambda_\chi f$ és $T(a)f$ ugyanolyan fajtájú függvények, s a belső szorzatban a csoportparaméterek szerint való differenciálást felcserélhetjük azon sokaságra való integrálással, amelyeken ezek a függvények definiálva vannak. Mindenkor fennáll:

$$Qf = ((\Lambda_0)^2 - (\Lambda_1)^2 - (\Lambda_2)^2)f = q \cdot f, \quad (10.2)$$

ahol a q szám jellemzi a szóban forgó ábrázolást. A mátrixelemeket

$$v_{me}(a) = (g_m, T(a)g_n) \quad (10.3)$$

adja meg. Minden egyes speciális esetben definiálunk egy g_m ortonormált függvényrendszert. Minthogy $\chi(T(a)f) = \Lambda_\chi(T(a)f)$, kapjuk:

$$\chi v_{mn}(a) = (g_m, \Lambda_\chi(T(a)g_n)). \quad (10.4)$$

A (10.4) összefüggést ismételten alkalmazva, (10.2) tekintetbe vételével az

$$\Omega v_{mn}(a) = (g_m, Q(T(a)g_n)) = q(g_m, T(a)g_n) = q \cdot v_{mn}(a) \quad (10.5)$$

eredményre jutunk. Itt Ω a 4. §-ban definiált $(\chi_0)^2 - (\chi_1)^2 - (\chi_2)^2$ operátor [vö. (4.19)]. Ez azt mutatja, hogy valamely adott ábrázolás minden mátrixeleme ugyanazon másodrendű parciális differenciálegyenletnek tesz eleget. (Mellesleg ez az egyenlet lesz a $v_{mn}(a)$ függvények meghatározásának fő eszköze.)¹⁷

A χ operátort (10.1)-re alkalmazva és $a=e \cdot t$ behelyettesítve kapjuk:

$$0 = (\Lambda_\chi f, g) + (f, \Lambda_\chi g).$$

Ezt felhasználva (10.4) átalakítására a

$$\begin{aligned} \chi v_{mn}(a) &= -(\Lambda_\chi g_m, T(a)g_n) = -\sum_r (\Lambda_\chi g_m, g_r)(g_r, T(a)g_n), \\ \chi v_{mn}(a) &= \sum_r \lambda_{mr} v_{rn}(a); \quad \lambda_{mr} = (g_m, \Lambda_\chi g_r) = -\bar{\lambda}_{rm} \end{aligned} \quad (10.6)$$

eredményre jutunk. Esetünkben a (10.6) végtelen egyenletrendszer minden egyenlete legfeljebb *három* tagot tartalmaz, minthogy $|m-r| > 1$ esetén $\lambda_{mr} = 0$ [vö. (6.22)].

Ha $a(t)$ az \mathfrak{G} csoport egyparaméteres alcsoportja, és ha a $v_{mn}(a(t)) = v_{mn}(t)$, jelölést alkalmazzuk, akkor $\chi v_{mn} = dv_{mn}/dt$ és így

$$\frac{dv_{mn}}{dt} = \sum_r \lambda_{mr} v_{rn}(t), \quad \lambda_{mr} = (g_m, \Lambda_\chi g_r). \quad (10.7)$$

[A (10.6), (10.7) egyenletek a *véges dimenziós* ábrázolásokra vonatkozó, az 1e. §-ban tárgyalt differenciálegyenletek megfelelői.] Minthogy $v_{mn}(0) = \delta_{mn}$, (10.7)-ből $v_{mn}(t)$

¹⁷ Ez megfelel Casimir módszerének a kompakt esetben. Vö. [Casimir].

hatványsorát szukcesszív deriválásokkal nyerjük. Felhasználva azt, hogy $|m-r| > 1$ esetén $\lambda_{mr} = 0$, kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} v_{nn}(t) &= 1 + \dots, \\ v_{n+h,n}(t) &= \left(\prod_{j=1}^h \lambda_{n+j,n+j-1} \right) \frac{t^h}{h!} + \dots \quad (h = 1, 2, \dots), \\ v_{n-h,n}(t) &= \left(\prod_{j=1}^h \lambda_{n-j,n-j+1} \right) \frac{t^h}{h!} + \dots \quad (h = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

10b. *A mátrixelemek alakja.* Minden egyes elem

$$a = \exp(2\mu\chi_0) \exp(2\zeta\chi_2) \exp(2\nu\chi_0)$$

felbontásának [vö. (4.12)] megfelel $v_{mn}(a)$ -nak a következőkben leírt felbontása. Minthogy $H_0 g_m = m g_m$ mindig fennáll, következik: $\exp(-2i\mu H_0) g_m = e^{-2im\mu} g_m$. Legyen most

$$V_{mn}(\zeta) = v_{mn}(\exp 2\zeta\chi_2); \quad (10.9)$$

kapjuk:

$$v_{mn}(a) = e^{-2im\mu} e^{-2in\nu} V_{mn}(\zeta). \quad (10.10)$$

A (10.8) egyenleteket alkalmazhatjuk $V_{mn}(\zeta)$ -ra, $\chi = \chi_2$ -t és $t = 2\zeta$ -t írva. A (6.27) egyenlet folytán $\lambda_{m,m-1} = -\lambda_{m-1,m} = \frac{1}{2}(q+m(m-1))^{\frac{1}{2}}$. Következésképp

$$\left. \begin{aligned} V_{nn}(\zeta) &= \Theta_{nn}(q) + \dots, \quad \Theta_{nn}(q) = 1; \\ V_{n+h,n}(\zeta) &= \Theta_{n+h,n}(q) \zeta^h + \dots, \quad \Theta_{n+h,n}(q) = \frac{1}{h!} \prod_{j=1}^h (q + (n+j)(n+j-1))^{\frac{1}{2}}, \\ V_{n-h,n}(\zeta) &= \Theta_{n-h,n}(q) \zeta^h + \dots, \quad \Theta_{n-h,n}(q) = (-1)^h \Theta_{n,n-h}(q). \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

Azonfelül a (10.7) egyenletből következik, hogy V hatványsora ζ -nak csak *páratlan*, ill. *páros* hatványait tartalmazza, attól függően, hogy h páros-e vagy páratlan (mivel csak a $\lambda_{m,m-1}$ és $\lambda_{m-1,m}$ mátrixelemek különböznek zérustól). Eszerint

$$V_{mn}(-\zeta) = (-1)^{m-n} V_{mn}(\zeta). \quad (10.12)$$

Megjegyzés. Minthogy a λ_{mn} mátrixelemek valóságosak, *valamennyi* $V_{mn}(\zeta)$ függvény *valós*.

10c. *A $V_{mn}(\zeta)$ függvényekről.* Elegendő, ha ζ -nak csupán a *pozitív* értékeit vesszük tekintetbe, és előnyösnek fog bizonyulni, ha Ξ -en bevezetjük az

$$y = (\operatorname{sh} \zeta)^2 = \beta \bar{\beta}, \quad 0 \leq y < \infty \quad (10.13)$$

új változót. Megjegyezzük, hogy

$$\frac{dy}{d\zeta} = \operatorname{sh} 2\zeta = 2\{y(1+y)\}^{\frac{1}{2}}$$

és hogy a térfogatelem Ξ -en a

$$da = (2\pi)^{-2} dy d\mu dv \quad (10.14)$$

alakba írható [vö. (4.20)]. Vezessük be a

$$V_{mn}(\zeta) = W_{mn}(y) \quad (10.15)$$

jelölést és alkalmazzuk az $\Omega v_{mn}(a) = qv_{mn}(a)$ differenciálegyenletet a (10.9) mátrix-elemre; (4.19) alapján kapjuk:

$$(\Omega_{mn} + q)W_{mn}(y) = 0;$$

$$\Omega_{mn} = \frac{d}{dy} \left(y(1+y) \frac{d}{dy} \right) - (y(1+y))^{-1} \left\{ \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 - mny \right\}. \quad (10.16)$$

Ez az egyenlet a $(-y)$ független változóban felírt *hipergeometrikus egyenletbe* transzformálható, ha bevezetjük az $Y_{mn}(y)$ függvényt a

$$W_{mn}(y) = y^{\frac{1}{2}|m-n|} (1+y)^{-\frac{1}{2}|m+n|} Y_{mn}(y) \quad (10.17)$$

definícióval. Valóban, a következő egyenletet kapjuk:

$$y(1+y) \frac{d^2 Y_{mn}}{dy^2} + ((c_1 + c_2 + 1)y + c_3) \frac{dY_{mn}}{dy} + c_1 c_2 Y_{mn} = 0, \quad (10.18)$$

$$\left. \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (1 + |m-n| - |m+n|) \pm \sigma,$$

$$c_3 = 1 + |m-n|, \quad \sigma = (\frac{1}{4} - q)^{\frac{1}{2}}. \quad (10.19)$$

Kicsiny ζ , ill. $y \sim \zeta^2$ mellett le kell tehát választanunk (10.17)-ben egy $\zeta^{|m-n|}$ tényezőt; (10.11)-gyel való összehasonlításból következik, hogy $Y_{mn}(y)$ hatványsor, mely a $\Theta_{mn} + \dots$ alakú. A (10.18) egyenletnek tehát azt a megoldását kell választanunk, amely az $y=0$ helyen reguláris. Kapjuk tehát:

$$Y_{mn}(y) = \Theta_{mn}(q) \cdot F(c_1, c_2, c_3, -y). \quad (10.20)$$

A jól ismert

$$F(a, b, c, z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-b, c-a, c, z)$$

azonosság felhasználásával egy másik kifejezést is kaphatunk:

$$Y_{mn}(y) = \Theta_{mn}(q) (1+y)^{|m+n|} F(c'_1, c'_2, c_3, -y) \quad (10.21)$$

$$\left. \begin{matrix} c'_1 \\ c'_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (1 + |m-n| + |m+n|) \pm \sigma. \quad (10.22)$$

10d. *Megjegyzések a hipergeometrikus függvényekről.* Minthogy a hipergeometrikus függvénynek nincs szingularitása a negatív valós tengelyen, a (10.20) és (10.21) függvényeket $y < 1$ esetén jól ismert hatványsoruk adja meg; y nagyobb értékeire analitikus folytatással kapjuk meg ezen függvényeket. Az $y > 1$ értékek mellett írható:¹⁸

$$\begin{aligned} F(a, b, c, -y) &= y^{-a} \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(b) \Gamma(c-a)} F(a, 1+a-c, 1+a-b, -1/y) + \\ &+ y^{-b} \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)} F(b, 1+b-c, 1+b-a, -1/y), \end{aligned} \quad (10.23)$$

ahol a jobboldalon álló függvények az $(1/y)$ változóban felírt hatványsorok segítségével fejezhetők ki. Ez az egyenlet akkor érvényes, ha $b-a$ egész szám (>0 , <0 vagy $=0$). Különösen alkalmas F -nek y nagy értékei mellett való vizsgálatára.

Hipergeometrikus *polinom* esetében, ha a negatív egész szám, mondjuk $a = -l$, a második tag eltűnik (10.23) alatt, minthogy $1/\Gamma(-l) = 0$. Fennáll:

$$F(-l, b, c, -y) = \frac{(b, l)}{(c, l)} y^l F(-l, 1-l-c, 1-l-b, -1/y). \quad (10.24)$$

Itt Appel (a, s) szimbólumát alkalmaztuk, amelyet nem negatív egész s -ek esetére a következő képlet definiál:

$$(a, s) \equiv \frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)} \equiv \begin{cases} 1 & (s=0) \\ a(a+1) \dots (a+s-1) & (s>0) \end{cases} \quad (10.25)$$

$$(-a, s) = (-1)^s (a+1-s, s).$$

A (10.24) képlet természetesen elemi összefüggés és fennállásáról könnyen meggyőződhetünk. Mindaddig fennáll, míg $(b, l) \neq 0$. Megjegyezzük még, hogy a hipergeometrikus polinomok kifejezhetők az¹⁹

$$F(-l, a, b, c, -y) = \frac{y^{1-c}(1+y)^{l+c-b}}{(c, l)} \frac{d^l}{dy^l} \{y^{c+l-1}(1+y)^{b-c}\} \quad (10.26)$$

alakban.

10e. *A folytonos osztály ábrázolásai.* Kombináljuk most (10.10)-et és (10.17)-et (10.20)-szal és (10.21)-gyel, hogy megkapjuk a $v_{mn}(a)$ mátrixelemeket az α, β paraméterek kifejezéseként (felhasználjuk az $\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1$ összefüggést). A következő eredményeket kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} v_{mn}(a) &= \Theta_{mn}(q) \alpha^{m+n} \beta^{m-n} \cdot \\ &\cdot F\left(\frac{1}{2} + m + \sigma, \frac{1}{2} + m - \sigma, 1 + m - n, -\beta\bar{\beta}\right) = \\ &= \Theta_{mn}(q) \bar{\alpha}^{-(m+n)} \beta^{m-n} \cdot \\ &\cdot F\left(\frac{1}{2} - n + \sigma, \frac{1}{2} - n - \sigma, 1 + m - n, -\beta\bar{\beta}\right); \end{aligned} \right\} (m \geq n) \quad (10.27a)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{mn}(a) &= \Theta_{mn}(q) \alpha^{m+n} \bar{\beta}^{n-m} \cdot \\ &\cdot F\left(\frac{1}{2} + n + \sigma, \frac{1}{2} + n - \sigma, 1 + n - m, -\beta\bar{\beta}\right) = \\ &= \Theta_{mn}(q) \bar{\alpha}^{-(m+n)} \bar{\beta}^{n-m} \cdot \\ &\cdot F\left(\frac{1}{2} - m + \sigma, \frac{1}{2} - m - \sigma, 1 + n - m, -\beta\bar{\beta}\right). \end{aligned} \right\} (m \leq n) \quad (10.27b)$$

¹⁸ [Whittaker-Watson, 289. old.]. Megjegyzendő, hogy az ott megadott képlet nem helyes. Az $a-b$, $a-c$, $b-a$, $b-c$ különbségeket, melyek a Γ -függvény argumentumaiként lépnek fel, rendre $b-a$ -val, $c-a$ -val, $a-b$ -vel, ill. $c-b$ -vel kell helyettesíteni.

¹⁹ [Courant-Hilbert, 77. old.]

Ezek a kifejezések *analitikusan* függenek a -tól és q -tól. Ami a q -tól való függést illeti, először is látjuk, hogy a hipergeometrikus függvények szimmetrikusak σ -ban és $-\sigma$ -ban, és így analitikusak $q = \frac{1}{4} - \sigma^2$ -ben. Ez a (10.18) differenciálegyenletből is következik, minthogy ennek együtthatói csak q -t tartalmazzák, σ -t magát nem. Azonfelül a $\Theta_{mn}(q)$ állandók analitikusak q -ban [vö. (10.11)], amíg — az egész esetben — a q a $(0, \infty)$ nyílt intervallumban [ez magában foglalja a $(0, \frac{1}{4})$ kivételes intervallumot], ill. — a feles esetben — az $(\frac{1}{4}, \infty)$ nyílt intervallumban változik, minthogy m az összes egész, ill. feles értéket veheti fel. Megjegyezzük, hogy (10.11) folytán valamennyi $\Theta_{mn}(q)$ zérustól különböző. Figyelemre méltó, hogy a $v_{mn}(a)$ mátrixel emek semmilyen különleges viselkedést nem mutatnak q -nak a $(0, \frac{1}{4})$ kivételes intervallumba eső értékei mellett. Később látni fogjuk azonban, hogy *aszimptotikus* viselkedésüket tekintve különböznek más ábrázolások mátrixelemeitől. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a fenti kijelentés a g_m bázisfüggvények egy speciális választása mellett érvényes.

10f. *A diszkrét osztály ábrázolásai.*

I. D_k^+ : Itt $q = k(1-k)$, $\sigma = k - \frac{1}{2}$ és $m = k, k+1, \dots$. Írhatjuk:

$$\left. \begin{aligned} v_{mn}(a) &= \Theta_{mn}(q) \bar{\alpha}^{-(m+n)} \beta^{m-n} \cdot \\ \cdot F(k-n, 1-n-k, 1+m-n, -\beta\bar{\beta}) &= \\ &= \Theta_{mn}(q) \bar{\alpha}^{(m+n)} \bar{\beta}^{n-m} \cdot \\ \cdot F(k-m, 1-m-k, 1+n-m, -\beta\bar{\beta}) \quad (m \leq n); \end{aligned} \right\} \quad (10.28a)$$

$$\Theta_{mn}(q) \frac{1}{(m-n)!} \left(\frac{\Gamma(m+1-k) \Gamma(m+k)}{\Gamma(n+1-k) \Gamma(n+k)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ha } m \geq n, \quad (10.28b)$$

$$\Theta_{nm}(q) = (-1)^{m-n} \Theta_{mn}(q).$$

II. D_k^- : $q = k(1-k)$, $\sigma = k - \frac{1}{2}$, $m = -k, -(k+1), \dots$

$$\left. \begin{aligned} v_{mn}(a) &= \Theta_{mn}(q) \alpha^{m+n} \beta^{m-n} \cdot \\ \cdot F(k+m, 1+m-k, 1+m-n, -\beta\bar{\beta}) &= \\ &= \Theta_{mn}(q) \alpha^{m+n} \bar{\beta}^{n-m} \cdot \\ \cdot F(k+n, 1+n-k, 1+n-m, -\beta\bar{\beta}) \quad (m \leq n), \end{aligned} \right\} \quad (10.29a)$$

$$\Theta_{mn}(q) = \frac{1}{(m-n)!} \left(\frac{\Gamma(1-k-n) \Gamma(k-n)}{\Gamma(1-k-m) \Gamma(k-m)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ha } m \geq n, \quad (10.29b)$$

$$\Theta_{nm}(q) = (-1)^{m-n} \Theta_{mn}(q).$$

Látható, hogy az F függvény mind (10.28a), mind pedig (10.29a) alatt hipergeometrikus *polinom*, melynek fokát az $|m|-k$, $|n|-k$ számok közül a kisebbik adja meg.

Jelöljük speciálisan D_k^+ és D_k^- mátrixelemeit $v_{mn}(a|k)$ -val, ill. $v_{mn}(a|-k)$ -val. Ekkor (10.28)-ból és (10.29)-ből következik, hogy

$$v_{mn}(a|k) = (-1)^{m-n} \overline{v_{-m, -n}(a|-k)}. \quad (10.29c)$$

10g. *Megjegyzések* \mathfrak{S} véges dimenziós ábrázolásairól. Bár ezen dolgozatban \mathfrak{S} végtelen dimenziós unitér ábrázolásaival foglalkozunk, az összehasonlítás kedvéért itt röviden áttekintjük \mathfrak{S} irreducibilis véges dimenziós ábrázolásait. Ezeket oly módon kapjuk meg, ahogy a forgáscsoport ábrázolásait. (Vö. [v. d. Waerden, 16. §].)

Hasson az \mathfrak{S} csoport a ξ, η komplex változókra a következőképpen:

$$\xi' = \alpha\xi + \beta\eta, \quad \eta' = \bar{\beta}\xi + \bar{\alpha}\eta, \quad \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1, \quad (10.30)$$

és képezzük j -nek bármely egész vagy feles értéke mellett a

$$z_m = \frac{\xi^{j+m} \eta^{j-m}}{((j+m)!(j-m)!)^{\frac{1}{2}}}, \quad m = -j, -j+1, \dots, j \quad (10.31)$$

monomokat. A (10.30) transzformációk a következő transzformációkat indukálják:

$$z'_m = \sum_n v_{mn}(a) z_n; \quad (10.32)$$

ezek a $\sum_m (-1)^{j-m} \bar{z}_m z_m$ indefinit alakot változtatlanul hagyják. Az ábrázolás irreducibilis, a Q operátor sajátértéke $q = -j(j+1)$. A $v_{mn}(a)$ mátrixelemek közvetlenül kiszámíthatók (10.30)-ból és (10.31)-ből, vagy a (10.5) differenciálegyenletből. Az eredmény

$$\left. \begin{aligned} v_{mn}(a) &= \Theta_{mn}(q) \alpha^{m+n} \beta^{m-n} F(m-j, 1+m+j, 1+m-n, -\beta\bar{\beta}) \\ &\quad (m+n \geq 0, m \geq n), \\ &= \Theta_{mn}(q) \alpha^{m+n} \bar{\beta}^{n-m} F(n-j, 1+n+j, 1+n-m, -\beta\bar{\beta}) \\ &\quad (m+n \geq 0, m \leq n), \\ &= \Theta_{mn}(q) \bar{\alpha}^{-(m+n)} \beta^{m-n} F(-n-j, 1-n+j, 1+m-n, -\beta\bar{\beta}) \\ &\quad (m+n \leq 0, m \geq n), \\ &= \Theta_{mn}(q) \bar{\alpha}^{-(m+n)} \bar{\beta}^{n-m} F(-m-j, 1+j-m, 1+n-m, -\beta\bar{\beta}) \\ &\quad (m+n \leq 0, m \leq n); \end{aligned} \right\} \quad (10.33)$$

$$\Theta_{mn}(q) = \frac{1}{(m-n)!} \left(\frac{(j+m)!(j-n)!}{(j+n)!(j-m)!} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ha } m \geq n, \quad (10.34)$$

$$\Theta_{nm}(q) = \Theta_{mn}(q).$$

Ezek valamennyien folytonos irreducibilis véges dimenziós ábrázolásai \mathfrak{S} -nek.

Megjegyzés. Ha (10.30)-ban és (10.33)-ban $\bar{\beta}$ -t $(-\bar{\beta})$ -sal helyettesítjük, a forgáscsoportnak, helyesebben a forgáscsoport \mathfrak{S}_R spinorcsoportjának megfelelő kifejezéseket kapjuk.

10h. *Függvényrelációk.* Az ábrázolási mátrixelemek között fennálló minden reláció összefüggést ad meg azon hipergeometrikus függvények között, amelyek segítségével e mátrixelemek kifejezhetők. Megemlítjük 1. a (10.6) egyenleteket, melyek szomszédos hipergeometrikus függvények között fennálló lineáris relációkkal ekvivalensek, és 2. a

$$v_{mn}(ab) = \sum_r v_{mr}(a) v_{rn}(b) \quad (10.35)$$

egyenleteket, amelyek az ábrázolási tulajdonság kifejezői. Ezek a hipergeometrikus függvényekre vonatkozó addíciós tételeknek felelnek meg. A forgáscsoport véges dimenziós egyértékű irreducibilis ábrázolásai esetében a (10.35) egyenlet $m=n=0$ mellett ekvivalens a gömbfüggvények jól ismert addíciós tételével.

11. §. A mátrixelemek aszimptotikus viselkedése

A $v_{mn}(a)$ mátrixelemek (1.10) felbontásának megfelelően $v_{mn}(a)$ aszimptotikus viselkedését ζ vagy y nagy értékei mellett a $V_{mn}(\zeta) = W_{mn}(y)$ függvény határozza meg. Azonfelül a (10.17) és (10.20) explicit kifejezésekből és a $\Theta_{nm}(q) = (-1)^{m-n} \Theta_{mn}(q)$ összefüggésből [vö. (10.11)] következik, hogy

$$W_{nm}(y) = (-1)^{m-n} W_{mn}(y). \quad (11.1)$$

Ennélfogva szorítkozhatunk az $m \geq n$ esetre.

11a. *A diszkrét osztály ábrázolásai.* Alkalmazzuk a (10.24) egyenletet a (10.28a) kifejezés átalakítására. A D_k^+ ábrázolás esetében kapjuk:

$$W_{mn}(y) = \frac{(-1)^{n-k}}{\Gamma(2k)} \left(\frac{\Gamma(m+k) \Gamma(n+k)}{\Gamma(m+1-k) \Gamma(n+1-k)} \right)^{\frac{1}{2}} y^{-k} \left(\frac{y}{1+y} \right)^{(m+n)/2} F(k-m, k-n, 2k, -1/y). \quad (11.2)$$

A vezető tag $\text{const. } y^{-k}$ vagy $\text{const. } e^{-2k\zeta}$. Eszerint ezek a mátrixelemek akkor és csak akkor integrálhatók négyzetesen az \mathfrak{S} csoportsokaságon [a (10.14)-gyel definiált da térfogatelem mellett], ha $k > \frac{1}{2}$.

A (10.29c) összefüggés folytán D_k^- mátrixelemei ugyanilyen aszimptotikus viselkedést mutatnak.

11b. *A folytonos osztály ábrázolásai.* Alakítsuk át a (10.27a) egyenletek közül a másodikat (10.23) segítségével, ha $\sigma \neq 0$.²⁰ A kapott eredményt a következő alakban fejezhetjük ki:

$$\left. \begin{aligned} W_{mn}(y) &= y^{-\frac{1}{2}} (y/(1+y))^{(m+n)/2} \{ \beta_{mn}(\sigma, -1/y) y^\sigma + \beta_{mn}(-\sigma, -1/y) y^{-\sigma} \}, \\ \beta_{mn}(\sigma, x) &= \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + m - \sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2} + n + \sigma) \Gamma(\frac{1}{2} + n - \sigma) \Gamma(\frac{1}{2} + m + \sigma)} \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \frac{\Gamma(2\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2} - n + \sigma)} F(\frac{1}{2} - m - \sigma, \frac{1}{2} - n - \sigma, 1 - 2\sigma, x). \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

²⁰ Ha $\sigma=0$, a (10.23) egyenlet nem érvényes, és egy további logaritmikus tag lép fel.

Ha $q > \frac{1}{4}$, és így $\sigma = is$, aszimptotikusan fennáll:

$$W_{mn}(y) \sim 2y^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Re}\{\beta_{mn}(is, 0)y^{is}\} \sim 4e^{-\zeta} \operatorname{Re}\{4^{-is}\beta_{mn}(is, 0)e^{2is\zeta}\}, \quad (11.4)$$

ahol Re a „*reális rész*” jele. A $v_{mn}(a)$ függvények nem integrálhatók négyzetesen, de oszcilláló jellegük folytán „*hullámcsomagokat*” képezve nyerhetünk négyzetesen integrálható függvényeket; ehhez az s változó szerint kell integrálnunk.

A $0 < q < \frac{1}{4}$ kivételes intervallumban, ahol $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, a

$$W_{mn}(y) \sim \beta_{mn}(\sigma, 0)y^{\sigma-\frac{1}{2}} \sim 2^{1-2\sigma}\beta_{mn}(\sigma, 0)e^{(2\sigma-\frac{1}{2})\zeta} \quad (11.5)$$

aszimptotikus kifejezés érvénye. Ezek a függvények nem oszcillálnak a ζ paraméterben, és lassabban csökkennek, mint a kivételes intervallumon kívül eső függvények. Ennélfogva nem érhető el, hogy négyzet-integráljuk konvergáljon.

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy a *véges dimenziós* ábrázolások (10.33) mátrixelemei úgy növekszenek, mint y^j .

11c. $|\beta_{mn}(is, 0)|^2$ *kiszámítása*. A következő szakaszban szükségünk lesz $\beta_{mn}(is, 0)$ abszolút értékére. A (11.1) egyenlet folytán $|\beta_{mn}(is, 0)| = |\beta_{nm}(is, 0)|$, elég tehát az $m \geq n$ esetet tárgyalni. A (11.3) összefüggésből kapjuk:

$$|\beta_{mn}(is, 0)|^2 = |\Gamma(2is)|^2/b_n, \quad b_n = |\Gamma(\tfrac{1}{2}-n+is)\Gamma(\tfrac{1}{2}+n+is)|^2. \quad (11.6)$$

Könnyen látható, hogy $b_n = b_{n+1}$, ennélfogva b_n -et (C_q^0 esetében) b_0 -lal, vagy ($C_q^{\frac{1}{2}}$ esetében) $b_{\frac{1}{2}}$ -del helyettesíthetjük. Következésképpen a (11.6) kifejezés értéke ugyanaz, adott ábrázolás valamennyi mátrixeleme esetében. Jele legyen $c_0(s)$, ill. $c_{\frac{1}{2}}(s)$.

Minthogy tetszőleges ζ valós szám esetén

$$|\Gamma(i\zeta)|^2 = \pi/\zeta \operatorname{sh} \zeta, \quad |\Gamma(\tfrac{1}{2}+i\zeta)|^2 = \pi/\operatorname{ch} \zeta,$$

$$|\Gamma(1+i\zeta)|^2 = \zeta^2 |\Gamma(i\zeta)|^2, \text{ kapjuk:}$$

$$|\beta_{mn}(is, 0)|^2 = c_0(s) = \frac{\operatorname{cth} \pi s}{4\pi s} \quad C_q^0 \text{ esetén,} \quad (11.7a)$$

$$q = \tfrac{1}{4} + s^2$$

$$|\beta_{mn}(is, 0)|^2 = c_{\frac{1}{2}}(s) = \frac{\operatorname{th} \pi s}{4\pi s} \quad C_q^{\frac{1}{2}} \text{ esetén.} \quad (11.7b)$$

12. §. Ortogonalitási összefüggések

12a. Most a *véges és a kompakt topologikus* csoportok irreducibilis unitér ábrázolásaira érvényes ortogonalitási összefüggések analogonját kívánjuk tárgyalni. (Az említett ábrázolások szükségképpen végesdimenziósak.) Valamely \mathfrak{G} kompakt topologikus csoport esetében ezek az összefüggések a következőképpen fogalmazhatók meg.

1. Vegyük szemügyre \mathfrak{G} egy folytonos irreducibilis ábrázolását az r -dimenziós E^r lineáris teret önmagára leképező $U(a)$ unitér transzformációk által ($a \in \mathfrak{G}$). Ekkor E^r tetszőleges négy f, g, f', g' vektorára fennáll:

$$\int_{\mathfrak{G}} \overline{(f, U(a)g)} (f', U(a)g') da = (1/r) \overline{(f, f')} (g, g'), \quad (12.1)$$

ahol da -val a \mathfrak{G} csoporton való invariáns integrálást jelöltük, s a csoport teljes térfogatát egyre normáltuk.

2. Definálj a $U'(a)$ a \mathfrak{G} csoport egy másik folytonos irreducibilis ábrázolását, melyet az r' -dimenziós $E^{r'}$ lineáris teret önmagára leképező unitéri transzformációk valósítanak meg; tegyük fel, hogy az $U'(a)$ és $U(a)$ ábrázolások *inekivitalensek*. Ha f és g az E^r , f' és g' pedig az $E^{r'}$ tér két vektora, akkor

$$\int_{\mathfrak{G}} (f, U(a)g)(f', U'(a)g') da = 0. \quad (12.2)$$

Legyen f_m ($1 \leq m \leq r$) és f'_m ($1 \leq m \leq r'$) egy-egy ortonormált vektorrendszer az E^r , ill. az $E^{r'}$ térben. Ha a (12.1) képletet az f_m rendszer bármely négy vektorára alkalmazzuk, kapjuk:

$$\int_{\mathfrak{G}} \overline{u_{mn}(a)} u'_{m'n'}(a) da = (1/r) \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (1 \leq m, n, m', n' \leq r); \quad (12.3)$$

itt $u_{mn}(a) = (f_m, U(a)f_n)$. Hasonlóképpen, a (12.2) képletből kapjuk:

$$\int_{\mathfrak{G}} \overline{u_{mn}(a)} u'_{m'n'}(a) da = 0 \quad (1 \leq m, n \leq r, 1 \leq m', n' \leq r'), \quad (12.4)$$

ahol $u'_{m'n'}(a) = (f'_{m'}, U'(a)f'_{n'})$. Nyilvánvaló, hogy (12.3) és (12.4) ekvivalens (12.1)-gyel ill. (12.2)-vel.

Ami az \mathfrak{S} csoport unitér ábrázolásait illeti, nyilvánvaló, hogy ilyen típusú ortogonalitási összefüggések csak akkor állhatnak fenn, ha a szóban forgó ábrázolás mátrixelemei *négyzetesen integrálhatók* a csoportsokeaságon. [Végezzük el az $f=f'$, $g=g'$ helyettesítést a (12.1) képletben.] Ezt tehát a D_k^+ és D_k^- *diszkrét osztály* esetében várhatjuk, ahol $k > \frac{1}{2}$ (vö. 11a. §). Azonfelül a (12.1), (12.3) képletekben az $(1/r)$ tényezőt, amelyet az ábrázolási tér dimenziója határoz meg, valamilyen konstanssal kell helyettesítenünk, mely az ábrázolásra jellemző. A *folytonos osztály* ábrázolásai esetében az ortogonalitási összefüggéseket alkalmas módon módosítanunk kell.

12b. $A D_k^+, D_k^-$ ábrázolások ($k > \frac{1}{2}$). Az ortogonalitási összefüggéseket először a (12.3) és (12.4) alakban kapjuk meg és később térünk át a (12.1), (12.2) alakra. A különböző ábrázolások mátrixelemeinek megkülönböztetése érdekében az explicit $v_{mn}(a|k)$ és $v_{mn}(a|-k)$ jelölést alkalmazzuk. Minthogy (10.10) értelmében

$$v_{mn}(a|\pm k) = e^{-2im\mu} e^{-2in\nu} W_{mn}(\nu|\pm k)$$

és (10.14) szerint

$$da = (2\pi)^{-2} dy d\mu d\nu, \quad 0 \leq y < \infty, \quad -\pi \leq \mu, \nu \leq \pi,$$

nyilvánvaló, hogy az

$$\int_{\mathfrak{S}} \overline{v_{mn}(a|\pm k)} v_{m'n'}(a|\pm k') da \quad (12.5)$$

alakú integrálokban el kell tűnniök, kivéve, ha

$$m = m', \quad n = n' \quad (12.6)$$

Speciálisan egy D_k^+ ábrázolás mátrixelemei (itt m, n *pozitívak*) ortogonálisak a D_k^- ábrázolások mátrixelemeire (ezek esetében m', n' *negatívak*). Megtehetjük

tehát, hogy csak a D_k^+ ábrázolásokat tárgyaljuk és eredményeinket a (10.29c) összefüggések segítségével alkalmazzuk D_k^- -ra. A (12.6) korlátozások folytán a következő integrálok vizsgálatára van hátra:

$$\int_{\mathfrak{E}} \overline{v_{mn}(a|k)} v_{mn}(a|k') da = \int_0^\infty W_{mn}(y|k) W_{mn}(y|k') dy. \quad (12.7)$$

A (11.1) összefüggés folytán elegendő az $m \equiv n$ esettel foglalkozni. A (12.7) integrálok ekkor a következő, a hipergeometrikus polinomokkal végzett számításokban szokásos eljárással számíthatók ki. Tegyük fel, hogy $k \leq k'$, helyettesítsük a hipergeometrikus polinomot $W_{mn}(y|k)$ (10.28a) kifejezésben (10.26) jobboldalával és alkalmazzunk (12.7)-re $(n-k)$ számú szukcesszív parciális integrálást. Az eredmény

$$\int_0^\infty |W_{mn}(y|k)|^2 dy = (2k-1)^{-1}, \quad (12.8)$$

$$\int_0^\infty W_{mn}(y|k) W_{mn}(y|k') dy = 0 \quad (k \neq k').$$

Ezen egyenletek közül a második, a (12.6) feltételekkel kombinálva, maga után vonja, hogy két *inekvivalens* D_k^+ , $D_{k'}^+$ ábrázolás ($k \neq k'$) mátrixelemei ortogonálisak. Ezt a következtetést abból a tényből is le lehetett volna vonni, hogy (10.5) folytán $v_{mn}(a|k)$ és $v_{m'n'}(a|k')$ az Ω önadjungált differenciáloperátor két *különböző* sajátértékéhez, $q = k(1-k)$ -hoz és $q' = k'(1-k')$ -hez tartozó sajátfüggvényei. [Az $m=m'$, $n=n'$ megszorítás folytán ez a legkönnyebben (10.16) alapján látható.] A (12.8) egyenletek közül az első (12.3) típusú egyenletek fennállását vonja maga után, ahol r helyére $(2k-1)$ lép.

Összefoglaljuk a kapott eredményeket:

$$\int_{\mathfrak{E}} \overline{v_{mn}(a)} v_{m'n'}(a) da = (2k-1)^{-1} \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \quad v_{mn}(a) = v_{mn}(a|\pm k), \quad (12.9)$$

$$\int_{\mathfrak{E}} \overline{v_{mn}(a)} v'_{m'n'}(a) da = 0, \quad (12.10)$$

ha v_{mn} és $v'_{m'n'}$ *inekvivalens* ábrázolásokhoz tartoznak.

Megjegyzés. A D_k^+ és D_k^- ábrázolások esetében $(2k-1) = (1-4q)^{\frac{1}{2}}$. Érdemes megemlíteni, hogy az $r = 2j+1$ dimenzió, amely a forgáscsoport \mathfrak{S}_R spinor csoportjának ortogonalitási összefüggéseiben lép fel, ugyanilyen alakú, minthogy a (2.19) definíció értelmében a q operátor értéke $-j(j+1)$.

12c. *Ortogonalitási összefüggések tetszőleges vektorokra.* Ugyanúgy, mint a 10a. §-ban, $T(a)$ -val jelöljük azokat a \mathfrak{H} Hilbert-téren ható operátorokat, amelyek valamely D_k^\pm ábrázolást definiálnak, g_m -mel pedig a \mathfrak{H} tér vektorainak egy teljes ortonormált rendszerét; fennáll: $v_{mn}(a) = (g_m, T(a)g_n)$. Legyen f és g a \mathfrak{H} tér két vektora, melyeknek komponensei $\eta_m = (g_m, f)$, ill. $\zeta_m = (g_m, g)$. A (12.9) képletből következik, hogy a $(2k-1)^{\frac{1}{2}} v_{mn}(a)$ függvények \mathfrak{E} -en ortonormált függvényrendszert alkotnak. Minthogy

$$(f, T(a)g) = \sum_{m,n} \varrho_{mn} (2k-1)^{\frac{1}{2}} v_{mn}(a), \quad \varrho_{mn} = (2k-1)^{-\frac{1}{2}} \bar{\eta}_m \zeta_n \quad (12.11)$$

és minthogy

$$\sum_{m,n} |\varrho_{mn}|^2 = (2k-1)^{-1} \sum_m |\eta_m|^2 \sum_n |\zeta_n|^2 = (2k-1)^{-1} \|f\|^2 \|g\|^2,$$

a Riesz—Fischer-tételből következik, hogy $(f, T(a)g)$ négyzetesen integrálható függvény²¹ \mathfrak{S} -en, és hogy a (12.11) összeg $(f, T(a)g)$ -hez konvergál normában \mathfrak{S} -en. Következésképpen

$$\int_{\mathfrak{S}} |(f, T(a)g)|^2 da = (2k-1)^{-1} \|f\|^2 \|g\|^2. \quad (12.12)$$

Ha a (12.12) képletben f -et $\gamma f + \gamma' f'$ -vel, g -t $\delta g + \delta' g'$ -vel helyettesítjük, ahol f, f', g, g' tetszőleges vektorok a \mathfrak{H} térben, $\gamma, \gamma', \delta, \delta'$ pedig tetszőleges komplex számok, akkor (12.1) analogonját kapjuk:

$$\int_{\mathfrak{S}} (f, T(a)g)(f', T(a)g') da = (2k-1)^{-1} \overline{(f, f')}(g, g'), \quad (12.13)$$

minthogy (12.12) $\gamma, \gamma', \delta, \delta'$ tetszőleges választása mellett fennáll.

Tegyük fel, hogy a $T'(a)$ operátorok a \mathfrak{H}' Hilbert-téren a fent vizsgálttal inekvivalens D_k^{\pm} ábrázolást definiálják. Legyenek $v'_{m'n'} = (g'_{m'}, T'(a)g'_{n'})$ ennek a $g'_{m'}$ ortonormált rendszer vektoraival képezett mátrixelemei. A (12.10) összefüggés folytán a $v'_{m'n'}(a)$ függvények ortogonálisak a $v_{mn}(a)$ függvényekre. Legyenek $f, g \in \mathfrak{H}$ és $f', g' \in \mathfrak{H}'$ tetszőleges vektorok. Ekkor $(f', T'(a)g')$ a $v'_{m'n'}(a)$ mátrixelemeknek lineáris kombinációja [vö. (12.11)] és így az $(f, T(a)g)$ függvényre ortogonális. Ennélfogva

$$\int_{\mathfrak{S}} \overline{(f, T(a)g)}(f', T'(a)g') da = 0. \quad (12.14)$$

6. Tétel. Ha a $T(a)$ unitér operátorok a \mathfrak{H} Hilbert-téren \mathfrak{S} -nek egy a D_k^{\pm} ($k > \frac{1}{2}$) diszkrét osztályba tartozó ábrázolását definiálják, akkor az $(f, T(a)g)$ függvény tetszőleges $f, g \in \mathfrak{H}$ mellett négyzetesen integrálható \mathfrak{S} -en; az integrál értékét (12.12) adja meg. Definiáljanak a $T'(a)$ unitér operátorok \mathfrak{H}' -n egy inekvivalens $D_{k'}^{\pm}$ ábrázolást ($k' > \frac{1}{2}$), és legyen f' és g' a \mathfrak{H}' Hilbert-tér két tetszőleges vektora. Ekkor az $(f', T'(a)g')$ függvény \mathfrak{S} -en ortogonális $(f, T(a)g)$ -re.

Megjegyzés. Ez a tétel speciálisan érvényes a 9. §-ban tárgyalt $f(z)$ analitikus függvényekre és $T_i(a)$ operátorokra.

12d. A folytonos osztály ábrázolásai ($q > \frac{1}{4}$). A B operátorok. A következőkben a (6.18) és (7.12) alatt definiált $u_{mn}(a)$ mátrixelemeket fogjuk használni (a vesszőt elhagyjuk); ezek ui. — a szám különböző értékei mellett — ugyanazon ortonormált vektorrendszerre vonatkoznak. Az egész esetben $f_m = e^{im\varphi}$, a feles esetben $f_m = e^{i(m-\frac{1}{2})\varphi}$ [vö. (6.17) és (7.9)]. Minthogy különbséget kell tennünk q , és így s különböző értékei között, az explicitebb $u_{mn}(a|s)$ jelölést fogjuk használni; itt feltesszük, hogy s pozitív és $q = \frac{1}{4} + s^2$. Minden esetben fennáll:

$$u_{mn}(a|s) = \omega_{mn}(s) v_{mn}(a|s), \quad \omega_{mn}(s) = \frac{\eta_n(is)}{\eta_m(is)} \quad (12.15)$$

²¹ A $T(a)$ operátorok \mathfrak{S} -en való folytonosságának folyományaképpen ez a függvény folytonos, azonban általában nem analitikus.

[vö. (6.29) és (7.13)], ahol $\eta_*(is)$ a (6.23), ill. (7.13) alatt definiált egységnyi abszolút-értékű komplex számokat jelöli. A (10.10) felbontásnak megfelelően írható:

$$u_{mn}(a|s) = \omega_{mn}(s) e^{-2im\mu} e^{-2inv} V_{mn}(\zeta|s), \quad |\omega_{mn}(s)| = 1. \quad (12.16)$$

Amint azt a 11b. §-ban jeleztük, ahhoz, hogy s -en négyzetesen integrálható függvényeket kapjunk, a (12.16) mátrixelemeket \mathfrak{S} szerint integrálnunk kell. A következőképpen járunk el. Legyen $\psi(s)$ egy komplex-értékű *négyzetesen integrálható* függvény, mely az $I = [s_1, s_2]$ zárt intervallumon kívül eltűnik, ahol $0 < s_1 < s_2 < \infty$. Legyen

$$b_{mn}(a) = \int_I \psi(s) u_{mn}(a|s) ds. \quad (12.17)$$

Ezek az egyenletek m -nek és n -nek vagy *minden egész*, vagy *minden feles* értéke mellett teljesüljenek. A (12.16) képlet alapján megállapíthatjuk, hogy

$$b_{mn}(a) = e^{-2im\mu} e^{-2inv} B_{mn}(\zeta); \quad B_{mn}(\zeta) = \int_I \psi(s) \omega_{mn}(s) V_{mn}(\zeta|s) ds. \quad (12.18)$$

A $b_{mn}(a)$ számok egy $B(a)$ operátor mátrixelemei:

$$b_{mn}(a) = (f_m, B(a)f_n), \quad B(a) = \int_I \psi(s) T_{is}(a) ds; \quad (12.19)$$

a $T_{is}(a)$ operátorokat az egész esetben (6.11), a feles esetben (7.5) adja meg. [Ami a (12.19) típusú integrálokat illeti, elegendő, ha két tetszőleges $f, g \in \mathfrak{H}$ vektorra definiáljuk az $(f, B(a)g) = \int_I \psi(s) (f, T_{is}(a)g) ds$ belső szorzatot.] A (6.11) és (7.5) explicit definíciók alapján kapjuk:

$$B(a)f(\varphi) = p(a, a^{-1}\varphi)f(a^{-1}\varphi); \quad p(a, \varphi) = \int_I \psi(s) \mu(a, \varphi)^{1+is} ds \quad (12.20)$$

(az egész esetben) és

$$B(a)f(\varphi) = v(a, a^{-1}\varphi)p(a, a^{-1}\varphi)f(a^{-1}\varphi) \quad (12.21)$$

(a feles esetben).

A $B(a)$ operátorok egyenletesen korlátosak; korlátjuk:

$$\int_I |\psi(s)| ds$$

[vö. (12.19)], minthogy az unitér T operátorok korlátja 1. Könnyen látható továbbá, hogy a -ban *folytonosak*.

12e. *Ortogonalitási összefüggések a B operátorokra.* Kiindulásképpen a $B_{mn}(\zeta)$ függvényt vizsgáljuk meg rögzített egész vagy feles m, n indexpár mellett. Ha a (10.16) képletben y helyett bevezetjük a ζ változót, a

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \left(\text{sh } 2\zeta \frac{dV_{mn}(\zeta|s)}{d\zeta} \right) - K_{mn}(\zeta) V_{mn}(\zeta|s) &= -4s^2 \text{sh } 2\zeta V_{mn}(\zeta|s) \\ K_{mn}(\zeta) &= (\text{sh } 2\zeta)^{-1} [m^2 - 2mn \text{ch } 2\zeta + n^2] - \text{sh } 2\zeta, \quad q = \frac{1}{4} + s^2 \end{aligned} \right\} \quad (12.22)$$

differentiálegyenletet kapjuk. Alkalmazzuk (12.22)-t a $V_{mn}(\zeta|s)$, $V_{mn}(\zeta|t)$ függvényekre; a

$$4(t^2 - s^2) \operatorname{sh} 2\zeta V_{mn}(\zeta|t) V_{mn}(\zeta|s) = \frac{d}{d\zeta} [\operatorname{sh} 2\zeta \{V_{mn}(\zeta|t), V_{mn}(\zeta|s)\}]$$

eredményt nyerjük, ahol az

$$\{F, G\} = F \frac{dG}{d\zeta} - G \frac{dF}{d\zeta}$$

rövidítést alkalmazzuk. Bevezetve a $\varphi_{mn}(s) = \omega_{mn}(s)\psi(s)$ jelölést, a (12.18) és (12.23) egyenletekből kapjuk:

$$\begin{aligned} & \int_0^\zeta |B_{mn}(\zeta')|^2 \operatorname{sh} 2\zeta' d\zeta' = \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \int_{s_1}^{s_2} \overline{\varphi_{mn}(s)} \varphi_{mn}(t) \left[\int_0^\zeta V_{mn}(\zeta'|s) V_{mn}(\zeta'|t) \operatorname{sh} 2\zeta' d\zeta' \right] ds dt = \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \int_{s_1}^{s_2} \overline{\varphi_{mn}(s)} \varphi_{mn}(t) \operatorname{sh} 2\zeta \{V_{mn}(\zeta|t), V_{mn}(\zeta|s)\} (4(t^2 - s^2))^{-1} ds dt. \end{aligned}$$

Jól ismert okoskodással meg lehet mutatni, hogy a $\zeta \rightarrow \infty$ limeszben a $V_{mn}(\zeta) = W_{mn}(y)$ függvények helyettesíthetők (11.4) *aszimptotikus értékeikkel*, speciálisan fennáll:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |B_{mn}(\zeta)|^2 \operatorname{sh} 2\zeta d\zeta &= 2 \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \int_{s_1}^{s_2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\sin 2\zeta(s-t)}{s-t} \overline{\gamma_{mn}(s)} \gamma_{mn}(t) ds dt = \\ &= 2\pi \int_{s_1}^{s_2} |\gamma_{mn}(s)|^2 ds, \end{aligned}$$

ahol $\gamma_{mn}(s) = \beta_{mn}(is, 0)\varphi_{mn}(s)$. A 11c. §-ban láttuk, hogy m és n értékétől függetlenül $|\beta_{mn}(is, 0)|^2 = c(s)$, ahol $c(s)$ az egész esetben $c_0(s)$, a feles esetben $c_{\frac{1}{2}}(s)$ helyett áll [vö. (11.7)]. Minthogy $|\omega_{mn}(s)| = 1$, fennáll: $|\gamma_{mn}(s)|^2 = c(s)|\psi(s)|$, és így

$$\int_0^\infty |B_{mn}(\zeta)|^2 \operatorname{sh} 2\zeta d\zeta = 2\pi \int_I c(s) |\psi(s)|^2 ds. \quad (12.24)$$

Ez az egyenlet a következőképpen általánosítható. Legyen $B^{(\alpha)}(a)$ ($\alpha=1, 2$) két operátor, melyeket olyan $\psi^{(\alpha)}(s)$ függvények segítségével definiáltunk, amelyek $I^{(\alpha)}$ -n kívül eltűnnek; tegyük fel, hogy $B^{(1)}(a)$ és $B^{(2)}(a)$ mindketten vagy az egész, vagy a feles esetre vannak definiálva. Ekkor

$$\int_0^\infty \overline{B_{mn}^{(1)}(\zeta)} B_{mn}^{(2)}(\zeta) \operatorname{sh} 2\zeta d\zeta = 2\pi \int_J c(s) \overline{\psi^{(1)}(s)} \psi^{(2)}(s) ds, \quad (12.25)$$

ahol J az I_1, I_2 intervallumok közös része.

Ortogonalitási összefüggések a $b_{mn}(a)$ mátrixelemekre. Minthogy $da = (2\pi)^{-2} \cdot \text{sh } 2\zeta \, d\zeta \, d\mu \, dy$, a (12.18) és (12.24) képletekből következik, hogy a $b_{mn}(a)$ mátrixelemek négyzetesen integrálhatók \mathfrak{S} -en. Látható azonfelül, hogy $b_{mn}^{(1)}(a)$ és $b_{m'n'}^{(2)}(a)$ ortogonálisak \mathfrak{S} -en, kivéve ha $m=m'$, $n=n'$. Ez speciálisan maga után vonja, hogy bármely egész m, n indexű $b_{mn}^{(1)}(a)$ ortogonális bármely feles m', n' indexű $b_{m'n'}^{(2)}(a)$ -ra. Következésképpen írható:

$$\int_{\mathfrak{S}} \overline{b_{mn}^{(1)}(a)} b_{m'n'}^{(2)}(a) da = (2\pi \int c(s) \overline{\psi^{(1)}(s)} \psi^{(2)}(s) ds) \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \quad (12.26)$$

ha (m, n) és (m', n') mindketten egész vagy mindketten feles értékek; a (12.26) integrál a többi esetben eltűnik.

Most már egyszerűbb áttérni a (12.13) és (12.14) alakú általánosabb összefüggésekre, minthogy a 12c. §-ban megadott tárgyalás a B operátorokra is alkalmazható. A végeredmény megfogalmazásában $B_0(a)$ -val és $B_{\frac{1}{2}}(a)$ -val jelöljük az egész, ill. feles esetre definiált operátorokat.

7. Tétel. *Legyenek $B_0(a)$ és $B_{\frac{1}{2}}(a)$ az egységkörön értelmezett négyzetesen integrálható függvények \mathfrak{H} Hilbert-terének operátorai, amelyeket a (12.20), ill. (12.21) képlet definiál. A \mathfrak{H} Hilbert-tér bármely két f, g eleme mellett $(f, B_0(a)g)$ és $(f, B_{\frac{1}{2}}(a)g)$ folytonos négyzetesen integrálható függvények \mathfrak{S} -en. A $\psi^{(1)}(s)$, $\psi^{(2)}(s)$ függvények bármily megengedett választása és tetszőleges $f, g, f', g' \in \mathfrak{H}$ vektorok mellett fennáll:*

$$\int_{\mathfrak{S}} \overline{(f, B_0^{(1)}(a)g)} (f', B_0^{(2)}(a)g') da = (2\pi \int c_0(s) \overline{\psi^{(1)}(s)} \psi^{(2)}(s) ds) \overline{(f, f')}(g, g'),$$

$$\int_{\mathfrak{S}} \overline{(f, B_{\frac{1}{2}}^{(1)}(a)g)} (f', B_{\frac{1}{2}}^{(2)}(a)g') da = (2\pi \int c_{\frac{1}{2}}(s) \overline{\psi^{(1)}(s)} \psi^{(2)}(s) ds) \overline{(f, f')}(g, g'),$$

$$\int_{\mathfrak{S}} \overline{(f, B_{\frac{1}{2}}^{(1)}(a)g)} (f', B_0^{(2)}(a)g') da = 0,$$

$$c_0(s) = \text{cth } \pi s / 4\pi s, \quad c_{\frac{1}{2}}(s) = \text{th } \pi s / 4\pi s.$$

12f. A $b_{mn}(a)$ és $v_{mn}(a|\pm k)$ mátrixelemek ortogonalitása ($k > \frac{1}{2}$).

8. Tétel. *Hasson a $B(a)$ operátor a \mathfrak{H} Hilbert-téren, és definiálják a \mathfrak{H}' téren ható $T(a)$ operátorok a D_k^{\pm} ($k > \frac{1}{2}$) diszkrét osztály egy ábrázolását. Tetszőleges $f, g \in \mathfrak{H}$ és $f', g' \in \mathfrak{H}'$ mellett az $(f, B(a)g)$ és $(f', T(a)g')$ függvények ortogonálisak \mathfrak{S} -en.*

Nyilvánvalóan elégséges a megfelelő mátrixelemek ortogonalitását bizonyítani. Minthogy az $u_{mn}(a|s)v_{m'n'}(a|k)$ szorzat legalább is úgy csökken, mint $e^{-3\zeta}$ ($k \geq 1$!), $u_{mn}(a|s)$ és $v_{m'n'}(a|k)$ ortogonalitásának bizonyítását arra a tényre alapítjuk, hogy ezek sajátfüggvényei az Ω önadjungált operátornak a különböző $q = \frac{1}{4} + s^2$, $q' = k(1-k) \leq 0$ sajátértékek mellett. Az integrálás s szerint a kívánt eredményt adja.

Megjegyzés. Az *inekvalens* ábrázolások mátrixelemeinek ortogonalitása részben m különböző értékészletével (vagyis H_0 spektrumának különböző voltával) kapcsolatos, részben pedig azzal, hogy e mátrixelemek Ω -nak különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvényei. A D_k^+ és D_k^- ($k > \frac{1}{2}$) ábrázolások mátrixelemei Ω diszkrét spektrumához, C_q^0 ($q > \frac{1}{4}$) és $C_q^{\frac{1}{2}}$ mátrixelemei pedig a *folytonos* spektrumhoz tartoznak. Ugyanazon ábrázolás mátrixelemeinek ortogonalitási összefüggései nem kaphatók meg egyedül ezzel az érveléssel.

13. §. A mátrixelemek teljessége \mathfrak{S} -en

Valamely *kompakt* topologikus csoport esetében a Peter—Weyl-tételből következik [vö. Weyl, 2], hogy a csoport irreducibilis ábrázolásának mátrixelemei a csoportokaságon értelmezett négyzetesen integrálható függvények Hilbert-terében teljes rendszert alkotnak. Megmutatjuk, hogy esetünkben hasonló eredmény érvényes. Az ábrázolási mátrixelemek, amelyeket vizsgáltunk, a

$$v_{mn}(a) = e^{-2im\mu} e^{-2inv} W_{mn}(\gamma) \quad (13.1)$$

alakúak, ahol m és n mindketten egészek vagy mindketten felesek; azaz: $2m$ és $2n$ mindketten *párosak* vagy mindketten *páratlanok*. Amint azt a 4c. §-ban megjegyeztük, az itt használt paraméterek a csoportokaságot *kétszeresen* fedik le; minden \mathfrak{S} -en értelmezett függvény változatlan marad, ha (μ, ν) helyét $(\mu \pm \pi, \nu \pm \pi)$ foglalja el. Könnyen látható, hogy egy ilyen függvény Fourier-kifejtése csak olyan tagokat tartalmaz, amelyekben a $2m, 2n$ kitevők mindketten párosak, vagy mindketten páratlanok. Így tehát azt kell megmutatnunk, hogy adott (m, n) mellett az általunk talált $W_{mn}(\gamma)$ függvények lineárkombinációi (vagy egy folytonos paraméter szerint képezett integráljai) mindenütt sűrű halmazt alkotnak a $0 \leq \gamma < \infty$ félegyenesen négyzetesen integrálható függvények Hilbert-terében. A $W_{mn}(\gamma)$ függvények megoldásai a (10.16) differenciálegyenletnek. Szerencsére ezt az egyenletet tárgyalta H. Weyl a szinguláris differenciálegyenletekre vonatkozó vizsgálatai folyamán [Weyl, 1, 454—455. old.]. Eredményeit három paraméter, α , γ és λ segítségével fogalmazta meg; ezek esetünkben a következők [vö. (10.22)]:

$$\begin{aligned} \alpha &= c'_1 + c'_2 = 1 + |m - n| + |m + n|, \\ \gamma &= c_3 = 1 + |m - n|, \quad \lambda = q - \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Weyl $\alpha \geq \gamma \geq 1$ kritériuma nyilvánvalóan teljesül. A (10.16) egyenletnek van egy *folytonos* spektruma, mely valamennyi *pozitív* λ -ból áll, ha

$$\gamma - (\alpha/2) \geq 0, \quad (13.3)$$

ha pedig $\gamma - (\alpha/2) < 0$, van ezenkívül egy *diszkrét* spektruma²² is, amely a

$$\lambda = -((\alpha/2) - \gamma - l)^2, \quad l = 0, 1, \dots \quad ((\alpha/2) - \gamma - l > 0) \quad (13.4)$$

értékekből áll. A választandó megoldást (10.21) adja meg. Egyszerű diszkusszió mutatja, hogy a *folytonos* spektrum esetében a *folytonos osztály* mátrixelemeit kapjuk a $0 < q < \frac{1}{4}$ kivételes intervallumon kívül, a *diszkrét* spektrum esetében pedig a *diszkrét osztály* mátrixelemeit kapjuk $k > \frac{1}{2}$ mellett (az utóbbi esetben azokat kapjuk meg, amelyek m és n értékeivel összeférnek). Ezt az eredményt a csoportokaságra vonatkozólag a következőképpen fogalmazhatjuk meg.

9. Tétel. Az $(f, B_0(a)g)$ és $(f, B_{\frac{1}{2}}(a)g)$ függvények, amelyeket a 12. §-ban definiáltunk, és az $(f, T(a)g)$ függvények, ahol $T(a)$ a D_k^+ vagy a D_k^- diszkrét osztályba tartozik ($k > \frac{1}{2}$), kifesztik az \mathfrak{S} -en értelmezett négyzetesen integrálható függvények Hilbert-terét.

²² A kritérium megfogalmazása Weyl dolgozatában nem helytálló.

Bizonyítás. Elegendő megjegyezni, hogy a mondott függvények lineáris kombinációi és integráljai (az s paraméter szerint) a Weyl-féle kritériumot teljesítő mátrixelemeknek.

Megjegyzés. Várhattuk, hogy \mathfrak{S} unitér ábrázolásainak mátrixelemei *elégségesek* ahhoz, hogy kifeszítsék a 9. tétel Hilbert-terét. Figyelmet érdemel azonban, hogy az ábrázolásoknak csupán egy része lép fel, minthogy a C_q^0 ábrázolások, ha q a $(0, \frac{1}{2})$ kivételes intervallumba esik, valamint a $D_{\frac{1}{2}}^+$ és $D_{\frac{1}{2}}^-$ ábrázolások ki vannak zárva.

FÜGGELÉK

Az infinitezimális operátorok spektruma

Szeretnénk néhány megjegyzést tenni, bizonyítás nélkül, a különböző ábrázolások H_χ infinitezimális operátorainak spektrumára vonatkozóan. Amint azt a 2. § végén láttuk, az $\exp(t\chi)$ ($\chi \neq 0$) egyparáméteres alcsoportok három különböző osztályba sorolhatók, melyeket elliptikusnak, hiperbolikusnak, ill. parabolikusnak neveztünk. Minden egyes osztályon belül bármely két alcsoport konjugált. Ugyanez vonatkozik a χ generáló elemekre, azzal a különbséggel, hogy χ és $\alpha\chi$ ($\alpha \neq 0$) között nem teszünk különbséget. Az elliptikus esetben vehetjük például χ_0 -t. Minthogy a H_0 operátort alaposan megtárgyaltuk, itt nem foglalkozunk vele. A többi osztályra vonatkozóan a következőket lehet megmutatni:

I. *Hiperbolikus osztály.* A C_q^0 és $C_q^{\frac{1}{2}}$ ábrázolások esetében H_χ -nek *kettes multiplícitású* folytonos spektruma van, mely $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig terjed. A D_k^{\pm} ábrázolások esetében H_χ -nek *egyszeres*, $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig terjedő folytonos spektruma van.

II. *Parabolikus osztály.* A C_q^0 és $C_q^{\frac{1}{2}}$ ábrázolások esetében H_χ -nek *egyszeres* folytonos spektruma van, amely $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig terjed. A D_k^{\pm} ábrázolások esetében H_χ spektruma *egyszeres* folytonos spektrum, mely 0-tól $+\infty$ -ig vagy $-\infty$ -tól 0-ig terjed, a választott χ elemtől függően.

Kiegészítés korrektúránál. Időközben megérkezett Amerikába I. Gelfand és M. Najmark érdekes rövid közleménye [*Journal of Physics* (USSR), X. kötet, 93—94. old., 1946] a Lorentz-csoport (a mi jelölésünkben az \mathfrak{S}_4 csoport) irreducibilis unitér ábrázolásairól. Az ábrázolások osztályozására vonatkozó eredmények, amelyekről a szerzők beszámolnak, erősebbek a mi eredményeinknél (vö. a jelen dolgozat bevezetésével), minthogy az *infinitezimális* ábrázolásokra vonatkozóan semmilyen feltevést nem tesznek. Nem tárgyalják azonban a mátrixelemeket mint a csoportokaságon értelmezett függvényeket.

A szerzők által kapott ábrázolások megegyeznek a mi bevezetésünkben említett ábrázolásokkal, még az ábrázoló lineáris operátoroknak funkcionáloperátorokkal való realizációja is ugyanaz — ha a fénysugarak terét (vagy az egységsgömböt) használjuk, amint az a közleményük végén olvasható.

Gelfand és Najmark *második osztálya* a C_q^0 ábrázolásokból áll, ahol q a $0 < q < 1$ kivételes intervallumba esik; a q paraméter egyenlő $2(1-q)^{\frac{1}{2}}$ -nel. Az *első osztályt* valamennyi fennmaradó ábrázolás alkotja: C_q^0 ($q \geq 1$), ahol $n=0$, $q = \pm 2(q-1)^{\frac{1}{2}}$, és $C_{k,r}$, ahol $n = \pm 2k$, $q = \pm 2r$.

Fordította: Györgyi Géza

BIBLIOGRÁFIA

- H. Casimir*, Neder. Akad. van Wetensch., Proc., 34 (1931), pp. 844—846.
- R. Courant* and *D. Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik., vol. 1. Berlin, Springer, 1931.
- P. A. M. Dirac*, 1. Roy. Soc. London, Proc., A **155** (1936), pp. 447—459.
2. Roy. Soc. London, Proc., A **183** (1945), pp. 284—295.
- M. Fierz*, 1. Helvetica Physica Acta, **12** (1939), pp. 3—37.
2. Helvetica Physica Acta, **13** (1940), pp. 45—60.
- J. von Neumann*, 1. Math. Annalen, **102** (1930), pp. 49—131.
2. Annals of Math., **33** (1932), pp. 567—573.
- M. H. Stone*, 1. Nat. Acad. Sci. Proc., **16** (1930), pp. 173—175.
2. Annals of Math., **33** (1932), pp. 643—648.
- B. L. van der Waerden*, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. Berlin, Springer, 1932.
- A. Weil*, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. Paris, Hermann, 1940.
- H. Weyl*, 1. Gesells. der Wiss., Göttingen, Nachr., 1910. pp. 442—467. 2. Annals of Math., **35** (1934), pp. 486—499.
- E. T. Whittaker* and *G. N. Watson*, A course of modern analysis, 4th ed. Cambridge Univ. Press, 1940.
- E. Wigner*, Annals of Math., **40** (1939), pp. 149—224.

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

Technikai szerkesztő: Turchányi György
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Helle Mária
A kézirat beérkezett: 1972. IX. 21. — Terjedelem: 9,10 (A/5) ív
72-4159 — Szegedi Nyomda

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

Matematikai, fizikai, csillagászati dolgozatokat, referátumokat, könyvismertetéseket, a Tudományos Minősítő Bizottságnak a III. Osztályra vonatkozó híreit s a III. Osztály híreit közli. Évenként egy kötet (kb. 40 ív) jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

A Közlemények előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 60 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488, külföldi megrendelések a „Kultúra”

Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,
1011 Budapest I., Fő utca 32.

(Pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990 útján eszközölhetők.)

Ára: 10,—Ft
Előfizetés kötetenként: 48,—Ft

INDEX: 26 491

TARTALOMJEGYZÉK

Dong van Thanh, Lőrinczy András, Pataki György: Rekombinációs folyamatok szilícium alapú MOS szerkezetekben 73

A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

V. Bargmann: A Lorentz-csoport irreducibilis unitér ábrázolásai 103

30 7226

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

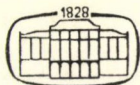
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR,
PÁL LÉNÁRD ÉS SZALAY SÁNDOR
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI
JÁNOSSY LAJOS

XXI. KÖTET

3. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST 1973

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klasszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10—10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóiratról évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Jánossy Lajos akadémikus
1121 Budapest XII. Konkoly Thege út
Központi Fizikai Kutató Intézet

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 48 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, 1011 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmi ismertetőt írjanak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közöljék. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írjanak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.

KOZMIKUS SUGÁRZÁSI TÉLI ISKOLA

Mátrafüred, 1972. február 18—23.

Táguló világegyetemünkről szerzett információink hordozói közül a kozmikus sugárzás egyike a legösszetettebbeknek és legsokoldalúbbaknak. Töltéssel bíró sugárzásról lévén szó, világegyetemünk elektromágneses szerkezetének bélyegeit viseli magán, kémiai összetétele a csillagfejlődés megfelelő fázisait tükrözi. Nyilvánvaló, hogy a kozmikus sugárzás hordozta információ a más tudományágak: asztrofizika, kozmológia, kozmogónia, szoláris fizika, interplanetáris tér kutatása — nevezzük őket kozmikus tudományoknak — nyújtotta információval egybekapcsolva bontakoztatható ki teljes értékében. Bizonyos fokú egységes szemlélet kialakítására van szükség, ami lehetővé teszi a kozmikus tudományok bármelyikének területén szerzett információ felhasználását a tudománycsoport más területén mért eredmények értelmezésére.

Ebben a tekintetben akart szerény kezdet lenni az a Téli Iskola, amit a Központi Fizikai Kutató Intézet Kozmikus Sugárzási Osztálya rendezett Mátrafüreden 1972. február 18-tól 23-ig. Nem lehetett célja az, hogy felölelje a kozmikus sugárzás kapcsolatait az összes többi kozmikus tudományokkal. A szükséges egységes szemlélet kialakítása nem olyan feladat, amit egy egyhetes téli iskolával meg lehetne oldani. Kitartó, mélyreható munkára van szükség. A Téli Iskola ezért részfeladatot tűzött ki célul: A magnetoszféráról és az interplanetáris térről kozmikus sugárzási mérésekkel nyerhető információ állt a középpontban. Ezen a részterületen, de mai szinten összefoglalni a legfontosabb eredményeket és rámutatni a megoldandó problémákra úgy, hogy az nemcsak a kozmikus sugárzással foglalkozó szakemberek, hanem a rokon területeken dolgozó kutatók számára is segítség legyen a további munkában, ez volt a Téli Iskola célja. Az elhangzott előadások a következők voltak:

1. A Nap mágneses tere
(Marik Miklós, ELTE Csillagászati Tanszék)
2. A kozmikus sugárzás terjedése a Naprendszerben (I. Elmélet)
(Kóta József, KFKI Kozmikus Sugárzási Osztály)
3. A galaktikus kozmikus sugárzás modulációja a Naprendszerben (II. Kísérlet)
(Válas György, KFKI K.S.O.)
4. A föld magnetoszférája
(Szemerédy Pál, ELTE Geofizikai Tanszék)
5. Bevezetés a sugárzási övezetek dipólus-elméletébe
(Gombosi Tamás, KFKI K.S.O.)
6. A kozmikus sugárzás meteorológiai hatásai
(Varga András, KFKI K.S.O.)
7. A differenciális érzékenységi függvény
(Benkó György, KFKI K.S.O.)
8. A kozmikus sugárzás eredete
(Király Péter, KFKI Elméleti Csoport)
9. A BFBSZ kísérlet
(Vanicsek László, KFKI K.S.O.)

A 6. és 7. előadás alapvető fontosságú a kozmikus sugárzás hordozta magnetoszférikus és interplanetáris információ dekódolása szempontjából, míg a 9. előadás nem függött össze szorosan a kitűzött céllal, főképp informatív jellegű volt, ezért nem vettük fel a Magyar Fizikai Folyóiratban publikálendő előadások közé.

A Téli Iskolán a KFKI Kozmikus Sugárzási Osztályának kutatóin kívül más intézmények Kutatói is résztvettek (ELTE Csillagászati Tanszék, ELTE Geofizikai Tanszék, MTA Csillagvizsgáló Intézet, MTA Geokémiai Intézet, MTA Geodéziai és Geofizikai Intézete, KFKI Elméleti

Csoport). E helyen is köszönetet mondunk vendéglőadóink: Marik Miklós (ELTE Csillagászati Tanszék), Szemerédi Pál (ELTE Geofizikai Tanszék), valamint Király Péter (KFKI Elméleti Csoport) közreműködéséért, akiknek lényeges szerepük volt abban, hogy a Téli Iskola túlmutt egy házi tanfolyam keretein és országos szinten az első lépés lehetett a kozmikus tudományok területén kialakítandó egységes szemlélet felé vezető úton.

Apróságnak tűnhet, de közelebből vizsgálva talán mégsem az: az egységes terminológia kérdése. Sajnálatos módon az a helyzet alakult ki, hogy a kozmikus tudományok területén dolgozó magyar kutatók sokszor használnak idegen (angol) kifejezéseket, hogy megértsék egymást. Gondoljunk a solar flare, guiding centre, pitch angle, drift stb. stb. szavakra, amelyeknek egységesen használt magyar megfelelője nincsen. Természetesen szó sem lehet arról, hogy szaknyelvünkben valamennyi idegen kifejezést magyarral helyettesítsünk, de fel kell lépünk az ellen az irányzat ellen, hogy minden új szakkifejezés, legyen az a legegyszerűbb fogalom, mint például a guiding centre vagy pitch angle, az idegen kifejezések számát szaporítsa. Nem eléggé céltudatosan, és nem eléggé következetesen, de egy-két kezdeményező lépést a Téli Iskola is tett az egységes magyar terminológia kialakítására. Főképp és elsősorban rádöbbsentette a résztvevőket arra, milyen sok idegen szót használunk feleslegesen, pedig egyértelmű, kifejező magyar szavunk is van rá. (Pl. rotál = forog, axiális = tengelyes vagy forgási, orbitális = pályamenti, perifériális = kerületi vagy felszíni stb. stb.)

Külön köszönet és elismerés illeti a Magyar Fizikai Folyóirat Szerkesztő Bizottságát, amiért helyt adott a Téli Iskola anyagának a folyóirat hasábjain. Ha a Téli Iskolának sikerült valamennyire is maradandó hatást kifejtenie a kozmikus tudományok hazai kutatásának fejlődésére, ebben nem kis része van annak az áldozatkészségnek, amivel a Magyar Fizikai Folyóirat Szerkesztősége az előadások anyagának maradandó formában történő közlésére vállalkozott, s annak a magas színvonalú kiadói és nyomdatechnikai munkának, amivel az Akadémiai Kiadó és a Szegedi Nyomda Vállalat dolgozói az anyag megjelentetését megvalósították.

Budapest, 1972. november 6.

Dr. Somogyi Antal

A NAP MÁGNESES TERE

MARIK MIKLÓS

Csillagászati Tanszék, Eötvös Loránd TE, Budapest

A csillagász számára a Nap a teljes napfogyatkozások alkalmával megfigyelhető napkorona széléig terjed. Ez két-három millió kilométer átmérőjű tartomány. A napszél felfedezése óta szokás azt mondani, hogy Földünk is a napkoronában kering, csillagászatilag azonban helytelen volna a napszelet is azonosítani még a Nappal. Ebben a cikkben a csillagászati értelemben vett Nap mágneses teréről lesz szó. Nem térünk tehát ki az interplanetáris mágneses tér tárgyalására.

I. A magnetohidrodinamika a csillagász szemszögéből nézve

Mint ismeretes, a magnetohidrodinamika az elektromos áramot jól vezető közegek hidrodinamikája. Elméletileg tehát olyan megoldásokat kell találni, amelyek a Maxwell-egyenleteket és a hidrodinamika egyenleteit egyidejűleg elégítik ki. A leg-egyszerűbb esetben a szokásos jelölésekkel a következő egyenleteket írhatjuk fel:

A Maxwell-egyenletek ($\mu = \varepsilon = 1$):

$$\text{rot } \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \underline{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}. \quad (1)$$

A jobb oldal második tagja az elektromos tér lassú változása miatt elhanyagolható.

$$\text{div } \underline{H} = 0 \quad (2)$$

$$\text{rot } \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\text{div } \underline{E} = 4\pi \varrho_e \quad (4)$$

Az Ohm-törvény:

$$\underline{j} = \sigma \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{H} \right). \quad (5)$$

A mozgásegyenlet:

$$\varrho \frac{d\underline{v}}{dt} = -\text{grad } p + \frac{1}{4\pi} \text{rot } \underline{H} \times \underline{H} + \underline{F} + \eta \Delta \underline{v} \quad (6)$$

ahol \underline{F} az összes térfogati erőket jelöli és η a kinematikai viszkozitás.

A kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div } (\varrho \underline{v}) = 0 \quad (7)$$

Az állapotegyenlet:

$$P = P(S, T), \quad (8)$$

a konkrét feltételeknek megfelelően.

A Maxwell-egyenleteket és a hidrodinamika egyenleteit a \underline{v} , illetve a \underline{j} csatolja egymással.

Mozdulatlan vezető közeg esetén ($\underline{v}=0$), (1)-ből és (5)-ből kaphatjuk, hogy:

$$\text{rot } \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \underline{j} = \frac{4\pi\sigma}{c} \underline{E}.$$

Az egyenletnek a rotációját képezve:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \underline{H} &= -\Delta \underline{H} = -\frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \underline{H}}{\partial t}, \text{ amiből} \\ \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} &= \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \underline{H} = v_m \Delta \underline{H}. \end{aligned} \quad (9)$$

A v_m mennyiséget a hidrodinamikai analógiák alapján *mágneses viszkozitás*nak nevezzük.

Ha a vizsgált, \bar{H} átlagos mágneses térrel rendelkező rendszer karakterisztikus mérete R , akkor jó közelítéssel:

$$\Delta \underline{H} \sim -\frac{\bar{H}}{R^2}.$$

Ezt (9)-be beírva, kapjuk:

$$\bar{H} = H_0 \exp \left\{ -\frac{v_m}{R^2} t \right\}. \quad (10)$$

A mágneses tér lecsengésének karakterisztikus ideje tehát:

$$t_0 \approx \frac{R^2}{v_m} = \frac{4\pi\sigma R^2}{c^2}.$$

A lecsengési idő különböző rendszerek esetében a következő:

Laboratórium:	$t_0 \ll 1$ sec
Nap:	$t_0 \approx 10^9$ év
Napfolt:	$t_0 \approx 100$ év
Galaxis:	$t_0 \gg$ a galaxis kora.

Mint a táblázatból látható, csillagászati plazmák esetén a lecsengést gyakorlatilag el lehet hanyagolni, részben a nagy vezetőképesség, részben a nagy méretek miatt.

Mozgó vezető esetében a (9) egyenlet helyett (1)-ből és (5)-ből a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial \underline{H}}{\partial t} = \text{rot} (\underline{v} \times \underline{H}) + v_m \Delta \underline{H}. \quad (11)$$

Csillagászati plazmák esetében a nagy vezetőképesség és a nagy méretek miatt

a $v_m \Delta H$ a $\text{rot}(\underline{v} \times \underline{H})$ mellett elhanyagolható, tehát (11) helyett a következő egyenletet használhatjuk:

$$\frac{\partial \underline{H}}{\partial t} = \text{rot}(\underline{v} \times \underline{H}). \quad (12)$$

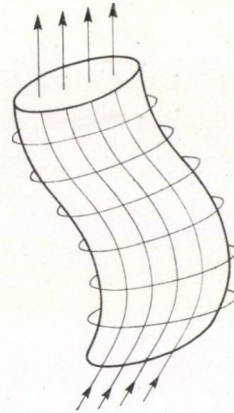
Más szavakkal: a csillagászati plazmák ideális plazmaként foghatók fel.

A (12) egyenlet segítségével könnyen bebizonyítható a *befagyás tétele*, amely a következőket mondja ki:

Ha kiválasztunk a plazmában egy s anyagkontúrt, amelyen belül a mágneses fluxus Φ , akkor a kontúr bármilyen mozgása esetén Φ változatlan marad.

Nyilván ez egy mágneses erővonalcsövet körülvevő minden kontúrra igaz (1. ábra), ami annyit jelent, hogy a mágneses erővonalcsövet mindig ugyanazok a folyadék-elemek határolják például úgy, mint a vizet egy gumicső. A befagyás tétele azt is jelenti, hogy anyagáramlás csak a mágneses erővonalak mentén történhet.

A plazma összenyomása a mágneses tér növekedését eredményezi. Gömbszimmetrikus, dipólus jellegű mágneses térrel rendelkező plazmatest (például csillag) összehúzódásakor a H mágneses tér és a ρ sűrűség között a $H \sim \rho^{2/3}$ összefüggés áll fenn.



1. ábra. Az erővonalcsöveket körülvevő anyagkontúrokon belül a mágneses fluxus változatlan marad. A befagyás tétele azt is jelenti, hogy az anyag és az erővonalak együtt mozog, és anyagáramlás csak az erővonalak mentén történhet

II. Mágneses erővonalcsövekre ható erők

A Napon gyakran megfigyelhetők mágneses erővonalcsövek, ezért érdemes áttekinteni az erővonalcsövek viselkedését.

A (6) egyenlet jobb oldalán tekintsünk el a nem mágneses jellegű erőktől. Ekkor:

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \underline{H} \times \underline{H} = \underline{f}_m. \quad (13)$$

Egy V térfogatú, T felületű plazmatestre ható \underline{F} erő a következőképpen írható:

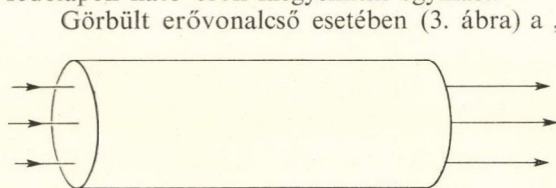
$$\underline{F} = \int_V \underline{f}_m dV = \int_T \left(\frac{1}{4\pi} \underline{H} H_n + \frac{H^2}{8\pi} \underline{n} \right) dt, \quad (14)$$

ahol H_n a \underline{H} normális irányú komponense és \underline{n} a dt felületelem normálisa.

$\frac{H^2}{8\pi} \underline{n}$ nyilván izotróp és nyomás jellegű mennyiség. Ezért ezt *mágneses nyomásnak* nevezzük.

Az $\frac{1}{4\pi} \underline{H} H_n$ felületi erőt először egy egyenes, homogén erővonalcső egy szeletére

alkalmazzuk (2. ábra). A henger palástján $H_n=0$, alap- és fedőlapján $\frac{1}{4\pi} H^2 a$ nagyságú erő hat, ahol a a henger keresztmetszetének felülete. Nyilván az alap- és fedőlapon ható erők kiegyenlítik egymást.



2. ábra. Görbületlen erővonalcső egy szeletére ható felületi erők eredője nulla

Gömbült erővonalcső esetében (3. ábra) a „paláston” H_n ismét 0, de az alap- és a fedőlapon fellépő erők már nem egyenlítik ki egymást; fellép egy olyan erő, amely az erővonalcsövet „kiegyenesíteni” igyekszik.

Az erővonalcsövek tehát hajlítással szemben erőt fejtenek ki.

Összenyomhatatlan plazma esetében, ha az erővonalcsövet megnyújtjuk, a cső keresztmetsze-

te csökken és ezért a mágneses térerősség megnövekszik benne. Könnyen látható, hogy egyenletes megnyújtás esetén

$$H = H_0 \frac{l}{l_0},$$

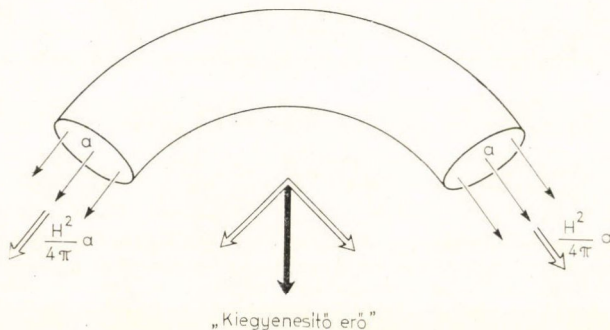
ahol a nulla index az eredeti mágneses térre és erővonalcsőhosszra utal.

A mágneses tér növelése egyben a mágneses nyomás növekedését is jelenti, ami annyit jelent, hogy az erővonalcső a nyújtással szemben is ellenállni törekszik.

Összenyomható plazma esetében, ha a megnyúlás egyenletes, akkor

$$\frac{H}{\varrho} \sim l.$$

A fentiekből kiviláglik, hogy a mágneses erővonalcsövek viselkedése bizonyos tekintetben hasonlít a gumiszálak viselkedéséhez. Ez a tény és a befagyás tétele lehetővé teszi, hogy a csillagászati plazmákban lefolyó mágneses jelenségeket szemléletesen tárgyalhassuk és fizikai hátterüket megérthessük. Természetesen ez a szemléletes tárgyalási mód csak iránymutató lehet és nem helyettesítheti a pontos matematikai tárgyalást.



3. ábra. Gömbült erővonalcső egy szeletére ható felületi erők eredője az erővonalcső görbülttségét „kiegyenesíteni” törekszik

Ismeretes, hogy plazmában különféle *hullámok* terjedhetnek. A legfontosabbak az Alfven-hullámok, amelyek tulajdonképpen a mágneses erővonalak rezgései és

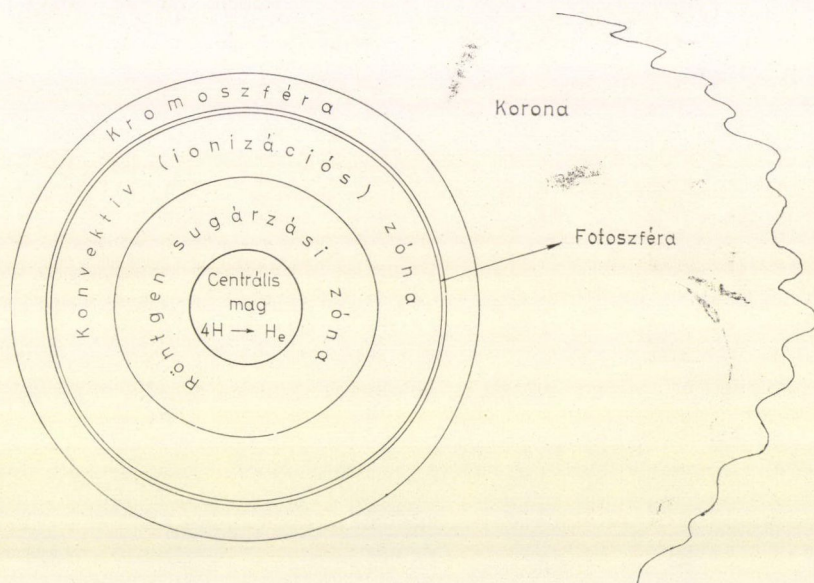
$V_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}$ sebességgel terjednek. A hidrodinamikában nincs megfelelőjük.

A hanghullámokkal vannak rokonságban a gyors és lassú magnetoakusztikus hullámok.

III. A Nap mágneses jelenségei

A Napot szokás a „Nap belsejére” és a „Nap légkörére” osztani.

A Nap belsejében a legelső rész a *centrális mag* (4. ábra), amelyben a $4H \rightarrow He$ fúzió játszódik le. Itt a sűrűség kb. 100 g/cm^3 , a hőmérséklet kb. $15 \cdot 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$.



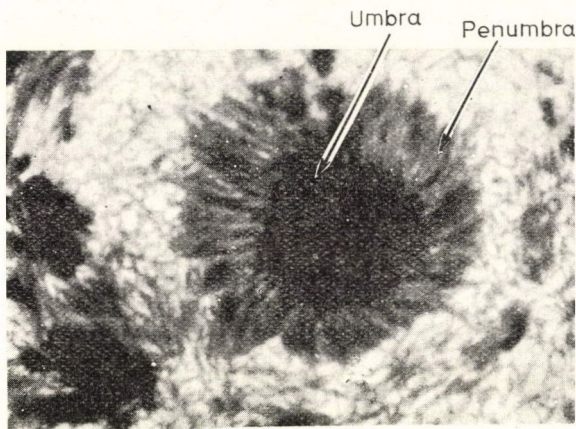
4. ábra. A Nap metszete. A Nap belseje három rétegből áll, a centrális magból, a röntgensugárzási zónából és a konvektív zónából. A légkör rétegei: a fotoszféra, a kromoszféra és a korona

A centrális magot a *röntgensugárzási zóna* veszi körül, amely a magban keletkező energiát sugárzás formájában továbbítja a hidegebb külső tartományok felé.

A Nap felszíne alatt $100\,000 \text{ km}$ -re kezdődik a *konvektív zóna*, amelyben a hidrogén és hélium ionizációja miatt konvektív instabilitás lép fel és az energiatranszportot a konvektív áramlások szolgáltatják. A Prandtl-féle turbulenciaelmélet alapján kimutatható, hogy a zóna alján mintegy $40\,000 \text{ km}$ karakterisztikus méretű konvektív turbulenciaelemek alakulnak ki, amelyek a saját méretüknek megfelelő út megtétele után szétesnek és hőfeleslegüket átadják a környezetüknek. Természetesen lefelé mozgó hideg turbulenciaelemek is kialakulnak, amelyek az alsóbb rétegekben szétesve hőt vonnak el a környezettől. A konvektív zóna tetején a turbu-

lenciaelemek már sokkal kisebbek, méretük mindössze 500—1000 km. A konvektív zónában tehát az anyag turbulens mozgása történik, ami a Nap mágneses terére is hatással van.

A naplégkör legalsó tartománya a *fotoszféra*, amit szokás néha a Nap felszínének is nevezni. Ebben a 4—500 km vastag rétegben reemittálódik a hozzánk érkező napsugárzásnak legalább a 90%-a. A fotoszféra hőmérséklete 6000° , sűrűsége 10^{-8} g/cm³.



5. ábra. Egy jellegzetes napfolt. A belső sötétebb rész az umbra, az azt körülvevő világosabb a penumbra

A fotoszféra nem egyenletesen fényes; 500—1000 km nagyságú fényesebb foltok láthatók sötétebb háttér előtt. Ez a *granulációs szerkezet*, amely tulajdonképpen a konvektív zóna felső széle.

Ugyancsak a fotoszférában figyelhetők meg a *napfoltok*. Egy egyedi napfolt (5. ábra) kb. 10 000 km átmérőjű és hőmérséklete kb. 4500° , tehát 1500° -kal alacsonyabb hőmérsékletű, mint a fotoszféra. Két részből áll: a sötétebb umbrából és az ezt körülvevő szálak szerkezetű penumbrából. Élettartamuk 1—2 hét. A napfoltokban mindig

1000—3500 gauss erősségű mágneses teret lehet kimutatni. A mágneses erővonalak nagyjából a felszínre merőlegesek. A napfolt tehát nem más, mint egy erővonalcsőnek a fotoszférával való metszete.

A napfolt többek között azért is alacsonyabb hőmérsékletű, mint a fotoszféra, mert az erős mágneses tér a befagyás tétele miatt a folt alatt leállítja a turbulens konvektív mozgást és így megszűnik az energiatranszportnak ebben a rétegben leg-

hatékonyabb formája. A napfolt mágneses terének $\frac{H^2}{8\pi}$ mágneses energiasűrűsége

ugyanis lényegesen nagyobb, mint a konvektív mozgás $\frac{\rho v^2}{2}$ energiasűrűsége.

A foltok általában foltcsoportokban jelennek meg. A foltcsoportok többsége egy határvonallal két részre bontható. Az egyik részben északi, a másikban déli polaritású foltok találhatók. Az ilyen foltcsoportokat *bipoláris foltcsoportoknak* nevezzük. A foltcsoportok felett a mágneses erővonalak a 6. ábrának megfelelően húzódnak. Egy bipoláris foltcsoport tulajdonképpen nem más, mint egy mágneses erővonal-köteg kitüremlése a fotoszféra fölé. Néha megfigyelhetünk unipoláris és multipoláris foltcsoportokat is, amelyeknél az erővonal-köteg kitüremlése nem olyan egyszerű, mint a bipoláris foltcsoportok esetében.

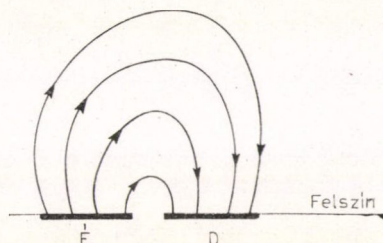
A Napnak foltokkal való fedettségét a Wolf-féle *relatív számmal* mérjük:

$$R = k(10g + f), \quad (15)$$

ahol f a Napon megfigyelhető összes foltok száma, g a foltcsoportok száma és k a megfigyelő műszerre jellemző állandó. Mint ismert, R átlagosan 11,2 éves periódussal változik. A két minimum között eltelt időt napfoltciklusnak nevezzük.

Egy napfoltciklus alatt a foltok nem ugyanazon a helyen keletkeznek. A foltciklus elején a *foltok keletkezési zónája* a Nap egyenlítőjétől mintegy $\pm 30^\circ$ -ra helyezkedik el és a ciklus folyamán egyre inkább húzódik az egyenlítő felé. A ciklus végén mintegy $\pm 5^\circ$ -ra közelítik meg az egyenlítőt.

Rendkívül érdekes a bipoláris foltcsoportok mágneses viselkedése. A bipoláris foltcsoport két mágnesesen ellentétes polaritású területe közül azt, amelyik a Nap forgása következtében „elől” halad, vezető foltnak, a „hátnál” haladót követő foltnak nevezzük. Egy cikluson belül és a Nap ugyanazon (mondjuk északi) féltekéjén a vezető foltok polaritása mindig ugyanolyan (mondjuk déli). Ugyanazon ciklus alatt a déli féltekén a vezető foltok polaritása mindig északi, a követő foltoké mindig déli. A két féltekén tehát a bipoláris foltcsoportok mágneses szempontból ellentétes irányításúak. A következő ciklusban a két félteke szerepe megcserélődik: az északi féltekén a vezető foltok északi, a követő foltok déli polaritásúak lesznek, míg a déli féltekén a vezető foltok déli, a követő foltok pedig északi polaritásúak lesznek. Mágneses szempontból tehát két egymást követő ciklus nem egyenértékű. Éppen ezért, helyesebb 11 év helyett 22 éves napfoltciklusról beszélni.



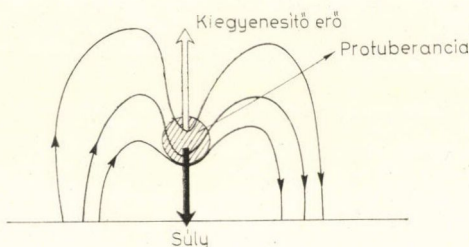
6. ábra. A mágneses erővonalak sematikus lefutása egy bipoláris napfoltcsoport felett

A *fáklyamezők* a fotoszféra és a felette elhelyezkedő réteg, a kromoszféra határán megfigyelhető világosabb, a fotoszféránál mintegy 300° -kal magasabb hőmérsékletű tartományok. Mindig foltcsoportokkal vannak kapcsolatban. A fáklyamezők helyén a mágneses térerősség kb. 50 gauss, ami hozzávetőlegesen egy nagyságrenddel múlja felül a Nap általános mágneses terének térerősségét. Ellentmondásnak tűnik, hogy a foltok erős mágneses tere a fotoszféra lehűléséhez vezet, az annál két nagyságrenddel kisebb mágneses tér viszont a hőmérséklet növekedését eredményezi a fáklyamezőkben. Ez az ellentmondás azonban csak látszólagos. A gyengébb mágneses tér energiasűrűsége nem elég ahhoz, hogy a konvekciót leállítsa, de már elegendő a kisebb méretű turbulenciaelemek leállítására. Így az anyag turbulens viszkozitása csökken, a konvektív energiatranszport hatékonysága megnövekedik.

A fotoszféra felett a mintegy 10 000 km vastag *kromoszféra* helyezkedik el. A kromoszféra hőmérséklete mintegy $10\,000^\circ$, sűrűsége átlagban 10^{-13} g/cm³. Megfigyelése teljes napfogyatkozásokon kívül csak az erős abszorpciós vonalak (pl. H α) hullámhossztartományán belül áteresztő szűrőrendszerek segítségével lehetséges. Egyébként a fotoszféra fénye teljesen elnyomja. Magas hőmérséklete a konvektív zónában keletkező magnetoakusztikus zaj fűtőhatásának tulajdonítható. Ezt látszik bizonyítani az a tény is, hogy a napfoltok felett hiányzik a kromoszféra, feltehetően azért, mert a napfoltok mágneses tere leállítja a konvekciót.

A kromoszférában és részben fölötte figyelhetők meg a *protuberanciák*, vagy más néven filamentek. Ezek a fotoszféra fölé nyúló, környezetüknél mintegy 100-szor sűrűbb, 100 000 km karakterisztikus méretű gázhidak. A protuberanciákat két nagyobb osztályba lehet sorolni, ezek a „folt típusú” és a „nyugodt” protu-

beranciák. Mindkét típus keletkezésénél a főszerepet természetesen a mágneses tér játssza. A nyugodt protuberanciák esetében a protuberancia anyagát (7. ábra) a Nap felszíne fölé kitüremelő mágneses erővonalkötegek tartják vissza a fotoszférába való beeséstől. A görbült erővonalkötegek „kiegyenesítő ereje” tart egyensúlyt a protuberancia súlyával. A mágneses tér megfelelő konfigurációja esetén mindig



7. ábra. A mágneses tér struktúrája egy „nyugodt” protuberancia fölött. A protuberancia tengelye a papír síkjára merőleges

protuberancia jön létre. Ennek egyik bizonyítéka az, hogy egyes protuberanciák felrobbanása után néhány nap múlva az eredetihez hasonló újabb protuberancia jön létre a régi helyén.

A naptevékenység földi hatásai szempontjából a legfontosabbak a szintén a kromoszférában megjelenő *flerek*. A megfigyelő csillagász szemszögéből nézve a flerek: kifényesedések a kromoszférában. Mindig foltcsoportok környezetében figyelhetők meg, tehát kialakulásukban nyilván a mágneses tér játszik szerepet.

Leggyakrabban bonyolult mágneses szerkezetű multipoláris foltcsoportokban jelennek meg és felvillanásuk a mágneses tér szerkezetének megváltozásával jár együtt.

Legjobban H α emisszióban figyelhetők meg, de a nagyobb flerek néha „szabad szemmel”, tehát szűrő nélkül is láthatók.

A flerek területének nagyságára a Ball-szám jellemző*. A táblázatban a különböző Ballokhöz tartozó területeket adjuk meg.

Ball	Terület a napfelület 10 ⁻⁶ -szorosában mérve
1 –	< 100
1	100–250
2	250–600
3	600–1200
3 +	> 1200

Ha az 1, 2 Ball-számok után + jelet írunk (például 2+), akkor ez az átlagosnál fényesebb flert jelent.

A flerek Ball szerinti eloszlása átlagosan a következő:

1:90 %, 2:8 %, 3:0,8 %.

Megjelenésük gyakorisága szoros összefüggésben van a napfolt relatív számával. Durva közelítéssel az egy nap alatt megfigyelhető 1-nél nem kisebb Ball-számú flerek száma:

$$\frac{R}{25}$$

A flerkitörések időtartama függ a ballszámtól, az 1 ballosok átlagosan 20 percig, a 3+ ballosok 3 óráig tartanak. A fényességnövekedés gyorsan, általában néhány perc alatt megy végbe, amit viszonylag lassabb fényességcsökkenés követ.

A flerek sugárzása nem-termikus jellegű. Különösen a rádió, az ultraibolya és röntgen tartományban növekszik meg a kisugárzás a flerekben.

* Újabban másfajta osztályozást is használnak.

A flerkitörések alkalmazásával főleg elektronok dobódnak ki a Napból, de nagyobb flerkitörések alkalmával a kozmikus sugárzás növekedése is észlelhető. A kozmikus protonokat kibocsátó flereket *proton-flerek*nek nevezzük, amelyek nemzetközi kooperációban történő tanulmányozása (Proton Flare Project) azért is fontos, mert a geofizikai hatásokon kívül közvetlen biológiai hatásuk is van. Ez többek között a szívinfarktus következtében beálló halálesetek számának ugrás-szerű emelkedésében mutatkozik proton-fleres napokon.

Egy közepes fler által kisugárzott többletenergia mintegy 10^{30} erg.

A flerekkel egy időben, de nem mindig a fler helyén néha anyagkidobódást figyelhetünk meg. Ez az anyag többnyire visszahullik a Napra.

A flerek keletkezésének kielégítő elméletét még nem sikerült megalkotni. Tény, hogy mágneses energiának sugárzási energiává való átalakulása történik a flerekben. A bonyolult mágneses konfigurációban valószínűleg instabilitás jön létre, amely vertikális irányú, kisüléshez hasonlítható elektromos áram hirtelen megindulásához vezet.

A *napkorona* változó nagyságú, karakterisztikus mérete 10^6 kilométer. Sűrűsége kb. 10^{-16} g/cm³, hőmérséklete pedig mintegy 10^6 °K. A koronának a pólusok környékén látható szálak szerkezete feltehetően a Nap dipólus-terének mágneses erővonalait rajzolja ki. A korona magas hőmérséklete a magnetohidrodinamikai (főképp Alfven-) hullámok fűtésének tulajdonítható.

IV. A Nap mágneses terének modellje

Az előző fejezetben említett napjelenségek mindegyike mágneses jellegű. Érthető tehát az a régi törekvés, hogy ezeket egységes elmélet kereteiben kívánják tárgyalni. Sajnos minden részletében tökéletes elmélet még nem született.

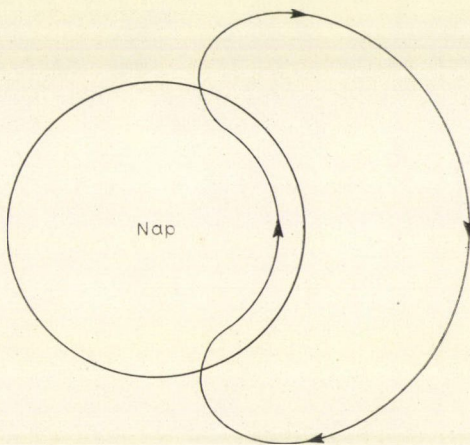
Az utóbbi években történt újabb próbálkozások ellenére még ma is a Babcock-féle „napfoltelmélet” tudja a legjobban visszaadni azt a képet, amit a Napon megfigyelhetünk. A következőkben éppen ezért a Babcock-féle elmélet lényegét kívánjuk ismertetni.

A 8. ábrán látható mágneses struktúrából indulunk ki. A mágneses erővonalak a Nap felszínéhez közel húzódnak és a Nap környezetében „dipólus jellegű” teret alkotnak. Arra, hogy a Napnak van ilyen tere, a koronaszálak tanulmányozásából is következtethetünk.

A Nap differenciálisan forog, ami annyit jelent, hogy a szögsebesség az egyenlítőtől mért φ heliografikus szélesség függvénye:

$$\omega = 14^\circ, 38 - 2^\circ, 77 \sin^2 \varphi,$$

ahol ω -t fok/nap-ban mérjük.



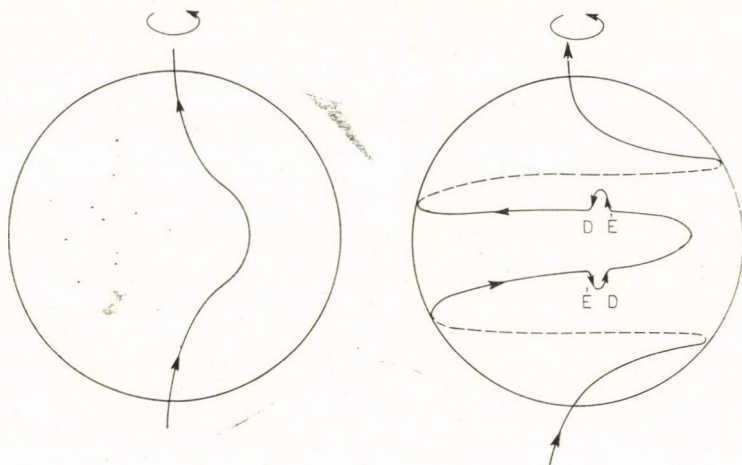
8. ábra. A Nap általános mágneses terének sematikus képe a napciklus elején

A differenciális forgás és a befagyás törvényének következtében a mágneses erővonalak (erővonalcsövek) a 9. ábrán látható módon feltekerednek a Napra. Ha az eredeti „dipólus jellegű” tér erősségét a felszín alatt H_0 -nak vesszük, akkor kiszámítható a feltekeredés következtében megnyúlt és felerősödött mágneses erővonalakötegekben levő H_φ térerősség mint az idő és a φ heliografikus szélesség függvénye:

$$H_\varphi = 35,2 t H_0 \sin \varphi, \quad (16)$$

ahol a t időt években mérjük.

A mágneses térerősség növekedésével az erővonalcsőben növekszik a mágneses nyomás is. Mivel az össznyomás állandó marad, a hőmérsékletnek csökkennie kell. A hőmérséklet azonban egy bizonyos határ alá nem süllyedhet az erővonalcsőben,



9. ábra. A differenciális rotáció és a befagyás tétele miatt az erővonalak feltekerednek a Napra. Így jön létre egy egyre erősödő közel torroidális-mágneses tér, amelyből a foltok keletkeznek

mert sugárzás útján az anyag a környezettől energiát kap. Így, szükségszerűen, egy idő múlva a sűrűségnek kell csökkenni. A sűrűségnek elegendő mérvű csökkenése esetén a fellépő felhajtóerő már le tudja győzni a mágneses erővonalaköteg ellenállását és a cső mintegy kibuggyan a Nap felszíne fölé. Babcock úgy találta, hogy ahhoz, hogy ez a felbuggyanás $\pm 30^\circ$ -nál megtörténjék, az erővonalaknak előzőleg már három évig kellett feltekeredniök, és a kibuggyanás helyén a mágneses térerősségnek 264 gaussra kellett megnövekednie.

A (16) képletbe tehát H_φ helyébe 264-et, t helyébe $n+3$ -at írva kiszámítható a napfoltok keletkezési zónájának helye az években mért n idő függvényeként. A számítások szerint

$$\sin \varphi = \pm \frac{1,5}{n+3},$$

ami kitűnő egyezésben van a napfoltkeletkezési zónák megfigyelt mozgásaival.

Tekintettel arra, hogy a Nap két féltékén az erővonalak a felgombolyodás miatt ellentétes irányításúak, nyilvánvaló, hogy mágneses szempontból nézve az

északi és déli féltekén a vezető és követő foltok ellentétes sorrendben helyezkednek el, vagyis éppen úgy, ahogy megfigyeljük őket.

A Babcock-féle elmélettel tehát a napfoltok lényeges tulajdonságait egy napcikluson belül kielégítő módon meg lehet magyarázni. A két ciklus közötti átmenettel kapcsolatban már nem mondhatjuk el ugyanezt. Elvileg megadható olyan mechanizmus, amely a felgombolyodott teret ismét dipólus jellegű térbe viszi vissza, sőt az is belátható, hogy ez a dipólus jellegű tér a kiinduló térrel ellentétes irányítású lesz, a részletek azonban még nincsenek tökéletesen tisztázva. Főleg a mágneses tér átfordulásához szükséges idő adódik az elméleti számítások alapján túl nagyra.

IRODALOM

1. *T. G. Cowling*: Magnetohydrodynamics, Interscience Publ. Inc; 1957, 5. old.
2. *С. Б. Пикельнер*: Основы космической электродинамики, Наука; 1966, 78. old.
3. *W. Thomson*: Bevezetés a plazmafizikába, Műszaki Könyvkiadó; 1970, 97. old.
4. *J. C. Brandt, P. W. Hodge*: Solar System Astrophysics, Mc Graw-Hill Co.; 1964, 79. old.
5. *R. Bray, R. Loughhead*: Sunspots, Chapman and Hall; 1964.
6. *Kálmán Béla*: A napkitörések, Csillagászati Évkönyv 1972, Gongolat; 1972. 279. old.
7. *H. W. Babcock*: The Topology of Sun's Magnetic Field and the 22-year cycle, Astrophysical J. 133. 572. 1961.

A KOZMIKUS SUGÁRZÁS TERJEDÉSE A NAPRENDSZERBEN

KÓTA JÓZSEF

MTA Központi Fizikai Kutató Intézet, Budapest

1. Bevezetés
 2. A konvekciós-diffúziós elmélet
 - 2.1 Az interplanetáris tér szerkezete
 - 2.2 A konvekciós-diffúziós egyenlet
 - 2.3 A terjedést leíró általános egyenletek
 3. A terjedési egyenletek közelítő megoldásai
 - 3.1 Az anizotróp diffúzió hatása
 - 3.2 Elektrosztatikus tér modell
 - 3.3 Konvekció-domináns terjedés
 4. Fler-jelenségek
 5. Forbush-csökkenés
- Függelék

1. Bevezetés

A kozmikus sugárzás intenzitásváltozásainak elmélete meglehetősen rövid multra tekinthet vissza, és főképp az utolsó évtizedben indult gyors fejlődésnek. Amikor az 1920-as években megkezdődött a kozmikus sugárzás rendszeres vizsgálata, a figyelem a Föld magnetoszféráján és az atmoszférán áthatoló nagy energiájú sugárzás tanulmányozása felé fordult. A földfelszínen megfigyelhető sugárzás zömét a naprendszerbe kívülről, a galaxisból behatoló, főképp protonokból, kisebb részben pedig nehezebb magokból és elektronokból álló részecskesugárzás kelti. A galaktikus eredetű részecskék energiája 10^8 eV-tól egészen 10^{20} eV értékig változhat, a földpálya mentén az átlagos részecskeenergia 2–3 GeV, míg a sugárzás átlagos energiasűrűsége 5×10^{-13} erg/cm².

A mérések az 1940-es évekig az intenzitásváltozások két jellemző fajtáját mutatták ki. A periodikus (11 éves, 27 napos, 1 napos) változások mellett tranziens változásokat, az ún. Forbush-csökkenéseket találtak, amikor az intenzitás hirtelen 5–10%-os csökkenését lassú relaxáció követte. A változások közös szembevető sajátossága volt, hogy erősen és negatív módon korrelációt mutattak a naptevékenység változásával, ami kézenfekvővé tette, hogy a Nap modulálja a kozmikus sugárzás intenzitását. A modulációs mechanizmus megértését azonban csak az interplanetáris tér szerkezetének megismerése tette lehetővé, amelyhez az űrben végzett közvetlen mérések voltak szükségesek. Az űrszondák által szolgáltatott eredményekre támaszkodva alapozta meg *Parker* az 1960-as évek elején a konvekciós-diffúziós elméletet, amely szerint a kozmikus sugárzás változásában az interplanetáris teret kitöltő, a Naptól származó részecskeáramban, a napszélben végbemenő folyamatok tükröződnek.

A Napból származó korpuszku-láris sugárzás két jól elkülöníthető csoportra osztható. Először 1940 körül észlelték, hogy nagy flerek idején a Nap protonokat bocsát ki, ami a kozmikus sugárzási intenzitás növekedéséhez vezet. Ezt a sugárzást, a galaktikustól megkülönböztetendő, szoláris kozmikus sugárzásnak is nevezik. A fler-protonok energiája többnyire $10^7 - 10^9$ eV között változik, ritka esetekben elérheti a 10^{10} eV energiát is. A földpálya mentén a fler-protonok energiasűrűsége rövid időtartamra 10^{-9} erg/cm³ értéket érhet el.

A szoláris kozmikus sugárzás mellett létezik még egy, a Napból állandóan folyamatosan kifelé terjedő részecskeáram, a napszél. A napszél közel egyenlő számú protonból és elektronból álló plazma ($10 - 20$ proton/cm³), amely $300 - 500$ km/sec sebességgel radiálisan kifelé terjed. Noha a napszélben az egyes protonok energiája csekély, keV nagyságrendű, a földpálya mentén az átlagos energiasűrűség azonban eléri a 10^{-8} erg/cm³ értéket, ami lényegesen meghaladja mind a szoláris, mind a galaktikus kozmikus sugárzás energiasűrűségét. Így kézenfekvő, hogy az interplanetáris térben lejátszódó folyamatokban a napszél mondja ki a döntő szót.

Parker elmélete szerint a kifelé terjedő napszél mintegy kiszorítja a Nap környezetéből a galaktikus sugárzást. Fokozott naptevékenység idején a napszél kifelé seprő hatása erősebb, ami — a kísérleti eredményeknek megfelelően — a galaktikus sugárzás csökkenését eredményezi.

Noha *Parker* modellje első, legegyszerűbb formájában több finomításra szorult, a konvekciós-diffúziós elmélet lényege ma is általánosan elfogadottnak tekinthető. Az elmélet mai állása szerint a kísérleti eredmények egységes képbe foglalhatók és kvalitatívan jól megmagyarázhatók, habár nem mindig beszélhetünk pontos szám-szerű egyezésekről az elméleti számítások és a kísérleti adatok között.

2. A konvekciós-diffúziós elmélet

2.1. Az interplanetáris tér szerkezete

Az interplanetáris teret kitöltő napszél-plazma ideális vezetőnek tekinthető, amelyre igaz a mágneses fluxus befagyásának tétele [1]. A mágneses erővonalak így, az anyagot követve, arhimédeszi spirál alakban felcsavarodnak a forgó Nap köré. (Hasonló a helyzet, ha a forgó locsolóból kiáramló vízsugár pályáját vizsgáljuk. Noha az egyes vízcseppek radiálisan kifelé haladnak, a vízsugár arhimédeszi spirál alakot ír le.) A mágneses tér irányának ismeretében, a tér divergenciamentességét felhasználva, kiszámítható a térerősség vektor. A számítást elvégezve, a térerősség vektor komponenseire gömbi polárkoordinátákban (a polártengely a Nap mágneses egyenlítőjére merőleges) a következő kifejezések adódnak [2]:

$$B_r(r, \theta, \varphi) = B_0 \left(r_s, \theta, \varphi - \frac{r - r_s}{V} \right) \cdot \frac{r_s^2}{r^2}$$

$$B_\theta(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (2.1.1)$$

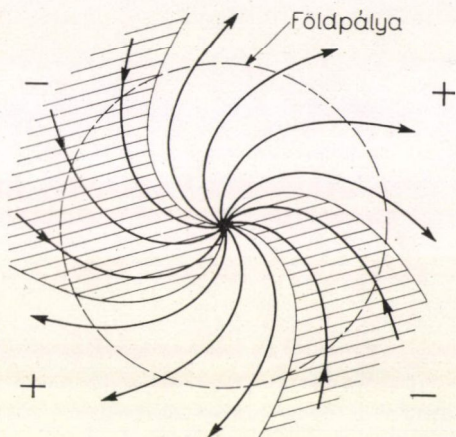
$$B_\varphi(r, \theta, \varphi) = -B_0 \left(r_s, \theta, \varphi - \frac{r - r_s}{V} \right) \frac{r_s^2 \Omega}{Vr} \sin \theta.$$

r_s a Nap sugara, V a napszél sebessége, $\Omega = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$ a Nap forgási sebessége, B_0 pedig a mágneses tér erőssége a napfelület azon pontján, ahol a szóban forgó erővonal eléri, vagy elhagyja a Nap felületét. A mágneses tér és a radiális irány által bezárt ψ szögre a

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r\Omega}{V} \quad (2.1.2)$$

összefüggés adódik.

A mérések azt mutatják, hogy a bolygóközi mágneses tér szektorokra oszlik, aszerint, hogy az erővonalak iránya a Nap felé, vagy az ellentétes irányba mutat [6, 7]. A szektor-szerkezet megnyugtató igazolásához azonban még további mérések szükségesek.



1. ábra. A mágneses erőter szerkezete az ekliptika síkjában. Az erővonalak szektoronként váltakozva kifelé, illetve befelé irányulnak

Az 1. ábra az ekliptika síkjában uralkodó viszonyokat mutatja. Ez a $\theta \approx 90^\circ$ értéknek felel meg, mivel a Nap mágneses egyenlítője és az ekliptika síkja közelítőleg egybeesik. A mágneses térerősség a Nap felszínén 1 Gauss nagyságrendű, ebből a földpálya mentén $\sim 5\gamma$ térerősség adódik, ami jól egyezik a mérési adatokkal. A földpálya mentén a mágneses tér körülbelül 45° -os szöget zár be a radiális irányval.

A mozgó plazma a mágneses tér mellett elektromos teret is kelt. A plazma közel végtelen vezetőképessége miatt a plazmára ható Lorentz-erőnek el kell tűnnie. Ebből az elektromos térre

$$\vec{E} = -\vec{V} \times \vec{B} \quad (2.1.3)$$

adódik. A fénysebességet itt és a későbbiekben is egységnyiinek vesszük. (2.1.1)-

ből és (2.1.3)-ból látható, hogy a mágneses tér az ekliptika síkjában van, míg az elektromos tér merőleges az ekliptika síkjára.

A valóságban a fent leírt mágneses térre a napszél egyenetlen terjedése miatt létrejövő turbulenciák és plazmainstabilitások következtében különféle perturbációk rakódnak. A keletkező mágneses irregularitások a napszéllel együtt radiálisan kifelé haladnak. Az interplanetáris mágneses tér durván az ideális tér és a kifelé haladó mágneses irregularitások szuperpozíciójaként képzelhető el. A konvekciós-diffúziós modell szerint a töltött kozmikus sugárzási részek a mágneses irregularitásokkal ütközve szóródnak. A napszél egyes alkotórészeivel való ütközés valószínűsége elenyészően csekély, a kozmikus sugárzás csak a plazma által létrehozott elektromágneses téren keresztül lehet kölcsönhatásban a napszéllel.

Mind az elméleti becslések, mind a kísérleti adatok szerint a mágneses irregularitások mérete 0,001–0,1 AU között változik. Ha az irregularitás mérete eléri a kozmikus sugárzási részecske Larmor-sugarát, akkor az irregularitáson áthaladva a részecske iránya random módon megváltozik, a szórás az irregularitással, vagyis a napszéllel együtt mozgó rendszerben izotróp lesz. Ha az irregularitás mérete kicsi a Larmor-sugárhoz képest, akkor több egymást követő irregularitáson való szóródásra van szükség ahhoz, hogy a részecske „elfelejtse” eredeti irányát. (Egy nagy-

ságrendet érzékeltető adat: 5γ erősségű térben az 1 GeV energiájú proton Larmor-sugara 0,07 AU.)

A mágneses tér eltérítő hatása a töltött részecske mágneses merevségétől függ. (Mágneses merevségnek a $P=pc/Ze$ mennyiséget nevezik, ahol p az impulzus, Z a rendszám, e az egységnyi elektromos töltés.) Ha a részecske merevsége nagy, akkor a mágneses tér alig befolyásolja a részecske mozgását (a Larmor-sugár arányos a merevséggel, és fordítva arányos a mágneses térerősséggel). Az ütközési szabad úthossz kvalitatív merevségfüggésének vizsgálata céljából Parker az irregularitásokat két nagy csoportra osztotta [3]. „Vastag” irregularitásoknak nevezzük azokat, amelyek jellemző mérete meghaladja a részecske Larmor-sugarát, míg a Larmor-sugárnál lényegesen kisebb méretűek a „vékony” irregularitások.

Vastag irregularitáson szóródva a részecske izotróp módon szóródik, a szórási szabad úthosszra

$$\frac{1}{\lambda_1} \approx N_1 l_1^2 \quad (2.1.4a)$$

adódik, ahol λ_1 a szabad úthossz, N_1 és l_1 a vastag irregularitások sűrűsége, illetve karakterisztikus mérete.

„Vékony” irregularitáson szóródva a részecske $\Delta\theta \approx l_2/R$ átlagos szögeltérülést szenved. (l_2 a vékony irregularitások jellemző mérete, R a részecske Larmor-sugara.) Egymást követő n számú ütközés után az átlagos szögeltérés $\Delta\theta_n \approx \sqrt{n} \Delta\theta$ lesz, mivel az egyes ütközések egymástól függetlenek. Ahhoz, hogy a részecske „teljesen” szóródjon, a $\Delta\theta_n$ átlagos szögeltérülésnek az egységnyi nagyságrendet kell elérnie, vagyis mintegy $n \approx (R/l_2)^2$ számú ütközésre van szükség. Így a vékony irregularitáson való szóródás esetén az ütközési szabad úthosszra

$$\frac{1}{\lambda_2} \approx \frac{1}{n} N_2 l_2^2 \approx N_2 l_2^2 / R^2 \quad (2.1.4b)$$

adódik, ahol λ_2 a szabad úthossz, N_2 a vékony irregularitások sűrűsége az interplanetáris térben.

A fenti durva kép alapján megállapítható az ütközési szabad úthossz kvalitatív merevségfüggése. Kis merevségű részek számára minden irregularitás „vastag”, így az ütközési szabad úthossz kis merevségre (2.1.4a) szerint a merevségtől közel független. Ezzel szemben a nagy merevségű részecske minden irregularitást „vékonynak” érez, ezért (2.1.4b) alapján az ütközési szabad úthossz nagy merevségre a merevség négyzetével növekszik. A vastag és vékony irregularitásokra való felosztás igen durva közelítő kép, a valóságban a helyzet a két szélsőséges eset között van. A mérések szerint az ütközési szabad úthossz kis merevségre ($\lesssim 0,1$ GV) valóban közel állandó, míg a 0,1—10 GV tartományban a merevséggel egyenesen arányos [8]. (A merevség szokásos egysége a Volt, illetve ennek nagyobb egységei MV, GV, stb.)

A szabad úthossz merevségfüggésének vizsgálatára pontosabb statisztikus elméleteket dolgoztak ki [9], amelyek azt mutatják, hogy a vázolt szórási mechanizmus helyes fizikai képet ad.

Az elmélet bizonytalan pontjának az a feltevés tekinthető, hogy a szórás valóban izotróp-e az irregularitással együtt mozgó rendszerben, vagy a mágneses tér iránya esetleg kitüntetett szerepet játszhat. Az izotrópiától való esetleges eltérések azonban csak a finomabb jelenségekben (pl. a félnapos periodicitás) okoznának lényeges változásokat.

2.2. A konvekciós-diffúziós egyenletek

A konvekciós-diffúziós elmélet szerint a kozmikus sugárzási részecskék árama két részből tevődik össze. Egyrészt a \vec{V} sebességgel kifelé mozgó mágneses irreguláritások igyekeznek magukkal ragadni a kozmikus sugárzási részeket, ebből adódóan fellép egy kifelé irányuló konvekciós áram. Másrészt viszont az így létrejövő sűrűség-gradiens egy diffúziós áramot eredményez, amely a nagyobb sűrűségű helyekről a kisebb sűrűség irányában folyik, vagyis [10]

$$\vec{S}(\vec{r}, v) = -\kappa \text{grad } U(\vec{r}, v) + U(\vec{r}, v)\vec{V}, \quad (2.2.1a)$$

ahol $\vec{S}(\vec{r}, v)$ a v sebességű részek áramsűrűsége az \vec{r} helyen, $U(\vec{r}, v)$ a részecske-sűrűség, $\kappa = \lambda v/3$ a diffúziós együttható, V pedig a napszél sebessége. Ugyanakkor a részecskeszám megmaradását a kontinuitási egyenlet biztosítja

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div } \vec{S} = 0. \quad (2.2.1b)$$

A fenti (2.2.1a,b) egyenleteket, amelyek az egyszerű elmélet alapegyenleteit képezik, konvekciós-diffúziós egyenleteknek nevezzük.

Az U és az \vec{S} mennyiségek lényegében a sűrűségfüggvény momentumai. A kozmikus sugárzási részecskék sűrűségfüggvényét $f(\vec{r}, \vec{v})$ -vel jelölve, vagyis ha $f(\vec{r}, \vec{v})d^3\vec{r}d^3\vec{v}$ a $d^3\vec{r}d^3\vec{v}$ térfogatban található részecskék száma, akkor az U részecskeszám és az \vec{S} áram az

$$\begin{aligned} U(\vec{r}, v) &= \int f(\vec{r}, \vec{v}) v^2 d\Omega \\ \vec{S}(\vec{r}, v) &= \int \vec{v}(\vec{r}, \vec{v}) v^2 d\Omega \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

relációkkal fejezhető ki, ahol $\int d\Omega$ irányra való integrálást jelent a sebességtérben. Gyakran használatos mennyiség a

$$\vec{\zeta}(\vec{r}, v) = \frac{3\vec{S}}{vU} \quad (2.2.3)$$

anizotrópia-vektor, amelynek iránya kijelöli a maximális részecskefluxus irányát, nagysága pedig a maximális és minimális fluxus különbségének és összegének hányadosával egyenlő. Megjegyezzük, hogy az anizotrópia-vektor (2.2.3) szerinti felírása csak abban az esetben érvényes, ha az $f(\vec{r}, \vec{v})$ sűrűségfüggvény elsőnél magasabb rendű momentumai elhanyagolhatók, vagyis ha a sűrűségfüggvény gömbfüggvények szerinti kifejtésében az elsőrendű tagok után megállhatunk. A valószínűségben előforduló esetek nagy részére ez a feltétel teljesül.

Vizsgáljuk a galaktikus eredetű részek modulációját stacionárius egyensúlyi körülmények között. Az előforduló változások ugyanis igen lassúak, így a kozmikus sugárzási intenzitás állandóan egyensúlyi helyzeteken keresztül kvázistacionáriusan követi a naptevékenység változását. (Gyors tranziens változásokat most nem vizsgálunk.) A konvekciós-diffúziós egyenletekből ekkor \vec{S} eliminálásával

$$\text{div}(-\kappa \text{grad } U + U\vec{V}) = 0 \quad (2.2.4)$$

adódik. A κ diffúziós állandó és a V napszél-sebesség különböző értékeket vehet fel az interplanetáris tér különböző részein. A (2.2.4) egyenlet nem oldható meg álta-

lános helyfüggést feltételezve a diffúziós együtthatóra, ezért szorítkozunk gömb-szimmetrikus esetre, amikor κ és V értéke csak a Naptól mért távolságtól függ. Ekkor a (2.2.4) egyenlet egyszerűen integrálható:

$$S(\vec{r}, v) = 0$$

$$U(\vec{r}, v) = U_{\infty}(v) \exp \left\{ - \int_{r_e}^L \frac{V(r')}{\kappa(r', v)} dr' \right\}. \quad (2.2.5)$$

Itt $U_{\infty}(v)$ a modulálatlan galaktikus sűrűség, r_e a Nap—Föld távolság, azaz 1 AU, L a modulációs hossz, vagyis annak a gömbnek a sugara, amelyen belül a Nap moduláló hatása érvényesül.

A modulációs tartomány méretére csak igen durva becslések adhatók. A Naptól távolodva a galaktikus sugárzás intenzitása növekszik, míg a napszél energiasűrűsége csökken. A becslések szerint a Naptól 50 AU körüli távolságban a galaktikus sugárzás egyensúlyt tart a napszél nyomásával, így a modulációs tartomány sugara 50 AU körül várható [4]. Más feltételezések szerint a modulációs hossz ennél lényegesen kisebb. A Naptól 2—3 AU távolságra ugyanis a plazmában terjedő hullámok amplitúdója eléri a spirális mágneses tér amplitúdóját, ezért itt turbulens héj alakul ki, amelyen túl a mágneses tér kisimul, így nem okoz modulációt [11].

A galaktikus sugárzás legszembetűnőbb sajátossága, a 11 éves napciklussal való korreláció jól magyarázható az egyszerű konvekciós-diffúziós képpel. A napszél igyekszik kiszorítani a galaktikus sugárzást a naprendszerből, ugyanakkor a részecskék befelé diffundálnak a naprendszerbe. A két áram egyensúlyt tart egymással, a létrejövő moduláció a kiszorító hatás és a diffúziós képesség viszonyától függ. A megoldásból is látható, hogy az energikus, nagy merevségű részek könnyebben hatolnak be a naprendszerbe, mint a kis energiájú sugárzás. A 11 éves napciklus folyamán a modulációt meghatározó κ , V , L paraméterek lassan változnak, így a galaktikus sugárzás is kvázistacionáriusan változik, vagyis érvényes marad a (2.2.5) összefüggés, de az abban szereplő paraméterek időfüggők lesznek. Erős naptevékenység esetén L és V növekedése várható, míg a λ szabad úthossz csökken, így a galaktikus sugárzás intenzitása csökken, míg nyugodt naptevékenység idején a galaktikus sugárzás maximális.

Ha λ arányos a merevséggel, vagyis $\lambda = \lambda_1(r)P$, akkor a t időben mért intenzitás (2.2.5) szerint:

$$U(r, v, t) = U_{\infty}(v) \exp \left[- \frac{1}{vP} \int_{r_e}^{L(t)} \frac{3V(r', t)}{\lambda_1(r', t)} dr' \right] = U_{\infty}(v) \exp \left[- \frac{\eta(t)}{vP} \right]. \quad (2.2.6)$$

A különböző merevségű sugárzás időbeli változásának vizsgálata szerint a (2.2.6) eredmény jól összefér a kísérleti adatokkal a 0,1—1,0 GV intervallumban [8]. $\eta(t)$ értéke a naptevékenységtől függően 0,3—0,9 GV/c közt változott, ami arra mutat, hogy ebben a merevség-tartományban a galaktikus sugárzás jelentősen modulált még nyugodt Nap idején is.

A napszél-plazma általában nem azimutszimmetrikusan áramlik ki a Napból, ezért a Nap 27 napos forgása következtében V és λ is függhet az azimutszögtől, és szintén 27 napos ciklussal változik. Ez magyarázhatja azt a megfigyelt jelenséget, hogy néhány napfordulat időtartamra a kozmikus sugárzás intenzitása 27 napos

periódusidővel visszatérő jeleget mutat. A napszél-plazma néhány napfordulat után átrendeződik, így hosszú, több éves 27 napos periodicitás nem várható.

A konvekciós-diffúziós elmélet fenti egyszerű formájában a befelé irányuló diffúzió pontosan egyensúlyt tart a kifelé irányuló konvekcióval, így (2.2.3) értelmében nincs anizotrópia, vagyis minden irányból azonos fluxust kapunk. A megfigyelt napi változás viszont világosan arra mutat, hogy létezik egy anizotrópia, amely a Föld forgása miatt a Földön napi periodicitásban jelentkezik. Erről a jelenségről a pontosabb elmélet ad számot, amely figyelembe veszi az interplanetáris mágneses tér jelenlétét, valamint az ütközések során fellépő energiaváltozást is.

2.3. A terjedést leíró általános egyenletek

Egy pontosabb elméletben az előző részben tárgyalt egyszerű modellhez képest három körülmény figyelembevétele okoz módosítást.

a) Az interplanetáris mágneses tér hatása

Mint a 2.1. fejezetben láttuk, az interplanetáris térben spirál alakú mágneses tér van jelen. Mágneses térben a töltött részecskék diffúziója módosul, a diffúzió nem lesz izotróp. A töltött részecskék a mágneses erőter irányában szabadon diffundálhatnak, a térre merőleges diffúzió viszont nehezebbé válik [10]. Mágneses tér jelenlétében a skalár diffúziós együttható szerepét tenzor veszi át. A mágneses tér ugyanis eltérítő hatást fejt ki az áramra, így a Boltzmann-egyenletből adódik

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \frac{v^2}{3} \text{grad } U + \frac{ev}{p} (\vec{B} \times \vec{S}) = -\frac{v}{\lambda} \vec{S} \quad (2.3.1)$$

[l. függelék (F. 12b) egyenlet $V=0$ esetben, mivel itt csak a diffúziót vizsgáljuk]. Egyensúlyi helyzetben $\partial \vec{S} / \partial t = 0$ és ebből

$$\vec{S} + \frac{\lambda e}{p} (\vec{B} \times \vec{S}) = -\frac{\lambda v}{3} \text{grad } U. \quad (2.3.2)$$

Ez az összefüggés invertálható, vagyis kifejezhető belőle \vec{S} . Legyen \vec{b} a mágneses tér irányába mutató egységvektor, és felhasználva, hogy $e|\vec{B}|/p = R^{-1}$, ahol R az e töltésű részecske Larmor-sugara a B erősségű mágneses térben, (2.3.2)-ből az áramra

$$\vec{S} = -\frac{\lambda v}{3} \left[1 + \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 \right]^{-1} \left[\text{grad } U - \frac{\lambda}{R} \vec{b} \times \text{grad } U + \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 \vec{b} (\vec{b} \text{grad } U) \right] \quad (2.3.4)$$

adódik. Mutasson a mágneses tér az x irányba, ekkor a diffúziós tenzort komponensekben kiírva

$$\kappa_{ij} = \frac{\lambda v}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + (\lambda/R)^2} & \frac{\lambda/R}{1 + (\lambda/R)^2} \\ 0 & -\frac{\lambda/R}{1 + (\lambda/R)^2} & \frac{1}{1 + (\lambda/R)^2} \end{bmatrix}. \quad (2.3.5)$$

A diffúziós tenzor jellegét a λ/R hányados, vagyis az ütközési szabad úthossz és a Larmor-sugár aránya határozza meg. Ha $\lambda \ll R$, azaz a mágneses tér gyenge, akkor a részecske pályája alig görbül meg a két ütközés között. Ebben az esetben az ütközés dominál, és $\lambda/R \rightarrow 0$ határesetben visszakapjuk az izotróp diffúzió esetét.

$$\kappa_{ij} = \frac{\lambda v}{3} \delta_{ij}. \quad (2.3.6)$$

Ha a mágneses tér erős, azaz $\lambda \gg R$, akkor a részecske sokszor körbefordul két ütközés közben, vagyis a mágneses tér hatása dominál. A diffúziós tenzorra $\lambda/R \rightarrow \infty$ határesetben

$$\kappa_{ij} = \frac{\lambda v}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.7)$$

adódik, vagyis a diffúzió mértéke az erővonal irányában változatlan, de az erővonalra merőleges diffúzió nem lép fel. Az interplanetáris térben az ütközési szabad úthossz felülmúlja a Larmor-sugarat (minden merevségre), így a (2.3.7) diffúziós tenzor használható, noha ugyanakkor nem mindig hagyható figyelmen kívül a keresztirányú diffúzió sem.

Megjegyezzük, hogy a térre merőleges, keresztirányú diffúzió jelentős lehet a mágneses erővonalak rendezetlen vándorlása miatt. Az erővonalak ugyanis nem szigorúan rendezetten követik a spirál-szerkezetet. *Jokipii* és *Parker* elmélete szerint az erővonalak elrendeződése „nedves spaghettihez” hasonlítható [12], vagyis az eredetileg közel levő erővonalak egymástól távolra kerülhetnek. Mivel a részecskék az erővonalak mentén terjednek, a mágneses erővonalak vándorlása jelentősen megkönnyítheti a keresztirányú diffúziót.

b) A Compton—Getting-faktor

Az egyszerű modellben feltételeztük, hogy a konvekciós áram $U\vec{V}$, ez azonban a részletesebb számítás során módosulni fog. A konvekciós áram „célja” az, hogy a \vec{V} sebességgel, a napszéllel együtt mozgó rendszerben az eloszlás izotróp legyen, ez felel meg annak, hogy a napszél magával ragadta a sugárzási részeket.

Ha a napszéllel együtt mozgó rendszerben az eloszlás izotróp, akkor a hozzá képest mozgó rendszerből nézve létezik egy áram. Relativisztikusan számolva, célszerű az impulzus- vagy merevség spektrum használata, mivel az impulzustér-beli sűrűségfüggvény Lorentz-invariáns [13]. (Az impulzus- és merevség spektrum csak egy állandó szorzóban különbözik, ezért egyformán használhatók.)

Használjuk tehát az

$$U(\vec{r}, p) = \int f(\vec{r}, \vec{p}) p^2 d\Omega$$

$$\vec{S}(\vec{r}, p) = \int \vec{v} f(\vec{r}, \vec{p}) p^2 d\Omega \quad (2.3.8)$$

mennyiségeket, ahol $f(\vec{r}, \vec{p}) d^3\vec{r} d^3\vec{p}$ a $d^3\vec{r} d^3\vec{p}$ fázistér fogat-elemben található részecskék száma.

Ha a napszéllel együtt mozgó rendszerben az eloszlás izotróp, akkor az ott mért $f'(\vec{r}, \vec{p})$ sűrűségfüggvény csak a \vec{p}' impulzus abszolút értékétől függhet. Hasz-

náljuk ki, hogy az $f(\vec{r}, \vec{p})$ sűrűségfüggvény Lorentz-invariáns, valamint azt, hogy a napszél sebessége kicsi, így a sorfejtésben elég a V -ben elsőrendű tagok figyelembevétele. Ekkor egyszerűen adódik az álló rendszer beli sűrűségfüggvényre:

$$f(\vec{r}, p) = f'(\vec{r}, p') \approx f'(\vec{r}, p - VE) \approx f'(\vec{r}, p') - \frac{\partial f'(\vec{r}, p')}{\partial p} E \frac{\vec{p}\vec{V}}{p}. \quad (2.3.9)$$

Amiből az álló rendszer beli sűrűsége és áramra a (2.3.8) szerint

$$U(\vec{r}, p) = 4\pi p^2 f'(\vec{r}, p)$$

$$\vec{S}(\vec{r}, p) = -\frac{4\pi}{3} p^3 \frac{\partial f'(\vec{r}, p)}{\partial p} \vec{V}$$

adódik, aminek alapján $f'(\vec{r}, p)$ eliminálásával kifejezhető az álló rendszerben mért áram a részecskesűrűséggel.

$$\vec{S} = -\frac{p^3}{3} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{U}{p^2} \right) \vec{V}.$$

Következésképpen a konvekciós áramra $U\vec{V}$ helyett

$$\vec{S}_{\text{konv}} = -\frac{p^3}{3} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{U}{p^2} \right) \vec{V} = \left[1 - \frac{1}{3U} \frac{\partial}{\partial p} (Up) \right] U\vec{V} \quad (2.3.10a)$$

kifejezést kell írni. Ugyanez az eredmény adódik a Boltzmann-egyenletből kiindulva [l. Függelék (F. 14.6) egyenlet, $\lambda = B = 0$ esetre, mivel csak a konvekciót vizsgáljuk].

Ha impulzus helyett kinetikus energia-spektrumot használunk,

$$\vec{S}_{\text{konv}} = \left[1 - \frac{1}{3U} \frac{\partial}{\partial T} (\alpha TU) \right] U\vec{V} \quad (2.3.10b)$$

adódik, vagyis fellép az $\alpha = (T + 2E_0)/(T + E_0)$ kifejezés, ahol T a kinetikus, E_0 a nyugalmi energia. Kis energiákon $T \ll E_0$, így $\alpha \approx 2$, míg relativisztikus esetre $\alpha \approx 1$.

Az $\left[1 - \frac{1}{3U} \frac{\partial}{\partial T} (\alpha TU) \right]$ kifejezést Compton—Getting-faktornak nevezik. Mindig ez a faktor lép fel, ha egy izotróp eloszláshoz képest mozgó megfigyelő által észlelt áramot számítjuk ki [14]. Ha nagy energiákon az energiaspektrum hatványfüggvény, vagyis $U \sim T^{-\mu}$ és $T \gg E_0$, akkor a Compton—Getting-faktor energiától függetlenül

$$C(\vec{V}, T) = \left[1 - \frac{1}{3U} \frac{\partial}{\partial T} (\alpha TU) \right] = \frac{\mu + 2}{3} \quad (2.3.11)$$

értéket vesz fel.

c) Az energiaváltozás hatása

A kozmikus sugárzási részecskék munkát végeznek a kitáguló napszél ellenében. Az álló rendszerben az irregularitásokon való szóródás nem lesz rugalmas, hanem energiacsérével jár [15]. Ez azt eredményezi, hogy a kontinuitási egyenlet jobb oldalán fellép egy forrástag, amely az energiától függően pozitív vagy negatív lehet. (A forrástag integrálja természetesen eltűnik, hiszen az össz-részecskeszám megmarad.) A terjedést leíró egyenletek általánosan így a következőképpen írhatók:

Impulzus-, illetve merevségspektrumra

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = -\frac{\vec{V}}{3} \operatorname{grad} \left[\frac{\partial}{\partial p} (Up) \right] \quad (2.3.12a)$$

$$\vec{S} = -\kappa \operatorname{grad} U + \left[1 - \frac{1}{3U} \frac{\partial}{\partial p} (Up) \right] U \vec{V}.$$

Kinetikus energia spektrumra

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = -\frac{\vec{V}}{3} \operatorname{grad} \left[\frac{\partial}{\partial T} (\alpha TU) \right] \quad (2.3.12b)$$

$$\vec{S} = -\kappa \operatorname{grad} U + \left[1 - \frac{1}{3U} \frac{\partial}{\partial T} (\alpha TU) \right] U \vec{V}.$$

A fenti egyenletek leírják mind a galaktikus, mind a szoláris eredetű kozmikus sugárzás terjedését az interplanetáris térben. A kétféle eredetű sugárzásra a határfeltételek különböznek, nevezetesen a szoláris részek esetén a Nap forrást képvisel. A terjedési egyenletekkel számolva sohasem szabad szem előtt tévesztetni, hogy ezek az egyenletek csak közel izotróp esetre és lassú változásokra alkalmazhatók. Lassú változásnak azt tekinthetjük, amelynek karakterisztikus ideje lényegesen felülmúlja az ütközések közötti átlagos időt, míg közel izotrópnak vehető a sűrűségfüggvény, ha az anizotrópia nem haladja meg a 10%, egyes becslések szerint a 30% értéket.

A terjedési egyenletekből \vec{S} eliminálható, így a részecskesűrűségre a

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \operatorname{div} \kappa \operatorname{grad} U + \vec{V} \operatorname{grad} U + U \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\operatorname{div} \vec{V}}{3} \frac{\partial}{\partial p} (Up) \quad (2.3.13)$$

Fokker—Planck-egyenletet kapjuk.

3. A terjedési egyenletek közelítő megoldásai

Az előző fejezetben kapott egyenletek leírják mind a galaktikus, mind a szoláris eredetű kis és nagy energiájú részecskék terjedését a naprendszerben, ezért a különböző jelenségek vizsgálatokor egyaránt a (2.3.12) egyenletekből kell kiindulnunk. Ezek az egyenletek azonban általában nem oldhatók meg egzaktul, így közelítő megoldásokra szorítkozunk. Különböző vizsgált problémáknál más-más közelítő feltevéseket tehetünk, így különböző megoldásokhoz jutunk, amelyek csak bizonyos határok között érvényesek. Mint látni fogjuk, a galaktikus sugárzás 11 éves és napi változásának vizsgálatokor eltekinthetünk a kontinuitási egyenletben fel-lépő, energiaváltozásból származó forrástagtól, míg kis energiájú szoláris részecskék terjedésénél a diffúzió szerepe lesz elhanyagolható. A következőkben először meg-vizsgáljuk az anizotróp diffúzió hatását, majd a galaktikus sugárzás energiaspektru-mának tanulmányozása után a kis energiájú szoláris eredetű részecskék terjedésének problémájára térünk rá.

3.1. Az anizotróp diffúzió hatása

Az interplanetáris térben a mágneses tér viszonylag erős, ami azt eredményezi, hogy a diffúzió csak a mágneses tér irányában történhet. A nagy energiájú ($\gtrsim 0,5$ GeV) galaktikus sugárzás sűrűséggradiense kicsi (pontosabban $\frac{\partial \ln U}{\partial r} \ll 1 \text{ AU}^{-1}$), ezért a kontinuitási egyenletből fellépő energiaváltozásokból származó forrástag elhanyagolható. A forrástag eltűnéséből következik, hogy nem lehet radiális irányú részecskeáram, vagyis a radiálisan kifelé irányuló konvekciós áram egyensúlyt tart a befelé irányuló diffúziós áram radiális komponensével. Mint a 2. ábrán látható, a két áram nem esik egy irányba, így fellép egy azimutális irányú eredő áram.

A 2. ábráról leolvasható, hogy

$$S_{\text{konv}} = S_{\text{diff}} \cdot \cos \psi$$

$$S_{\text{kor}} = S_{\text{diff}} \cdot \sin \psi$$

Felhasználva a $\text{tg } \psi = \frac{r\Omega}{V}$ összefüggést (2.1.2), egyszerűen adódik

$$S_{\text{kor}} = S_{\text{konv}} \cdot \text{tg } \psi = \frac{\mu + 2}{3} U \cdot r\Omega \quad (3.1.1)$$

2. ábra. A konvekciós (S_{konv}) és diffúziós (S_{diff}) áram iránya szöget zár be. A diffúziós áram radiális komponense egyensúlyt tart a konvekciós árammal, míg az azimutális komponens az S_{kor} korotációs áramot adja

ahol $(\mu + 2)/3$ a Compton—Getting-faktor (2.3.11)-nek megfelelően, ha μ az energiaspektrum hatványkitevője.

A kapott eredménynek igen szemléletes jelentés adható, amit az irodalomban

korotációs jelenségnek neveznek [16]. A (3.1.1) formula úgy interpretálható, hogy a galaktikus sugárzás mereven együttforog a Nappal. A Nappal együtt Ω szögsebességgel forgó rendszerben a sugárzás izotróp, így az álló rendszerben levő megfigyelő a Compton—Getting-effektusnak megfelelő áramot észlel [14].

Megmutatható, hogy ez a merev együttforgás nemcsak az ekliptika síkjában teljesül, hanem az interplanetáris tér tetszőleges \vec{r} pontjában

$$\vec{S} = \frac{\mu + 2}{3} (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot U \quad (3.1.2)$$

áram lép fel, ha a tökéletes korotáció feltételei teljesülnek [17]. ($\vec{\Omega}$ a Nap szögsebességvektora.)

A korotációs áramnak megfelel egy anizotrópia-vektor, mégpedig (2.2.3) alapján

$$\vec{\zeta} = (\mu + 2) \frac{\vec{\Omega} \times \vec{r}}{v}. \quad (3.1.3)$$

A földpálya mentén relativisztikus ($v \approx c$) részecskékre ebből $\mu \approx 2,5$ mellett 0,63% nagyságú anizotrópia adódik, amely a földfelszínen végzett mérésekben napi változást okoz. A maximális intenzitás 18^h helyi időkor várható, a változás amplitúdója az észlelési hely földrajzi szélességétől függ.

A korotációs jelenséget a kísérletek igazolták. A szoláris napi hullám maximum-helye az elmélettel egyezően 18^h helyi időnek adódik, a mérések azonban csak 0,40% anizotrópiára mutatnak, ami elmarad a számított 0,63% értéktől. Az eltérés magyarázata lehet, hogy nem teljesülnek a teljes korotáció feltételei, vagyis a keresztirányú diffúzió nem hanyagolható el. Más elképzelések szerint egy, az ekliptikára merőleges sűrűséggradiens felelős a különbségért [18].

Szoláris eredetű részecskékre a fenti gondolatmenet nem alkalmazható, mivel a Napban részecskeforrás van, így a radiális áramnak nem kell eltűnnie.

Az anizotróp diffúzió nemcsak a korotáció jelenségét okozza, hanem módosítja a galaktikus sugárzás modulációjára kapott (2.2.5) eredményt is. Ha a teljes modulációs tartományra teljesül, hogy csak mágneses tér irányú diffúzió léphet fel, akkor az $S_r=0$ közelítésből egyszerűen adódik (2. ábra)

$$S_{\text{diff}} = -\kappa_{\parallel} \frac{\partial U}{\partial r} \cos \psi$$

ahol $\kappa_{\parallel} = \lambda v/3$ a diffúziós együttható a mágneses tér irányában. A konvekciós és diffúziós áram radiális komponensének egyensúlyából

$$\kappa_{\parallel} \frac{\partial U}{\partial r} \cos^2 \psi = \frac{\mu+2}{3} UV$$

ahonnan integrálással

$$U(r, T) = U_{\infty}(T) \exp \left[- \int_{r_e}^L \frac{\mu+2}{3} \frac{V}{\kappa_{\parallel} \cos^2 \psi} dr' \right] \quad (3.1.4)$$

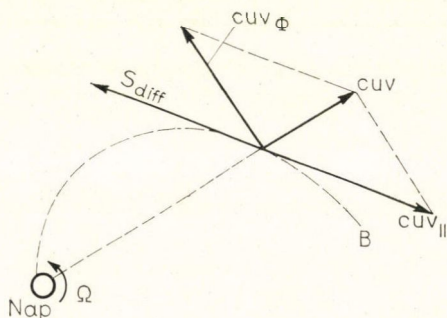
vagy felhasználva, hogy $\tan \psi = \frac{r\Omega}{V}$

$$U(r, T) = U_{\infty}(T) \exp \left[- \int_{r_e}^L \frac{\mu+2}{3} \frac{V}{\kappa_{\parallel}} \left(1 + \frac{r'^2 \Omega^2}{V^2} \right) dr' \right]. \quad (3.1.5)$$

A (3.1.4) eredmény igen szemléletesen interpretálható a következőképpen.

Bontsuk fel a sebességet mágneses tér és azimutális irányú komponensekre (3. ábra).

Ekkor a $V_{\parallel} = V/\cos \psi$ komponens egyensúlyt tart a diffúziós árammal, míg a $V_{\phi} = V \tan \psi = r\Omega$ komponens a korotáció jelenségét okozza. Ennek a képnek a segítségével a gömbszimmetrikus izotróp diffúzióra kapott eredmények könnyen alkalmazhatók a tisztán mágneses tér irányú diffúzió esetére. A radiális V sebességet a $V_{\parallel} = V/\cos \psi$ komponens helyettesíti, míg a Naptól való távolság helyett az erővonal mentén mért ívhosszat kell írni. Az így kapott eredmények érvényesek lesznek a Nappal együtt forgó rendszerben, míg az álló rendszerben a $V_{\phi} = r\Omega$ sebességkomponens korotációs jelenséghez vezet.



3. ábra. A CUV konvekciós áram felbontható mágneses tér irányú (CUV_{\parallel}) és azimutális irányú (CUV_{ϕ}) komponensekre. A CUV_{\parallel} komponens egyensúlyt tart a diffúziós árammal (S_{diff}), a kompenzálatlan azimutális komponens a CUV_{ϕ} korotációs áramot eredményezi

Ebből a képből látható, hogy a korotáció meg fog jelenni szoláris eredetű részek terjedésénél is, noha sohasem a (3.1.2) által leírt tiszta formában.

Ugyancsak látható, hogy az izotróp diffúzióra gömbszimmetrikus esetben kapott eredmények a fenti módon alkalmazhatók egyirányú diffúzióra nem gömbszimmetrikus esetben is. A részecskék ugyanis csak az erővonalak mentén terjedve, mintegy csőbe vannak zárva, és az egymás melletti csövek közti sűrűséggradiens a keresztirányú diffúzió hiánya miatt nem tud kiegyenlítődni. Ez különösen jelentős lesz a fler-jelenségek tárgyalásakor, mivel a Nap a „fler” protonokat kis térszögben bocsátja ki, vagyis a gömbszimmetria távolról sem teljesül.

Meg kell jegyeznünk, hogy éppen a (3.1.5) eredmény kapcsán merültek fel kétféleképpen a konvekciós-diffúziós modellel szemben [19]. A (3.1.5) összefüggés alapján a moduláció mértéke a V , κ és L paraméterektől függ. Ugyanakkor V és κ mért, illetve a mérések alapján becsült értékét korrelációba állítva a kozmikus sugárzás változásával, nem találtak egy 11 éves cikluson belül határozott korrelációt. Ha a kozmikus sugárzás 11 éves változását viszont csak az L modulációs hossz változásával akarnánk magyarázni, akkor túl nagy modulációt kellene feltenni nyugodt Nap idejére is, és ez más eredményekkel lenne ellentmondásban, nevezetesen túl nagy modulálatlan galaktikus intenzitás adódna.

A fellépő ellentmondás a konvekciós-diffúziós felfogás felülvizsgálatát tehetné szükségessé, a szerzők szerint azonban legvalószínűbb, hogy az ekliptika síkján kívüli jelenségek figyelembevételével az ellentmondás feloldható.

Az ekliptika síkján kívül a napszél moduláló hatása kisebb lehet, mivel a mágneses erővonalak kisebb szöget zárnak be a radiális iránnyal, mint az ekliptika síkjában a Naptól azonos távolságra, így a pólusok felől a galaktikus sugárzás könnyebben hatol be a naprendszerbe. Így az ekliptika síkján kívül a galaktikus sugárzás intenzitása nagyobb lehet, és a fellépő sűrűséggradiens olyan jelentőssé válhat, hogy a mágneses térre merőleges diffúzió is fellép, amelyet a mágneses erővonalak vándorlása is megkönnyíthet.

A (3.1.5) formula másik „sebezhető” pontja az, hogy nem ismerjük a Naptól távol uralkodó viszonyokat, nem tudhatjuk, mennyiben jogos egyrészt az arhimédészi spirál alak, másrészt a csak mágneses tér irányú diffúzió feltevése.

3.2. „Elektrosztatikus tér” modell

A galaktikus eredetű sugárzás energiaspektrumának vizsgálata a kozmikus sugárzási kutatások egyik központi kérdése. A moduláció energiafüggésének vizsgálatából egyrészt fontos információkat nyerhetünk az interplanetáris tér szerkezetére, másrészt a kozmikus sugárzás eredetének kérdése szempontjából rendkívül fontos, hogy a földpálya mentén mért energiaspektrumból vissza tudjunk következtetni a modulálatlan galaktikus spektrumra. A 4. ábra a földpálya mentén mért és az ebből számított modulálatlan spektrumot mutatja protonokra és α részecskékre.

Nagy energiájú sugárzás esetén eltekinthetünk az energiaváltozástól. Vizsgáljuk a gömbszimmetrikus esetet izotróp diffúziót feltételezve. Az egyirányú diffúzió esetére ebből az előbb leírt helyettesítéssel térhetünk át. Gömbszimmetrikus esetre az $S=0$ feltétel az energiafüggő Compton—Getting-faktor figyelembevételével (2.3.10a) szerint az

$$S = -\kappa \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{p^3}{3} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{U}{p^2} \right) V = 0 \quad (3.2.1)$$

egyenlethez vezet. Az $\alpha = (T + 2E_0)/(T + E_0)$ faktor elkerülése végett impulzus-spektrumot használunk.

Ha a κ diffúziós együttható szeparálható hely- és impulzusfüggő tényezők szorzatára, akkor a (3.2.1) egyenlet integrálható. Legyen ugyanis $\kappa(r, p) = \kappa_1(r)\kappa_2(p)$, ekkor a (3.2.1) egyenletet átalakítva a

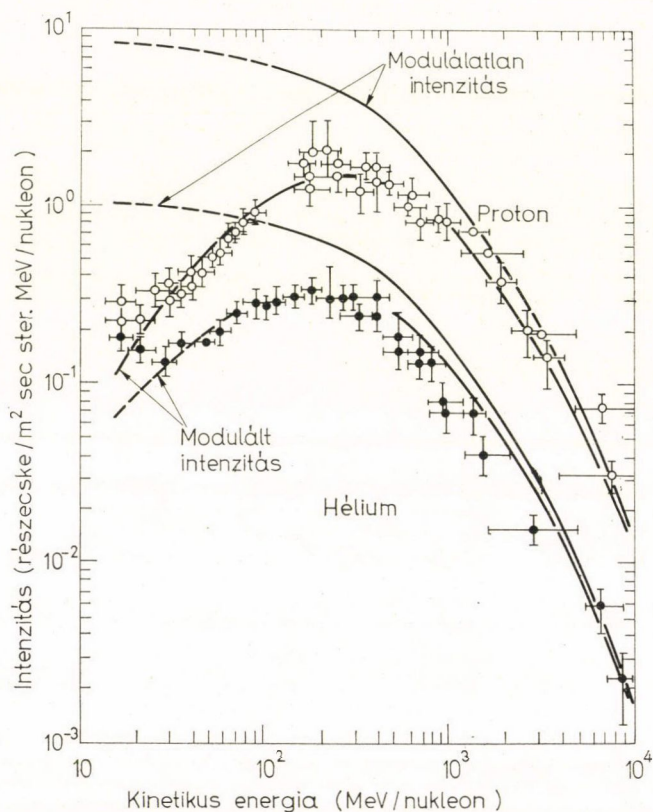
$$\frac{\kappa_2(p)}{p} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{p^2} \right) + \frac{V}{3\kappa_1(r)} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{U}{p^2} \right) = 0$$

alakra jutunk, ahonnan látható, hogy az U/p^2 hányados csak a

$$\int_0^p \frac{\kappa_2}{p'} dp' + \int_r^L \frac{V}{3\kappa_1} dr'$$

kifejezéstől függ. Ha a λ szabad úthossz arányos a merevséggel, akkor $\kappa_2 = vp/Z$, és ebből

$$\int_0^p \frac{\kappa_2(p')}{p'} dp' = \frac{E}{Z},$$



4. ábra. Protonok és hélium differenciális energiaspektruma és az ezekből számított modulálatlan intenzitások

vagyis az U/p^2 hányados csak az $E + Z\Phi(r)$ mennyiségtől függ, ahol

$$\Phi(r) = \int_r^L \frac{V(r')}{3\kappa_1(r')} dr' \quad (3.2.2)$$

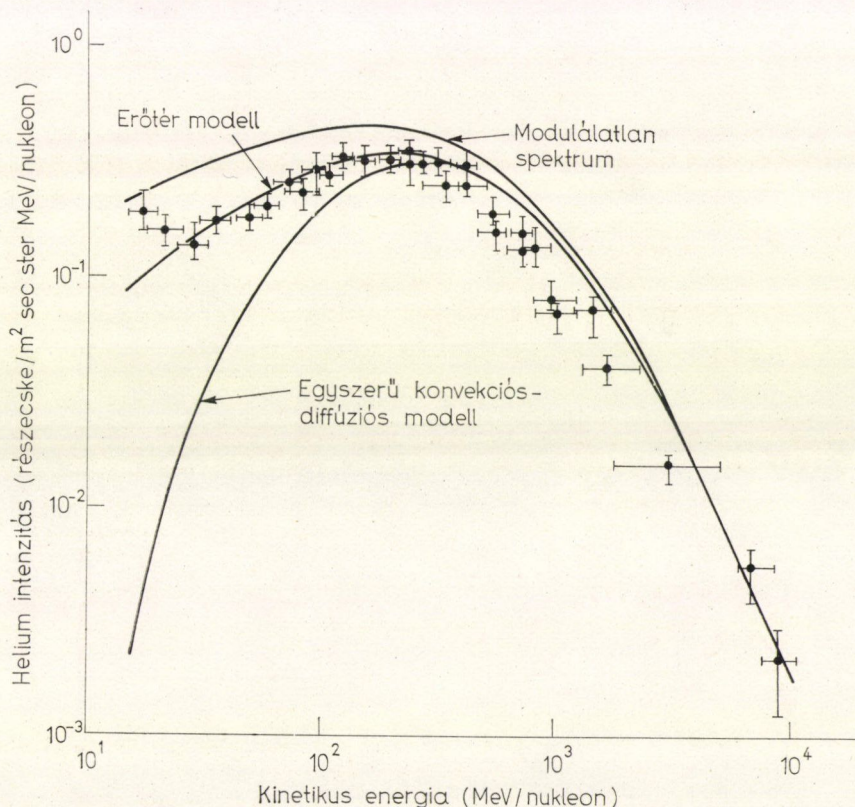
A sűrűségfüggvényre ebből

$$U(r, p) = \frac{p^2}{p_L^2} U(L, p_L) \quad (3.2.3)$$

$$\sqrt{p_L^2 + E_0^2} = \sqrt{p^2 + E_0^2} + Z\Phi$$

adódik, ahol $U(L, p_L)$ a modulálatlan spektrumnak felel meg. Látható, hogy $Z\Phi(r)$ jelentése a részecske átlagos energiavesztesége, miközben a modulációs tartomány határától a földpálya mélységéig hatol a naprendszerbe.

A kapott eredmények kézenfekvő analógiát kínálnak. A kozmikus sugárzási részek úgy terjednek a naprendszerben, mintha a Nap körül egy $\Phi(r)$ potenciállal leírható elektrosztatikus tér lenne, amely azonban egyformán taszítólag hat a pozitív



5. ábra. Az erőter modell alapján számított spektrum jól egyezik a mérési adatokkal 20 MeV felett $E^{-2,65}$ modulálatlan spektrumot feltételezve. Az egyszerű konvekciós-diffúziós elmélet 200 MeV alatt már nem ad jó eredményt

és negatív töltésre is. Történelmi érdekességgént megemlíthető, hogy már régebben felmerült az elektrosztatikus tér modell gondolata, és éppen az itt vázolt, *Gleesontól* és *Axfordtól* [20] származó számítás világít rá arra, hogy miért adhatott jó eredményeket ez a fizikailag egyébként abszurd modell.

A (3.2.2) és (3.2.3) egyenletek alapján meghatározható a galaktikus eredetű sugárzás spektruma a fölpálya mentén, ha ismert a modulálatlan spektrum. Az α részecskék energiaspektruma nagy energiákon, ahol a moduláció nem jelentős, $E^{-2.65}$ alakú hatványfüggvénnyel írható le. *Fisk*, *Axford* és *Gleeson* [21] feltételezték, hogy ez a hatványfüggvény alak érvényes a modulálatlan spektrum kisebb energiájú tartományában is, és alkalmasan választott Φ értékkel igen jó egyezést kaptak a fölpálya menti spektrumra a 20 MeV feletti energiákra (5. ábra).

Ha a λ szabad úthossz nem pontosan arányos a merevséggel, akkor a részecske átlagos energiavesztesége energiafüggő lesz, és ilyenkor nem lehet konzervatív erőter analógiát találni.

3.3. Konvekció-domináns terjedés

A megfigyelések arra mutatnak, hogy a fler-jelenségek mellett a Nap folyamatosan is kibocsát korpuszkuláris sugárzást az 1–50 MeV tartományban. Az ilyen kis energiájú részecskékre a α diffúziós együttható kicsi, így, ha nincsenek nagy sűrűséggradiensek, akkor ezen részecskék terjedésében a konvekció játssza a döntő szerepet. Pontosabb vizsgálatok megmutatták, hogy a Nap által folyamatosan emittált sugárzásra a diffúziós hatás lényegesen a konvekciós alatt marad egy r sugarú gömbben, ha

$$\frac{\lambda}{\hat{V}\hat{r}} \ll 1 \quad (3.3.1)$$

ahol λ , \hat{V} , \hat{r} a diffúziós állandó, a napszélsébség és a Naptól való távolság effektív értékei a vizsgált térfogatban [22]. A Naptól emittált részek közül a (3.3.1) feltétel protonokra és α részecskékre ~ 50 MeV, míg elektronokra ~ 20 MeV alatt teljesül. Galaktikus eredetű részekre nagy sűrűséggradiens lép fel, a diffúzió hatása jelentős marad, így a következő gondolatmenet csak a szoláris eredetű, kis energiájú, folyamatosan emittált sugárzásra érvényes.

*Fisk*nek és *Axford*nak [23] sikerült megoldani a terjedési egyenleteket a diffúzió elhanyagolásával, gömbszimmetrikus esetre, állandó napszél-sebességet feltételezve. A megoldást *Gleeson* [24] általánosította, megengedve a napszél-sebesség változását a Naptól mért távolság függvényében.

A diffúzió elhagyásával a terjedési egyenletek stacionárius egyensúlyi helyzetben

$$\begin{aligned} \operatorname{div} S &= -\frac{V}{3} \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial p} (Up) \\ S &= -\frac{p^3}{3} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{U}{p^2} \right) V \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

alakúak. S eliminálásával gömbszimmetrikus esetre ebből az

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 UV) = -\frac{1}{3r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V) \cdot \frac{\partial}{\partial p} (Up) \quad (3.3.3)$$

egyenlet adódik, és ezt átalakítva a

$$\frac{3}{p} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V U p) + \frac{1}{r^2 V} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V) \cdot \frac{\partial}{\partial p} (r^2 V U p) = 0 \quad (3.3.4)$$

egyenlethez jutunk, ahonnan látható, hogy az $(r^2 V p U)$ mennyiség csak az $\left[\int \frac{3}{p} dp' - \int \frac{\partial}{\partial r'} \ln(r'^2 V) dr' \right]$ kifejezéstől, vagyis csak $p^3/r^2 V$ értékétől függ.

Ha ismerjük a spektrumot a Naptól a távolságban, akkor kiszámolható tetszőleges r távolságban is, feltéve, hogy ismerjük a napszél sebességének változását. Az U sűrűsége egyszerűen adódik:

$$U(r, p) = \left(\frac{a^2 V_a}{r^2 V_r} \right)^{4/3} U(a, p_a) \quad (3.3.5)$$

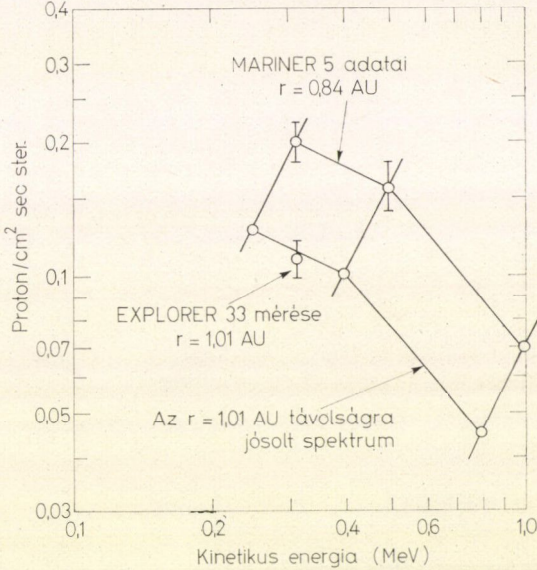
ahol

$$p_a = \left(\frac{a^2 V_a}{r^2 V_r} \right)^{1/3} p,$$

V_a és V_r a napszél sebessége a naptól a illetve r távolságban. A (3.3.5) formulából látható, hogy a sugárzás kiterjedve energiát veszít. Ha a napszél állandó, akkor a részecske impulzusa $2^{-2/3}$ részére csökken, miközben a Naptól kétszeres távolságra jut.

Megjegyezzük, hogy szemléletesen igen könnyű elképzelni az energiaspektrum változását. Ha az impulzusspektrumot kétszer logaritmus papíron ábrázoljuk, a Naptól kifelé haladva

6. ábra. A Mariner 5 és Explorer 33 szimultán mérései a naptól 0,84, illetve 1,01 AU távolságban. Az Explorer 33 mérése jól illeszkedik a Mariner 5 adataiból jósolt spektrumra



a spektrum alakja nem változik, hanem párhuzamosan eltolódik.

A (3.3.5) összefüggés igen jól összefér a kísérleti adatokkal. A 6. ábra a Mariner 5 és az Explorer 33 űrszondák szimultán mérési adatait mutatja a Naptól 0,84, illetve 1,01 AU távolságban [25]. Az Explorer 33 mérése jól egyezik a Mariner 5 adataiból a (3.3.5) összefüggés alapján jósolt eredménnyel.

A szoláris részecskék konvekció-domináns terjedése esetén könnyen kiszámolható a radiális sűrűséggradiens és az anizotrópia [26]. A számítások eredményeképpen

$$\frac{\partial \ln U}{\partial \ln r} = - \frac{\partial \ln(r^2 V)}{\partial \ln r} \cdot C(r, T) \quad (3.3.6)$$

$$\zeta = \frac{3V}{v} C(r, T) = \frac{V}{v} \left[- \frac{\partial \ln U}{\partial \ln p} + 2 \right]$$

adódik, ahol $C(r, T)$ a részecske Compton—Getting-faktora a (2.3.11) összefüggésnek megfelelően.

Ugyanakkor kis energiájú galaktikus sugárzásra az anizotrópia értékére a terjedési egyenletekből kaphatunk becslést [21], ugyanis a (2.3.12a)

$$\operatorname{div} S = -\frac{V}{3} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial p} (Up) \quad (3.3.7)$$

egyenletben $\operatorname{div} S$ értékét $\partial S / \partial r$ -rel közelíthetjük meg, mert a nagy sűrűséggradiens miatt a radiális változás gyors. Így, a (3.3.7) egyenletet integrálva, az anizotrópiára

$$\zeta = -\frac{V}{v} \left[\frac{\partial \ln U}{\partial \ln p} + 1 \right] \quad (3.3.8)$$

adódik. Így, ha egyszerre mérjük a kis energiájú sugárzás energiaspektrumát és anizotrópiáját, akkor a (3.3.6) és (3.3.8) összefüggések lehetőséget adnak annak eldöntésére, hogy a mért sugárzás galaktikus vagy szoláris eredetű-e.

A galaktikus és szoláris sugárzás megkülönböztetésére másik kézenfekvő lehetőség a radiális sűrűséggradiens mérése. A galaktikus sugárzást pozitív, míg a szoláris eredetűt nagy negatív sűrűséggradiens jellemzi. A méréseknél azonban az ily módon való szétválasztás rendkívül bizonytalan, mivel a gradiensben a szoláris eredetű részecskék adják a döntő járulékot még akkor is, ha egyébként a galaktikus eredetű sugárzás van többségben [26, 28].

4. Fler-jelenségek

Nagy flerek idején a Nap lökésszerűen korpuszkuláris sugárzást bocsát ki az 1–1000 MeV energiatartományban. A földpálya mentén a flerből származó sugárzás intenzitása 5–6 órával a flert követően maximális értéket ér el, majd ezután fokozatosan csökken. A fellépő jelentős sűrűséggradiens miatt a fler-részecskék elsősorban diffúzió útján terjednek, konvekciós terjedéssel csak 4–5 nappal a kibocsátás után jutnának el a Földre.

Vizsgáljuk egy pontszerű forrásból pillanatszerűen kibocsátott részecskék diffúzióját. A számítást gömbszimmetrikus esetre végezzük. Noha a valóságban a Nap nem gömbszimmetrikusan, hanem viszonylag kis térszögben bocsátja ki a fler részecskéket, a gömbszimmetrikus esetre kapott eredmény mégis alkalmazható lesz, feltéve, hogy a részecskék csak a mágneses erővonalak mentén terjednek. Ekkor a (3.2) fejezetben leírtak szerint jó eredményt kapunk, ha a Naptól mért radiális távolság helyett a mágneses erővonal mentén mért ívhosszat írjuk.

A konvekciós-diffúziós egyenletekben eltekintve a konvekciós tagoktól ($V=0$), a tisztán diffúziós egyenlethez jutunk.

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \kappa \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0 \quad (4.1)$$

$$U(t=0) = 4\pi\eta\delta(r)r^{-2}$$

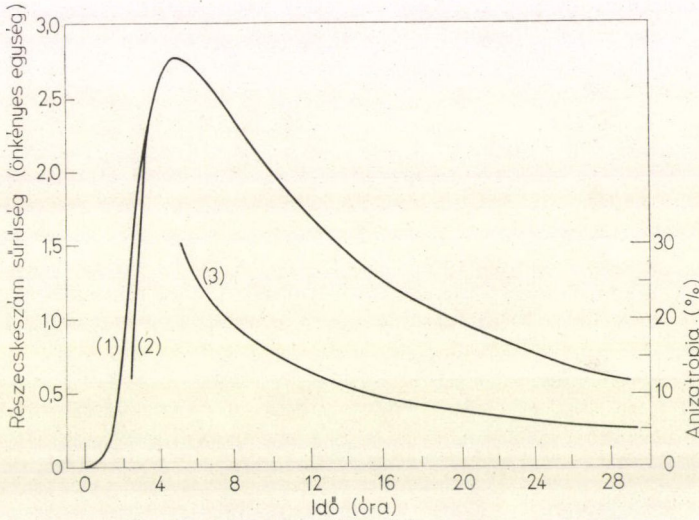
ha a $t=0$ időpontban $4\pi\eta$ számú részecske emittálódik pillanatszerűen. Feltételezve, hogy a diffúziós együttható független a Naptól mért távolságtól, a (4.1) egyenlet integrálható [29],

$$U(r, t) = \frac{4\pi\eta}{(4\pi\kappa t)^{3/2}} \exp\left[-\frac{r^2}{4\kappa t}\right]. \quad (4.2)$$

Az anizotrópiára

$$\zeta(r, t) = \frac{3S}{vU} = \frac{-3\kappa \frac{\partial U}{\partial r}}{vU} = \frac{3r}{2vt} \quad (4.3)$$

adódik, ahol v a részecske sebessége. A Földön levő megfigyelő az $U(r, t)$ alakjából leolvasható intenzitáslefutást észlel az idő függvényében. A 7. ábra a 10 MeV energiájú fler-protonok intenzitásának időbeli változását mutatja, $\lambda=0,1$ AU ütközési szabad úthosszat feltételezve.



7. ábra. Fler-jelenség időbeli lefolyása a földpálya mentén. 2 órával a kibocsátás után az egyszerű diffúziós egyenlet megoldása (1) már egybeesik a táviró-egyenletből kapott görbével (2). Az anizotrópia (3) az idővel fordítva arányosan csökken. (A számítás 10 MeV-es protonokra vonatkozik, 0,1 AU szabad úthosszat feltételezve.)

A földpálya mentén az intenzitás $t_{\max} = r_e^2/2\lambda v$ idővel a kibocsátás után adódik maximálisnak, majd $t \gg t_{\max}$ időkre $t^{-3/2}$ hatvánnyal csökken.

A (4.2), (4.3) eredményeknek két a tapasztalatnak ellentmondó következménye van. Egyrészt (4.2) ahhoz az abszurd eredményhez vezet, hogy a fler-részecskék a kibocsátást követően azonnal megjelennek a Naptól nagy távolságokra is. Másrészt (4.3) alapján az anizotrópia értékére $t=0$ időpontban végtelen adódik. Az ellentmondások oka az, hogy kis időkre a változások gyorsak, így a diffúziós egyenlet (4.1) formájában nem teljesül.

Az ellentmondások feloldhatók, ha a diffúziós egyenlet helyett a „távíró-egyenletet” használjuk [27]. Mivel a változások gyorsak, így nem alakul ki az egyensúlyi diffúziós áram, hanem figyelembe kell venni az áram változásait is. Ekkor az $S = -\kappa \partial U / \partial r$ egyenlet helyett

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{v^2}{3} \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{v}{\lambda} S \quad (4.4)$$

adódik [l. Függelék (F. 12b) egyenlet, $B=0$, $V=0$ esetre, mivel a konvekciótól itt eltekintünk]. A (4.4) egyenletet összevetve a

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S) = 0 \quad (4.5)$$

kontinuitási egyenlettel, helyfüggetlen ütközési szabad úthossz esetén a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{v^2}{3} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0 \quad (4.6)$$

és

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{v^2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S) \right) = 0$$

távíróegyenletekhez jutunk. (Az elnevezés az elektrodinamikából ismert távíró-egyenlettel való analógia alapján született.) Ha a változások lassúak, vagyis a változás karakterisztikus ideje lényegesen nagyobb a τ ütközési időnél, akkor a második deriváltakat tartalmazó tagok elhanyagolhatók, és visszakapható a (4.1) diffúziós egyenlet.

A távíróegyenletek megoldásából látható, hogy a fler-részecskék nem érhetik el a Földet $t_{\min} = r_e/v$ időnél hamarabb. Nagy időkre ($t \gg \tau$, $t \gg r_e/v$) a távíróegyenlet megoldása átmegy a (4.1) diffúziós egyenlet által adott megoldásba. A 7. ábrán látható mind a távíró-, mind a diffúziós egyenlet megoldása. Látható, hogy a két görbe közel van, ha $t \gtrsim 2$ óra. A fenti számítás szerint nagy t értékekre az anizotrópia az idővel fordítva arányosan eltűnik. Ezzel szemben a mérések arra utalnak, hogy csökkenő intenzitás mellett az anizotrópia egy állandó 5–10% körüli értékhez tart a mérés folyamán.

Egy fler-jelenséget leíró modelltől megkívánjuk, hogy ne csak az intenzitás vagy az anizotrópia időbeli változásáról adjon számot, hanem helyesen írja le egyszerre mindkettőt. A fent leírt modell több szempontból is túl egyszerűsített, figyelmen kívül hagytuk a konvekció hatását, a diffúziós állandó esetleges térbeli változását, továbbá azt, hogy a Nap nem pillanatszerűen bocsátja ki a fler-részecskéket. Vizsgáljuk meg külön-külön ezen effektusok hatását.

a) *A konvekció hatása*

Egy fler-jelenség több napon át megfigyelhető. A konvekció szerepe nem lesz már elhanyagolható több nappal a fler-jelenség kezdetét követően, így a (4.1) egyenlet kibővül egy konvekciós taggal.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \left(-\kappa \frac{\partial U}{\partial r} + UV \right)) = 0, \quad (4.7)$$

míg az anizotrópia

$$\zeta = -v\tau \frac{\partial \ln U}{\partial r} + \frac{3V}{v}.$$

Belátható, hogy ebben az esetben is az anizotrópia aszimptotikusan eltűnik. *Fisk* és *Axford* [30] a (4.7) egyenlet helyett megoldották a (2.3.12b) terjedési egyenleteket speciális feltételek mellett ($\kappa \sim r$ és energiafüggetlen, $U \sim T^{-\mu}$). A számításokból az anizotrópia aszimptotikus alakjára

$$\zeta = 3(C-1) \frac{V}{v} + \frac{3r}{vt} \quad (4.8)$$

adódott, ahol C a (2.3.11) szerinti Compton—Getting-faktor, vagyis fellép egy „maradék anizotrópia”, amely nem tűnik el növekvő t mellett.

b) *A helyfüggő diffúziós együttható szerepe*

Fizikai megfontolásokból várható, hogy a diffúziós együttható értéke a Naptól távolodva növekszik. Tegyük fel, hogy $\kappa = \kappa_0 r^\beta$ alakban függ a Naptól mért távolságtól ($0 \leq \beta < 2$). Ekkor a (4.1) diffúziós egyenlet megoldása módosul a $\beta=0$ esethez képest [31],

$$U(r, t) \sim \frac{1}{(\kappa_0 t)^{3/(2-\beta)}} \exp \left[-\frac{r^{2-\beta}}{(2-\beta)^2 \kappa_0 t} \right] \quad (4.10)$$

és

$$\zeta(r, t) = \frac{3r}{(2-\beta)vt}, \quad (4.11)$$

ahonnan látható, hogy nem adódik „maradék anizotrópia” ebben az esetben. Figyelemre méltó viszont, hogy β értékétől függően az anizotrópia nagysága erősen megnövekedhet a térben állandó diffúziós együttható (4.3) esetéhez képest.

Az intenzitás időbeli változására kapott (4.10) formula igen jó egyezést mutatott *Burlaga* [32] méréseivel $\beta=0,8$ esetre. Ez arra utalhat, hogy a diffúziós állandó a Naptól távolodva a távolság 0,8 hatványával növekszik, noha az egyezés nem bizonyítja feltétlenül ezt a feltevést.

Megjegyezzük, hogy, ha a diffúziós együttható igen gyorsan (exponenciálisan) növekszik a Naptól mért távolság függvényében, akkor ez is létrehozhat „maradék” anizotrópiát.

c) *A részecsekibocsátás időbeli kiterjedése*

A Nap nem teljesen pillanatszerűen, hanem időben elnyújtva bocsátja ki a flerészecskéket. Jellemezze a részecsekibocsátást egy $h(t)$ függvény a delta-függvény helyett. Ekkor a (4.2) megoldásból kézenfekvően kapható:

$$U(r, t) = \int_0^t h(t-t') U_0(r, t') dt',$$

ahol $U_0(r, t')$ a pillanateszerű kibocsátás esetére kapott megoldás. (4.2) alapján $U_0(r, t')$ beírható:

$$U(r, t) \sim \int_t^0 \frac{h(t-t') \exp\left[-\frac{r^2}{4\kappa t'}\right]}{(\kappa t')^{3/2}} dt'. \quad (4.12)$$

Innen kvalitatív becslést végezhetünk az intenzitás és az anizotrópia időbeli változására [27]. Mivel $U_0(r, t')$ t' nagy értékeire $t'^{-3/2}$ hatvánnyal csökken, így, ha $h(t)$ gyorsabban csökken, mint $t^{-3/2}$, akkor az integrálban a $t' \approx t$ rész adja a nagyobb járulékot, azaz a földpálya mentén a régen kibocsátott, idős részecskék vannak többségben. Az „öreg” részek már közel izotróp eloszlást mutatnak, így ebben az esetben az anizotrópia zérus értékhez tart. Ha viszont $h(t)$ lassabban csökken, mint $t^{-3/2}$, akkor a flerjelenség kezdete után hosszú idővel a Föld körül a nem régen kibocsátott, „fiatal” részecskék lesznek többségben. (Az integrálban a $t' \approx 0$ rész adja a döntő járulékot.) A fiatal részecskék még jelentős anizotrópiát mutatnak, ezért ebben az esetben az anizotrópia véges értékhez tart, fellép egy „maradék anizotrópia”.

A fler-jelenségek tárgyalására más irányú kísérletek is történtek. *Fisk* és *Axford* [31] kidolgozta az erősen anizotróp eloszlásra vonatkozó egyenleteket. Ebben az elméletben a részecskék sebessége csupán kétféle irányú lehet, a mágneses térrel egyező, illetve ellentétes.

Forman [33] számításában figyelembe vette, hogy a naprendszer határán a részecskék szabadon kifolyhatnak, ami a számolásban egy $U(L)=0$ határfeltétellel vehető figyelembe. (L a naprendszer határát jelentő távolság.) Az intenzitás *Forman* számításai szerint a maximumot követően 10–20^h bomlási idővel exponenciálisan csökken, ha $L \approx 2-3$ AU értéket tételezünk fel.

Az itt közölt számítások által meghatározott anizotrópia a mágneses tér irányába mutat. Ehhez járul még a konvekciós áram azimutális komponense által létrehozott „korotációs jelenség” (lásd 3. ábra).

Ennek figyelembevételével *Axford* [26] meghatározta nemcsak az anizotrópia-vektor nagyságának, hanem irányának az időbeli változását is.

5. Forbush-csökkenések

1938-ban *Forbush* észlelte először, hogy a mágneses viharok a kozmikus sugárzási intenzitás hirtelen csökkenését eredményezik. A felfedezőjéről Forbush-effektusnak nevezett éles intenzitáscsökkenés, majd lassú relaxáció a napszél-plazmában létrejövő lökeshullámoknak tulajdonítható. Míg a kvázistacionárius modulációt a napszél egyensúlyi állapota határozza meg, a Forbush-csökkenés a napszélben lejátszódó dinamikai folyamatokat tükrözi. A napszélben kialakuló lökeshullámban összesűrűsödött mágneses erővonalak, mintegy mágneses falat alkotva, visszaverik a kozmikus sugárzási részeket. Amikor a lökésfront áthalad a Földön, a front mögötti kisebb intenzitás a Földön hirtelen intenzitáscsökkenésként jelentkezik.

A mágneses tér reflektáló képességének meghatározásához vizsgáljuk meg, hogyan mozognak a töltött részecskék egy mágneses határfelületen keresztül (8. ábra). Legyen az I., illetve II. térrészben a mágneses tér erőssége B_1 és B_2 , míg a felület normálisával bezárt szögük θ_1 és θ_2 .

Mivel a mágneses tér normális irányú komponense folytonosan változik a határfelületen, ezért

$$B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2. \quad (5.1)$$

Legyen $\theta_1 < \theta_2$, így $B_1 < B_2$. Belátható, hogy bármely, a II. térrészből a határfelületre érkező részecske pályája az I. térrészben folytatódik, ezzel szemben az I. térrész felől érkezők egy része visszaverődik a határfelületen. (Mindkét esetben előfordulhat, hogy a részecske rövid időre felváltva az I. és II. térrészben tartózkodik, de néhány fordulat után végleg az egyik térrészben mozog tovább.)

Ha a részecskeeloszlás izotróp az I. térrészben, akkor a II. térrész felé mozgó részecskék fluxusa a mágneses térre merőleges felületelemre $Nv/4$ lesz, ahol N a részecskesűrűség, v a sebesség. A Liouville-tétel értelmében a mágneses tér nem hoz létre inhomogenitást és anizotrópiát, így a II. térrészbéli sűrűség és fluxus ugyancsak N , illetve $Nv/4$ lesz. A mágneses térre merőleges felületek arányából így az I. térrészből a II.-be való áteresztő-képességre a

$$t_r = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \quad (5.2)$$

transzmissziós tényező adódik [5].

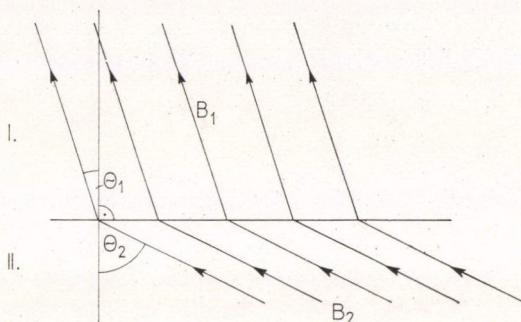
Az 1969. február 26-án észlelt Forbush-csökkenés esetében kitűnő alkalom kínálkozott a különféle elméleteknek a kísérleti adatokkal való szembesítésére, ugyanis ebben az időszakban az interplanetáris tér három különböző pontjáról álltak rendelkezésre űrszondák révén nyert mérési adatok. A kapott adatokat Quenby [34] három elmélet által becsült értékekkel vetette össze.

a) Lassú perturbáció

Kvázistacionárius moduláció esetén a földpálya mentén a kozmikus sugárzás intenzitása (3.1.4) szerint

$$U_{st} = U_{\infty} \exp \left[- \int_{r_e}^L \frac{\mu + 2}{3} \frac{V}{\kappa_{\parallel}} \frac{1}{\cos^2 \theta} dr' \right] \quad (5.3)$$

U_{∞} a modulálatlan spektrum, μ a spektrumkitevő, κ_{\parallel} a diffúziós együttható a mágneses tér irányában, míg θ a mágneses térnek a radiális iránnyal bezárt szöge. A mérések szerint a front mögött a napszél sebessége 30%-kal haladta meg a front előtt mért értéket, a diffúziós állandó harmadrésére csökkent, míg a θ szög 45° -ról 64° -ra változott. Ha feltételezzük, hogy a moduláció kvázistacionárius marad, vagyis érvényben marad az (5.3) formula, akkor a földpálya mentén mért intenzitás nem változik, míg a front el nem éri a Földet, ha viszont a front $r_1 > r_e$ távolságban



8. ábra. Mágneses tér a határfelület két oldalán

van a Naptól, akkor (feltéve, hogy $r_1 - r_e$ nem nagy) az intenzitás az

$$U_1 = U_{st} \exp \left[-\frac{\mu + 2}{3} \left(\frac{V'}{\kappa'_{\parallel} \cos^2 \theta'} - \frac{V}{\kappa_{\parallel} \cos^2 \theta} \right) (r_1 - r_e) \right] \quad (5.4)$$

értékre változik, ahol U_{st} a stacionárius egyensúlyi intenzitás, míg a vesszős mennyiségek a front mögött mért értékeket jelölik. A mért adatokkal számolva a kvázi-stacionárius modulációnak egy ilyen perturbációja a front áthaladását követően három nappal 4% intenzitáscsökkenést eredményezhet. Ez összeférhet a mért 6% csökkenéssel, ugyanakkor azonban néhány állomáson igen éles intenzitáscsökkenést tapasztaltak (két óra alatt 1,5%), amiről ez a modell nem tud számot adni.

A perturbált moduláció szerepet játszhat lassú intenzitáscsökkenéseknél vagy az egyensúlyi helyzethez való visszatérés fázisában, de más modellt kell keresnünk az éles csökkenések magyarázatára.

b) Lökéshullám modell

Parker [35] modelljében feltételezte, hogy a gyorsabban haladó napszél az előtte haladó lassúbb réteget utolérve, gömbszimmetrikusan kifelé terjedő lökeshullámot hoz létre. Legyen a front előtt, illetve mögött mért részecskesűrűség U_0 és U , míg a mágneses tér radiális iránnyal bezárt szöge θ_0 és θ . Ekkor a front által meghatározott gömbön belül található részecskék számának változását a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{4\pi}{3} r^3 U \right) = 4\pi r^2 \left(\frac{U_0 v}{4} t_r \cos \theta_0 - \frac{Uv}{4} \cos \theta + U_0 V t_r \right) \quad (5.5)$$

egyenlet írja le. A jobb oldalon álló első és második tag az időegység alatt a határfelületen át behatoló, illetve kijutó részecskék számát adja meg, míg a harmadik tag a front mozgását veszi figyelembe.

Ha $\Delta U = U - U_0$ jelöli az intenzitáskülönbséget ($\Delta U > 0$), akkor a $dU/dt \leq 0$ feltételből, $dr/dt = V$ és $t_r = \cos \theta / \cos \theta_0$ figyelembevételével

$$\frac{\Delta U}{U_0} \leq \frac{4V}{v \cos \theta_0} \left(1 - \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right) \quad (5.6)$$

adódik. Az (5.6) kifejezés megadja a maximális intenzitáskülönbséget, ugyanis az intenzitás tovább már nem fog csökkenni, ha elérte az (5.6) által adott értéket.

A napszél-sebességre (V), és a mágneses tér radiális iránytól való elhajlására (θ) mért értékeket az (5.6) kifejezésbe írva kitűnik, hogy, noha ez a modell meg tudja magyarázni az intenzitás gyors csökkenését, ahhoz, hogy $\approx 10\%$ teljes intenzitáscsökkenést kapjunk, θ értékére fizikailag valószínűtlen, „extrém nagy” $\approx 90^\circ$ értéket kellene feltételeznünk.

c) Tangenciális diszkontinuitás

A harmadik modell *Gold* [36] mágneses nyelv modelljének módosított változata. A gyorsabb napszél a lassúbbat utolérve kettős lökeshullámot kelt, amelyeket egy kontakt felület választ el. *Belcher* és *Davis* [37] mutattak rá arra, hogy az elválasztó felület lehet tangenciális diszkontinuitás, vagyis egy olyan felület, ahol

a mágneses térnek nincs normális irányú komponense. Ebben az esetben a részecskék csak a mágneses térerősség gradiense által létrehozott driftmozgással tudnak át-diffundálni az elválasztó felületen, amiből az intenzitáscsökkenésre

$$\frac{\Delta U}{U_0} \lesssim 1 - \frac{v_{0,d}}{v_d} \quad (5.7)$$

adódik, ahol $v_{0,d}$ és v_d a driftsebességek a felület két oldalán. A driftsebességeket a térerősséggradiensek határozzák meg. Mivel a térerősséggradiensek aránya 0,3 is lehet, így elképzelhető akár 70%-os Forbush-csökkenés is. Ilyen nagy Forbush-eséseket nem észleltek, ennek valószínű oka az, hogy a diszkontinuitási felület nem teljes, „lyukak” vannak rajta, ami megkönnyíti a kozmikus sugárzás bediffundálását.

Quenby analízise szerint az látszik legvalószínűbbnek, hogy a nagy Forbush-csökkenéseket ez a mechanizmus okozza, míg a későbbi fázisokban szerepet játszhat a lassú modulációs hatás is [a] modell].

A Forbush-effektus érdekes sajátossága az anizotrópia megnövekedése, valamint a csökkenést megelőző kismértékű intenzitásnövekedés. A kiterjedő front maga előtt söpri a kozmikus sugárzási részeket, amelyek így a front előtt összetorlódnak, majd a fler-részekhez hasonlóan diffúzióval oszlanak szét. Ily módon a hullámfront mintegy részecskeforrást jelent, és az általa kisöppört részecskéket észleljük mint intenzitásnövekedést, ugyanakkor ezen részecskék árama anizotrópiát is létrehoz.

A csökkenést követő megnövekedett anizotrópia az egyensúlyi helyzet megbontása következtében fellépő áramokkal kapcsolatos, de pontosabb természetük még nincs megnyugtatóan tisztázva.

Mind a tranziens, mind a kvázistacionárius moduláció vizsgálatában forradalmi változást hozott az űrszondák megjelenése. Jelenleg az elmélet legnagyobb nehézsége abban áll, hogy csak a Föld környezetében történtek mérések. Újabb nagy fejlődés várható ezért a közeljövőben, amikor lehetségessé válik a Naptól távoli és a Naphoz közeli tartományok kísérleti vizsgálata is.

Függelék

A kozmikus sugárzás naprendszerbeli terjedését leíró (2.3.12a), (2.3.12b) egyenletek az egyszerű konvekciós-diffúziós modell pontosabbá tételével adódtak. Noha az egyszerű képet módosító hatások figyelembevétele helyes fizikai képen alapult, a levezetés mégis „ad-hoc”-nak tűnhetett. Mint azonban Axford és Gleeson [38] megmutatta, a (2.3.12a), (2.3.12b) terjedési egyenletekhez a statisztikus Boltzmann-egyenletből közvetlenül, külön feltevések nélkül is eljuthatunk. A terjedési egyenleteknek a Boltzmann-egyenletből való származtatása az elmélet egységessé tételén kívül még egy előnnyel rendelkezik, nevezetesen pontosan nyomonkövethetők az adódó egyenletek érvényességi feltételei.

Legyen a fázistér $d^3\vec{r}d^3\vec{p}$ térfogatában található részecskék száma $f(\vec{r},\vec{p})d^3\vec{r}d^3\vec{p}$. Ekkor az $f(\vec{r}, \vec{p})$ sűrűségfüggvényre érvényes a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}_r(\dot{\vec{r}}f) + \text{div}_p(\dot{\vec{p}}f) = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{ütk}} \quad (F.1)$$

Boltzmann-egyenlet. A div mellett álló r és p jelzés arra utal, hogy a divergenciaképzést a koordináta, ill. impulzustérben kell elvégezni, míg a jobb oldalon álló tag az ütközések során bekövetkező impulzusváltozást írja le, ahol ütközésen esünkben a mágneses irregularitásokon való szóródást értjük.

Fejtsük ki az $f(\vec{r}, \vec{p})$ sűrűségfüggvényt az impulzustérbeli gömbfüggvények szerint, és szorítkozzunk a nullad- és elsőrendű tagok figyelembevételére. A mérések alátámasztják ennek a közelítésnek a jogosságát, ugyanis az interplanetáris térben a kozmikus sugárzás közel izotróp, és a megfigyelt napi változás közel szinuszos, ami arra utal, hogy az eloszlás magasabb momentumai ebben a közelítésben elhanyagolhatók. A részletesebb matematikai analízis szintén arra vezet, hogy, habár feltétlenül vannak az eloszlásnak magasabb momentumai is, ezek csak a finomabb jelenségek (pl. félnapos változás) vizsgálatában játszanak szerepet. A sűrűségfüggvény a fent leírt közelítésben ekkor

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = n(\vec{r}, p) + \vec{j}(\vec{r}, p) \cdot \vec{p} \quad (\text{F.2})$$

alakban írható, ahol n és \vec{j} csak az impulzus abszolút értékétől függ.

Az $n(\vec{r}, p)$ és $\vec{j}(\vec{r}, p)$ mennyiségek fizikai jelentése látható lesz, ha kiszámítjuk azon részecskék számát és fluxusát, amelyek impulzusának nagysága p és $p + dp$ közé esik. Az

$$U(\vec{r}, p) dp = \int f(\vec{r}, \vec{p}) p^2 dp d\Omega$$

$$\vec{S}(\vec{r}, p) dp = \int \vec{v} f(\vec{r}, \vec{p}) p^2 dp d\Omega$$

egyenletekből a sűrűségfüggvény (F. 2) szerinti alakját felhasználva kapjuk:

$$U(\vec{r}, p) = 4\pi p^2 n(\vec{r}, p) \quad (\text{F.3})$$

$$\vec{S}(\vec{r}, p) = \frac{4\pi}{3} v p^3 \vec{j}(\vec{r}, p),$$

ahol \vec{v} a részecske sebességét jelöli. Látható, hogy az n és \vec{j} mennyiségek a részecskeszám- és áramsűrűséggel vannak egyszerű kapcsolatban. Könnyen kiszámítható az anizotrópiavektor is:

$$\vec{\zeta}(\vec{r}, p) = \frac{3\vec{S}}{vU} = p \frac{\vec{j}}{n}. \quad (\text{F.4})$$

ami azt jelenti, hogy $p|\vec{j}| \ll n$ közel izotróp eloszlás esetén.

Képezzük az (F. 1) Boltzmann-egyenlet nulladik és első momentumát, vagyis hassunk az egyenletre az $\frac{1}{4\pi} \int d\Omega$ és $\frac{1}{4\pi} \int \vec{p} d\Omega$ operátorokkal. Ekkor sorban kiszámolhatók az egyes tagokból adódó momentumok.

A Boltzmann-egyenlet bal oldalán álló első tag momentumai egyszerűen kaphatók

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial f}{\partial t} d\Omega &= \frac{\partial n}{\partial t} \\ \frac{1}{4\pi} \int \vec{p} \frac{\partial f}{\partial t} d\Omega &= \frac{p^2}{3} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

A bal oldal második tagjában $\dot{\vec{r}}$ helyett a \vec{v} sebességet írva a momentumokra az

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div}_r(\vec{v}f) d\Omega &= \frac{pv}{3} \operatorname{div} j \\ \frac{1}{4\pi} \int \vec{p} \operatorname{div}_r(\vec{v}f) d\Omega &= \frac{pv}{3} \operatorname{grad} n\end{aligned}\quad (\text{F.6})$$

kifejezések adódnak.

A harmadik tagban $\dot{\vec{p}}$ helyére a Lorentz-erő kerül:

$$\dot{\vec{p}} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

ahol \vec{E} és \vec{B} az elektromos és mágneses térerősséget jelöli. (A fénysebességet most és a későbbiekben is egységnyiinek vesszük.) Felhasználva, hogy n és j csak az impulzus abszolút értékétől függ, a bal oldalon álló harmadik tag azonosan átalakítható:

$$\operatorname{div}_p(\dot{\vec{p}}f) = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \left(\frac{\partial n}{\partial p} \frac{\vec{p}}{p} + j + \frac{\vec{p}_0 \vec{p}}{p} \frac{\partial j}{\partial p} \right),$$

és ebből számolhatók a momentumok:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div}_p(\dot{\vec{p}}f) d\Omega &= e \left(\vec{E}j + \frac{p}{3} \frac{\partial}{\partial p} (\vec{E}j) \right) \\ \frac{1}{4\pi} \int \vec{p} \operatorname{div}_p(\dot{\vec{p}}f) d\Omega &= e \left(\frac{p}{3} \frac{\partial n}{\partial p} \vec{E} + \frac{pv}{3} (\vec{B} \times j) \right).\end{aligned}\quad (\text{F.7})$$

Meghatározandók még a Boltzmann-egyenlet jobb oldalán álló ütközési tag momentumai. Feltételezzük, hogy a napszéllel együtt mozgó rendszerben a mágneses irregularitásokon való szóródás izotróp és rugalmas. A napszél nagy energiasűrűsége miatt itt eltekintünk attól, hogy a kozmikus sugárzási részecskék a mozgó irregularitásokon szóródva fékezik a napszél kifelé terjedését, így az ütközés nem tökéletesen rugalmas.

Egy Lorentz-transzformációt végrehajtva, menjünk át a napszéllel együtt mozgó rendszerbe, majd itt kiszámítva az ütközési tagot, egy újabb transzformációval térjünk vissza az eredeti rendszerbe. A számítást elvégezve adódik a

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{ütk}} = \frac{v' E'}{\lambda(p') E} \left[\frac{1}{4\pi} \int f' d\Omega' - f' \right] \quad (\text{F.8})$$

ütközési integrál. A vesszős mennyiségek a mozgó koordináta-rendszerben értendők, λ az ütközési szabad úthossz. Itt kihasználtuk, hogy a mozgó rendszerben a szórás izotróp és rugalmas, így v' és $\lambda(p')$ kiemelhető az integrálból.

Használjuk fel, hogy az $f(\vec{r}, \vec{p})$ sűrűségfüggvény Lorentz-transzformációkkal szemben invariáns [13], vagyis

$$f'(\vec{r}', \vec{p}') = f(\vec{r}, \vec{p}). \quad (\text{F.9})$$

\vec{p}' és \vec{p} között a Lorentz-transzformáció létesít kapcsolatot. A napszél \vec{V} sebessége szerinti sorfejtésben a másodrendű tagokig haladva a Lorentz-transzformációból

$$\vec{p} = \vec{p}' + E' \vec{V} + \frac{1}{2} (\vec{p}' \cdot \vec{V}) \vec{V} \quad (\text{F.10})$$

adódik. Ezután az $f'(\vec{r}', \vec{p}') = f(\vec{r}, \vec{p})$ sűrűségfüggvényt p' körül sorbafejtve (F. 10), valamint az eloszlás (F. 2) szerinti alakjának felhasználásával kiszámítható az (F. 8) ütközési integrál. A mozgó rendszerből újabb transzformációval visszatérve az eredeti rendszerbe, a sorfejtést nV^2 , illetve $j\vec{V}$ rendű tagokig végezve, az ütközési tag momentumaira az

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{ütk}} d\Omega &= \frac{1}{3p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^4}{\lambda(p)} \left(j\vec{V} + \frac{1}{v} \frac{\partial n}{\partial p} V^2 \right) \right] \\ \frac{1}{4\pi} \int \vec{p} \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{ütk}} d\Omega &= -\frac{v}{\lambda(p)} \frac{p^2}{3} \left[j + \frac{1}{v} \frac{\partial n}{\partial p} \vec{V} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

kifejezések nyerhetők.

A Boltzmann-egyenlet egyes tagjaiból adódó momentumok ismeretében felírhatók a momentum-egyenletek. Az n és j mennyiségekről (F. 3) alapján áttérve a használatosabb $U(\vec{r}, p)$ sűrűsége és $\vec{S}(\vec{r}, p)$ fluxusra, (F. 5), (F. 6), (F. 7) és (F. 11) felhasználásával a következő momentum-egyenletek adódnak:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div } \vec{S} = \vec{V} \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{E\vec{S}}{\lambda} + \frac{Ep^3}{3\lambda} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{U}{p^2} \right) \vec{V} + \frac{e(\vec{B} \times \vec{S})}{v} \right] \quad (\text{F.12.a})$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \frac{v}{3} \text{grad } U + \frac{1}{p} e\vec{B} \times \left[\vec{S} + \frac{p^3}{3} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{U}{p^2} \right) \vec{V} \right] = -\frac{1}{\lambda} \left[\vec{S} + \frac{p^3}{3} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{U}{p^2} \right) \vec{V} \right]. \quad (\text{F.12.b})$$

Itt felhasználtuk, hogy $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{V}$, mivel a napszéllel együtt mozgó részecskékre a Lorentz-erő eltűnik.

Az (F. 12a) egyenlet jobb oldala átalakítható, figyelembe véve az (F. 12b) egyenletet

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div } \vec{S} = -\frac{\vec{V}}{3} \frac{\partial}{\partial p} \left[\text{grad } (Up) + \frac{3p}{v^2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \right] \quad (\text{F.13})$$

alakra hozható. Ha a változások karakterisztikus ideje lényegesen nagyobb a $\tau = \lambda/v$ ütközési időnél, akkor \vec{S} időbeli változása elhanyagolható, és így a

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div } \vec{S} = -\frac{\vec{V}}{3} \text{grad } \left[\frac{\partial}{\partial p} (Up) \right] \quad (\text{F.14a})$$

$$\left[\vec{S} + \frac{p^3}{3} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{U}{p^2} \right) \vec{V} \right] + \frac{\lambda}{p} e\vec{B} \times \left[\vec{S} + \frac{p^3}{3} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{U}{p^2} \right) \vec{V} \right] = -\frac{v\lambda}{3} \text{grad } U \quad (\text{F.14b})$$

egyenletekhez jutunk, amelyek azonosak a terjedést leíró (2.3.12a) egyenletekkel, ha az (F. 14b) összefüggést „invertálva” kifejezzük az \vec{S} áramot az U sűrűség függvényében.

Az (F. 14a), (F. 14b) egyenletek akkor érvényesek, ha feltevéseink teljesülnek, vagyis az eloszlás közel izotróp, és az elsőrendűnél magasabb momentumok elhanyagolhatók. További feltétel, hogy a változások lassúak legyenek a τ ütközési időhöz viszonyítva, és a szórás valóban izotróp legyen a napszéllel együtt mozgó rendszerben. Kvázistacionárius moduláció vizsgálatok ezek a feltételek teljesülnek, a fler-jelenéseknél azonban a kezdeti szakaszban a változások gyorsak, így az áram időfüggését is magában foglaló egyenletekből kell kiindulnunk.

A vázolt számításban nem vettük figyelembe a sűrűségfüggvény magasabb momentumait. Ezért a kapott egyenletek jó eredményt adhatnak a részecskesűrűségre és anizotrópiára, de nem tudnak számot adni a félnapos periodicitásról, amelyet éppen a sűrűségfüggvény második momentumok okoz. Ha tehát a félnapos változás vizsgálatát tűzzük ki célul, akkor az $f(\vec{r}, \vec{p})$ sűrűségfüggvény sorfejtésében figyelembe kell vennünk a második momentumokat is. Belátható, hogy ez nem okoz lényeges változást az (F. 14a, b) egyenletekben, és egy újabb egyenlet nyerhető a Boltzmann-egyenlet második momentumának képzésével. Az így kapott egyenlet kapcsolatot létesít az eloszlás második momentumával, valamint az áram és sűrűség, illetve ezek deriváltjai között.

IRODALOM

1. W. Thompson, Bevezetés a plazmafizikába, Műszaki Könyvkiadó, 1970, 63. old.
2. E. N. Parker, Interplanetary Dynamical Processes, Interscience Publ., New York, 1963, 138. old.
3. Ugyanott, 171. old.
4. Ugyanott, 115. old.
5. Ugyanott, 167. old.
6. N. F. Ness, Proc. 11th Int. Conf. on Cosmic Rays, 1969, Invited papers and Rapporteur Talks, 41. old.
7. K. H. Schatten, N. F. Ness, J. M. Wilcox, Solar Phys., 5, 240, 1968.
8. P. Meyer, Annual Rev. of Astronomy and Astrophys., 4, 1, 1969.
9. J. R. Jokipii, Astrophys. J., 146, 480, 1966 és 149, 405, 1967.
10. E. N. Parker, NASA—NsG—96—60, 1965.
11. J. W. Belcher, L. Davis Jr., E. J. Smith, J. Geophys. Res., 74, 2302, 1969.
12. J. R. Jokipii, E. N. Parker, Phys. Rev. Lett., 21, 44, 1968.
13. B. Rossi, S. Olbert, Introduction to the Physics of Space, New York, McGraw Hill, 1970.
14. L. J. Gleeson, W. I. Axford, Astrophys. Space Sci., 2, 431, 1968.
15. E. N. Parker, Planet. Space Sci., 13, 49, 1965.
16. E. N. Parker, Planet. Space Sci., 12, 735, 1964.
17. A. J. Somogyi, Acta Phys. Acad. Sci. Hung., 32, 261, 1972.
18. L. J. Gleeson, IPAPS 67/68—232, 1968.
19. T. Mathews, J. J. Quenby, J. Sear, Nature, 229, 246, 1971.
20. L. J. Gleeson, W. I. Axford, Astrophys. J., 154, 1011, 1968.
21. L. A. Fisk, W. I. Axford, L. J. Gleeson, Acta Phys. Acad. Sci. Hung., 29, S2, 105, 1970.
22. L. A. Fisk, W. I. Axford, IPAPS 68/69—282, 1969.
23. L. A. Fisk, W. I. Axford, J. Geophys. Res., 74, 4973, 1969.
24. L. J. Gleeson, Astrophys. Space Sci., 10, 471, 1971.
25. L. J. Gleeson, S. M. Krimigis, W. I. Axford, J. Geophys. Res., 76, 2228, 1971.
26. W. I. Axford, Trudü Mezsdunarodnogo Szeminara, Leningrád, 1970, 154. old.
27. L. A. Fisk, W. I. Axford, Solar Phys., 12, 304, 1970.
28. E. N. Parker, Proc. 11th Int. Conf. on Cosmic Rays, 1969, Invited papers and Rapporteur Talks, 341.
29. E. N. Parker, Interplanetary Dynamical Processes, Interscience Publ., New York, 1963, 208. old.
30. L. A. Fisk, W. I. Axford, J. Geophys. Res., 73, 4396, 1968.
31. L. A. Fisk, W. I. Axford, Solar Phys., 7, 486, 1969.
32. L. F. Burlaga, J. Geophys. Res., 72, 4449, 1967.
33. M. A. Forman, J. Geophys. Res., 76, 759, 1971.
34. J. J. Quenby, Proc. 12th Int. Conf. on Cosmic Rays, Hobart, 3, 730, 1971.
35. E. N. Parker, Astrophys. J., 133, 1014, 1961.
36. T. Gold, J. Geophys. Res., 64, 1665, 1959.
37. J. Belcher, L. Davis Jr., J. Geophys. Res., 76, 3534, 1971.
38. L. J. Gleeson, W. I. Axford, Astrophys. J., 149, L115, 1967.

A GALAKTIKUS KOZMIKUS SUGÁRZÁS MODULÁCIÓJA A NAPRENDSZERBEN

VÁLAS GYÖRGY

MTA Központi Fizikai Kutató Intézete, Budapest

A dolgozat a legújabb kísérleti eredmények tükrében foglalja össze a bolygóközi tér szerkezetéről a kozmikus sugárzás segítségével szerzett ismereteinket.

Bevezetés

A galaktikus kozmikus sugárzás a naprendszerben a mágneses tér és a bolygóközi plazma hatására modulálódik, sűrűsége csökken az interstelláris térhez képest [5]. Ennek tanulmányozása kettős célt szolgál.

1. A moduláció pontos megismerése lehetővé teszi, hogy megfelelő korrekciót végezzünk rá, és így adatokat nyerjünk a modulálatlan sugárzásra vonatkozóan.

2. A moduláció fontos ismereteket nyújt az őt létrehozó bolygóközi tér szerkezetéről.

Ami az első célt illeti, annak elérésétől jelenlegi ismereteinkkel még nagyon messze vagyunk. Még a galaktikus kozmikus sugárzás intenzitását sem ismerjük azokon az energiákon, ahol a moduláció hatásos. Jobb híján néha az eddig észlelt legnagyobb intenzitást szokták a modulálatlan intenzitásnak tekinteni [6], de ez nyilvánvalóan nagyon durva közelítés, hiszen egyenértékű lenne azzal, hogy minimális naptevékenységkor a modulációs tartomány sugara kisebb egy csillagászati egységnél, és így a Föld kívül kerül rajta, ami ellentmond a kísérleti eredményeknek. A moduláció mélysége feltehetőleg 10–20% körül van, a közelítés tehát ennyire jó. Hasonlóan durva közelítés az is, ha a nagyenergiájú kozmikus sugárzás spektrumát akarjuk extrapolálni kisebb energiákra, hiszen ez sok nagyságrendre való extrapolálást jelentene. Ezekre a kérdésekre tehát csak a — nem is nagyon közeli — jövő hozhatja meg a választ.

Sokat tudunk azonban a második kérdésre, a bolygóközi tér szerkezetére vonatkozóan, és ez a jelen dolgozat témája. A téma nagysága és a szűkre szabott terjedelem azonban korlátozásokat tesz szükségessé. Csak a kozmikus sugárzásban legtömegesebben jelen levő protonok modulációjával foglalkozhatunk, az elektronokéval és összetett magokéval nem, bár *Webber* [7] szerint ezek is nagyon fontos információkat hordoznak. Nem szakíthatunk időt a metodikai kérdésekre, az intenzitásváltozások meghatározására szolgáló készülékek és matematikai módszerek leírására sem. Alig foglalkozunk azzal, mennyiben nehezítik a moduláció vizsgálatát a meteorológiai és mágneses hatások. Mellőznünk kell minden olyan részletet is, amely az általános kép szempontjából másodrendű.

A kozmikus sugárzás intenzitásváltozásainak vizsgálata a harmincas évek elején indult meg, nem sokkal azután, hogy a sugárzás Földön kívüli eredete egyértelműen bebizonyosodott [8]. Az első feladat ekkor a földi eredetű változások kiszűrése volt. Az első három évtizedben sikerült tisztázni a meteorológiai [9] és geomágneses [10] hatásokat, és azok figyelembevételének módjait. Ugyanebben az időszakban felismerték a moduláció különböző fenomenológiai típusait (3. táblázat), és bebizonyították azok Földön kívüli eredetét, ami néha elég nehéz probléma volt, hiszen a me-

teorológiai és geofizikai hatásoknak épp olyan periodicitásaik vannak, mint a kozmikus sugárzás intenzitásának.

Az ötvenes évek végére kialakult a kutatások jelenlegi célja: a bolygóközi tér vizsgálata a kozmikus sugárzás segítségével. Ekkor két esemény adott nagy lendületet a további munkának. Egyrészt a Nemzetközi Geofizikai Év során ugrásszerűen megnőtt a problémakörrel foglalkozó kutatók és a működő készülékek száma, standardizált készülékek jelentek meg, megindult a nemzetközi adatcsere, globális megfigyelőhálózat alakult ki az addigi többé-kevésbé elszigetelt centrumok helyett. Másrészt az ürrepülés megindulásával megkezdődtek a kozmikus sugárzás intenzitásának és a mágneses térnek a közvetlen űrbeli mérései, később pedig az összehangolt földi-űrbeli mérések. Ennek a komplex munkának az eredményeképpen körülbelül napjainkra alakult ki egy többé-kevésbé egységes kvalitatív kép a kozmikus sugárzás modulációjáról, amely ugyan még sok tekintetben igazolásra szorul, mégis jó alapot nyújt arra, hogy segítségével most már konkrét kérdésekre keressünk kvantitatív választ.

A közvetlen űrbeli mérések mellett miért van szükség arra, hogy a kozmikus sugárzás segítségével is vizsgáljuk a bolygóközi tér szerkezetét, és az űrbeli kozmikus sugárzási mérések mellett miért van szükség földi mérésekre is? Az okok a következők:

1. A mesterséges égitestekkel a naprendszernek egyelőre nagyon kis részét érjük el. Az összes eddigi mesterséges égitest nagyjából az Ekliptika síkjában, a Vénusz és a Mars pályája közötti részen maradt, és még sokáig csak egyes elszigetelt mérések várhatók ennél távolabbról. A kozmikus sugárzás áthalad az egész naprendszeren, tehát a távolabbi térségekről is hoz információt.
2. A mesterséges égitestekkel a kozmikus sugárzásnak csak a viszonylag kis energiájú komponensét lehet vizsgálni, mert egyrészt a szükséges abszorbensvastagság miatt, másrészt a kis intenzitás megkövetelte nagy detektorfelület miatt a nagyobb energiákra a detektorok túl nehezek. A földi méréseknél a nagy súly kevésbé zavar.
3. Az űrbeli mérések korlátozott ideig tartanak. A földi mérések folyamatosak lehetnek.
4. A közvetlen űrbeli mérések mindig lokális mérések, amelyekből a nagy ingadozások miatt nehéz megkapni az általános képet. A kozmikus sugárzás viszont nagy térségre átlagolt képet mutat. Annak a térségnek a sugara, melyre a kozmikus sugárzás átlagol, kb. megegyezik a részecskék mágneses girorádusával (1. táblázat).

1. TÁBLÁZAT

Különböző kinetikus energiájú protonok merevsége és girorádusza 5γ erősségű mágneses térben

E_{kin}	R	r	
1 MeV	43 MV	$0,03 \cdot 10^6$ km	0,0002 Cs. E.
10 MeV	138 MV	$0,09 \cdot 10^6$ km	0,0006 Cs. E.
100 MeV	445 MV	$0,3 \cdot 10^6$ km	0,002 Cs. E.
1 GeV	1,70 GV	$1 \cdot 10^6$ km	0,007 Cs. E.
10 GeV	10,8 GV	$7 \cdot 10^6$ km	0,05 Cs. E.
100 GeV	101 GV	$70 \cdot 10^6$ km	0,5 Cs. E.
1 TeV	1 TV	$700 \cdot 10^6$ km	5 Cs. E.
10 TeV	10 TV	$7000 \cdot 10^6$ km	50 Cs. E.

A részletes tárgyalás megkezdése előtt hasonlítsuk össze különböző energiájú protonok merevségét (lásd Függelék) és girorádusát (1. táblázat) a naprendszer méreteire jellemző mennyiségekkel: a bolygók pályasugaraival (2. táblázat). A girorádusokat a Föld környezetének átlagos 5γ ($5 \cdot 10^{-5}$ Gauss) erősségű mágneses terére számítottuk ki [7]. A mesterséges égitesteken végzett mérések néhány tized MeV-től néhány GeV-ig terjedő, a földi és föld alatti mérések kb. 2 GeV-től kb. 230 GeV-ig terjedő energiatartományban vizsgálják a modulációt.

A modulációs tartomány mérete

A galaktikus kozmikus sugárzás naprendszerbeli modulációjával kapcsolatban a legelső kérdés: mekkora az a tartomány, amelyben a galaktikus kozmikus sugárzás sűrűsége kisebb, mint a Galaxis környező részében (modulációs tartomány, solar cavity). A jelenlegi elképzelések nagyon tarkák. A modulációs tartomány sugarára a különböző becslések 2 Cs. E.-től [11] több mint 100 Cs. E.-ig [7] terjednek.

A napszél és a galaktikus mágneses tér nyomásegyensúlyából a heliopauza (a napszél külső határa) sugara ≈ 60 Cs. E.-nek adódik [12], de egyrészt lehet, hogy a modulációs tartomány sugara ennél kisebb, másrészt magát a becslést is nagyon bizonytalanná teszi, hogy egyáltalán semmit nem tudunk a modulációs tartománynak a Nap egyenlítői síkjára merőleges szerkezetéről.

A modulációs tartomány határáig eddig még egyetlen mesterséges égitestnek sem sikerült eljutnia. Igaz, eddig a naprendszer méreteihez képest elég kis távolságra jutottak, 1,5 Cs. E.-n (a Mars pályáján) egyik sem jutott túl, és valamennyi nagyon közel maradt a Nap egyenlítői síkjához.

Az első űrszonda, amelynek távolabbra kell jutnia, az 1972. március 2-án elindított Pioneer 10 Jupiter-szonda. Útja a Jupiter körzetéig 639 napig tart, majd a Jupiter elhagyása után további 5–8 évig remélnek kapcsolatot tartani vele. Ez alatt ≈ 30 Cs. E.-re távolodik a Naptól, tehát, mivel az 1976-ra várható legközelebbi naptevékenységi minimum idején még feltehetőleg működni fog, várható, hogy a naptevékenység minimuma körüli időben kívül kerül a modulációs tartományon, így egyrészt kiméri annak méretét, másrészt a műszerei által meghatározott energiatartományban kiméri a modulálatlan sugárzás intenzitását és spektrumát. A Pioneer 10-et 1973 április 5-én követte a Pioneer 11 Jupiter-szonda. Van olyan terv, hogy ennek pályasíkját a Jupiter perturbáló hatása segítségével átfordítják az Ekliptika síkjából arra kb. merőleges síkba. Ily módon ez lenne az első űrszonda, amely a Nap egyenlítői síkjától lényegesen eltávolodna, és így a bolygóközi térnek a Nap egyenlítői síkjára merőleges szerkezetéről is szolgáltatna információt. Ha ez a terv a Pioneer 11-el nem valósulna meg, végrehajtása akkor is ebben az évtizedben várható.

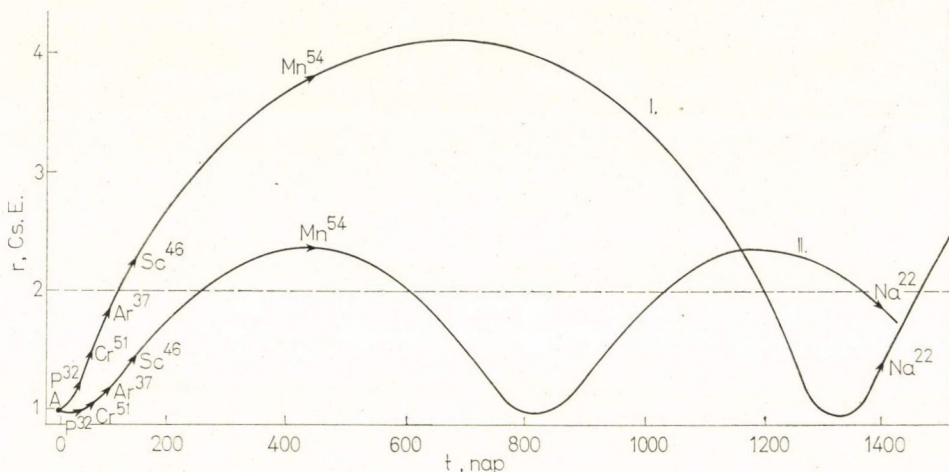
Amit a mesterséges égitestek ma még nem érnek el, azt meteoritok segítségével próbálta elérni néhány kutató. A kozmikus sugárzás a meteoritokban különböző élettartamú radioaktív izotópokat hoz létre, ezekből a meteorpálya különböző hosszúságú szakaszaira határozható meg a kozmikus sugárzás átlagos sűrűsége

2. TÁBLÁZAT

A bolygók hozzávetőleges pályasugara csillagászati egységekben

Merkur	0,4
Vénusz	0,7
Föld	1
Mars	1,5
Jupiter	5
Szaturnusz	10
Uránusz	20
Neptunusz	30
Pluto	40

(1. ábra). Ha ismerjük a meteor pályáját, mint az 1959. évi Pribram és az 1970. évi Lost City meteorit esetén, akkor tudjuk, milyen átlagos naptávolságnak felel meg ez a szakasz. Részben ebből, részben sok ismeretlen pályájú meteorit átlagos izotóp-arányából *Lavrukhina* [13] 2,0 Cs. E.-re becsülte a modulációs tartomány sugarát. Ugyancsak a Lost City meteoritból *Forman* és mások [14] ugyanilyen módon csak a kozmikus sugárzás sűrűségének gradiensére következtettek, anélkül, hogy a modu-



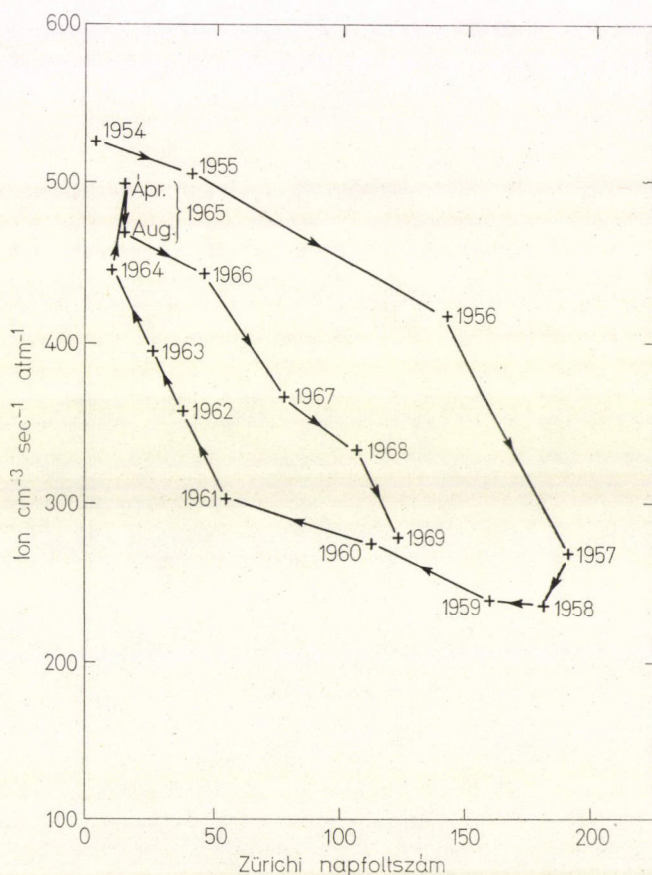
1. ábra. A Pribram (I. görbe) és Lost City (II. görbe) meteorok Naptól való távolságának változása. A — a földetérés pontja. A görbéken levő nyilak azoknak a szakaszoknak a végét jelzik, amelyeken az egyes radioaktív izotópok egyensúlyi koncentrációja kialakul [13]

lációs tartomány határának elérését állították volna. Sajnos, nagyon ritkán esik le úgy meteorit, hogy a pályája meghatározható legyen, ezért ilyen vizsgálat ritkán végezhető.

A modulációs tartomány sugarára legtöbbször a kozmikus sugárzás intenzitásának 11 éves periodicitásából próbálnak következtetni.

Ez a periodicitás a naptevékenység 11 éves periodicitásának következménye. Vizsgálatához hosszú ideig stabilan működő készülékekre van szükség. A kozmikus sugárzás intenzitásának és a naptevékenységre jellemzőnek tartott napfoltszámnak a 11 éves menetét összehasonlítva *Forbush* érdekes hiszterézis-jelenséget talált [15]. A kozmikus sugárzás változása lemaradt a napfoltszám változásától. A naptevékenység csökkenésekor azonos napfoltszámhoz kisebb intenzitás felelt meg, mint a naptevékenység növekedésekor. *Neher* [16] még azt is kimutatta, hogy a napfoltszámot és az intenzitást összehasonlítva a hiszterézisgörbe nem is zárul. A 19. napciklusban (1954–65) a szokásosnál sokkal erősebb volt a naptevékenység. Utána, a 20. napciklus elején (1965–69) azonos napfoltszámhoz alacsonyabb intenzitás tartozott (ballonon, 15 g/cm²-en mérve), mint a 19. napciklus hasonló időszakában (2. ábra). *Simpson* [17] kimutatta, hogy a hiszterézisgörbe által körülzárt terület fordítva arányos a merevséggel (3. ábra). A hiszterézist azzal magyarázta, hogy növekvő naptevékenységnél megnő, csökkenő naptevékenységnél összeesik a modulációs tartomány. A hiszterézisgörbe alakjából (a fáziskésés nagyságából) arra következtetett, hogy a modulációs tartomány sugara 5–30 Cs. E. között változik.

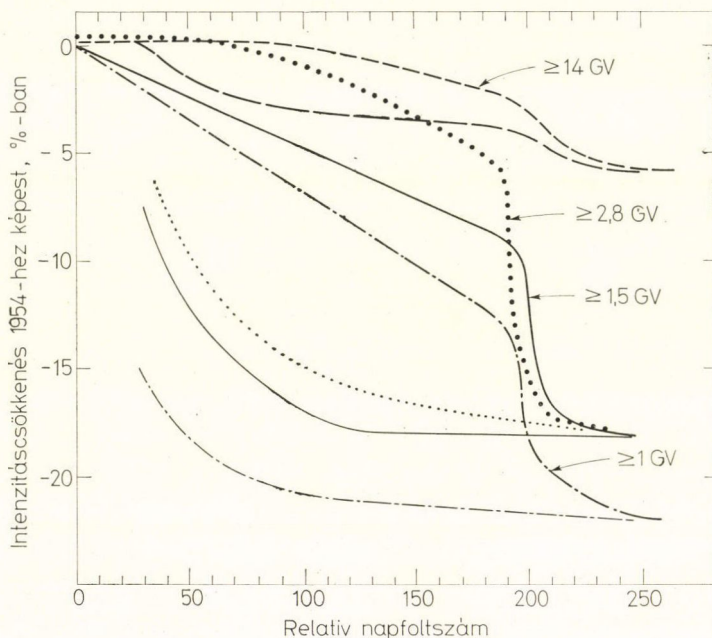
Kiderült azonban, hogy a napfoltszám nem megfelelően jellemzi a naptevékenységet. Másrészt nem a teljes napfelület aktivitása van kapcsolatban a kozmikus sugárzás intenzitásával a Föld körüli térségben és a Földön, hanem figyelembe kell venni az aktivitás heliografikus szélességi eloszlását is [18]. A napfoltszám helyett több más naptevékenységi jellemzővel próbálkoztak: különböző hullámhosszúságú rádiósugárzással, különböző spektrumvonalak intenzitásával stb. Ezek egymással mind jól korrelálnak, mégis különböző mértékű hiszterézist adtak, sőt, az is előfordult, hogy valamelyik jellemző használatakor a hiszterézis egészen eltűnt. Legtöbbször az 5303 Å hullámhosszúságú spektrumvonal (koronális zöld vonal, Fe_{XIV} vonal), alacsony heliografikus szélességeken mért intenzitását tartják a legjobbnak. Kolomeets és mások arra hivatkozva, hogy az I_{5303}/I_{6374} intenzitásviszony a $\text{Fe}_{\text{XIV}}/\text{Fe}_{\text{X}}$ ionkoncentráció-viszonnyal arányos, az pedig csak a koronahőmérséklettől függ, ennek a két vonalnak az intenzitásarányát választották [11]. Ehhez hasonlítva a kozmikus sugárzás intenzitását, a hiszterézisgöréből azt kapták, hogy a modulációs



2. ábra. A 15 g/cm^2 -en mért teljes ionizáció hiszterézisgörbéje a 19. napciklusban és a 20. napciklus elején [16]

tartomány sugara a naptevékenység minimumakor 2—5 Cs. E., maximumakor 6—8 Cs. E. Hogy hiszterézis valóban van, nem pedig a naptevékenységi jellemző helytelen választásának következménye, az bebizonyosodott, amikor a kozmikus sugárzás különböző energiájú komponensei között találtak hiszterézist [19, 20] (4. ábra). Ebből azonban eddig még nem próbálták kiszámítani a modulációs tartomány sugarát.

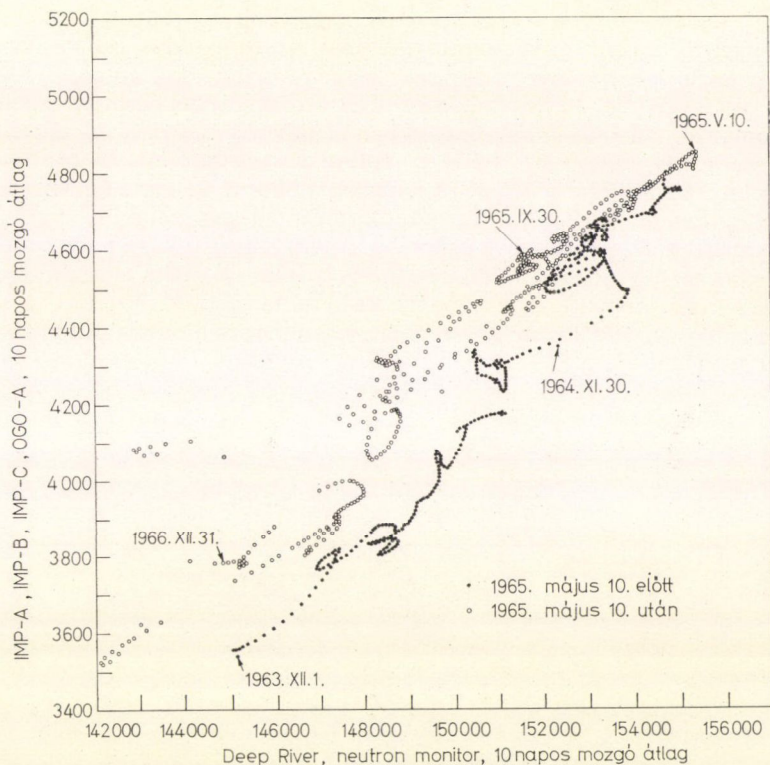
A 27 napos periodicitásból (l. később) arra lehet következtetni, mekkora az a távolság, ameddig a napszélben levő azimutális aszimmetriák terjednek. Ez a tartomány nem biztos, hogy azonos a nyugodt modulációra jellemző tartománnyal, annál valamivel kisebb vagy nagyobb is lehet. (A moduláció spektruma felső határának vizsgálata alapján inkább nagyobb.) *Bazilevskaya* és mások [21] szerint a kérdéses távolság 10 Cs. E., *Alania* és *Shatashvili* [22] szerint pedig a naptevékenység minimumakor $\cong 6$ Cs. E., maximumakor 25 Cs. E. és 70 Cs. E. között van.



3. ábra. A különböző merevségű kozmikus sugárzásnak a napfolt-számhoz viszonyított 11 éves simított hiszterézisgörbéi a 19. napciklus első kilenc évében (1954—62) [17]

Barker és *Hatton* [23] az éves periodicitásból következtettek a modulációs tartomány sugarára. A talált egyhónapos fáziskésés 7 Cs. E.-nek felel meg.

Összefoglalásként elmondhatjuk, hogy a modulációs tartomány sugaráról rendelkezésre álló adataink nagyon bizonytalanok, kb. másfél nagyságrendet szór-nak, annyi azonban már szinte bizonyosnak látszik, hogy ez a méret a naptevékenység ciklusával változik, erősebb naptevékenységkor nagyobb, gyengébb naptevékenységkor kisebb.



4. ábra. A kozmikus sugárzás neutronmonitoron mért és kis energián (műholdakon) mért intenzitásának összehasonlítása a 19. napciklus végén és a 20. elején (1963–66) [19]

A modulációs tartomány általános szerkezete Korotáció, fluktuációk

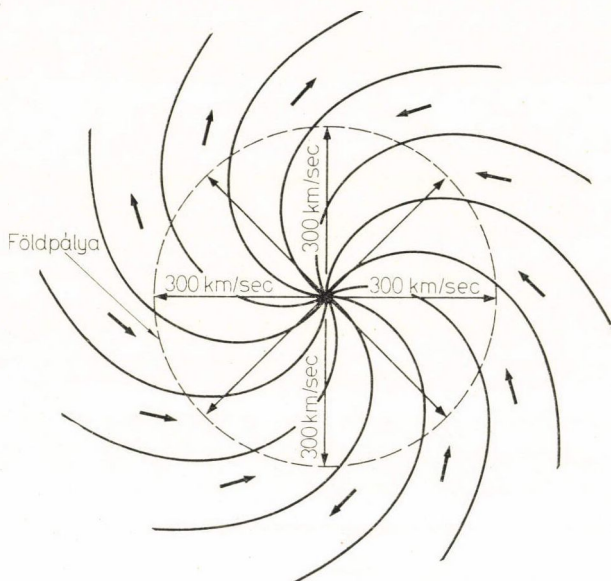
A bolygóközi tér szerkezetéről a Nap egyenlítői síkjára merőlegesen szinte semmit sem tudunk. Sokat tudunk viszont a Nap-egyenlítő síkjában mutatott szerkezetéről. A mesterséges égitestek teszik lehetővé a bolygóközi mágneses tér közvetlen mérését. Ezen a téren alapvető jelentősége volt az erősen excentrikus pályán keringő, tehát a Földtől messzire eltávolodó IMP műholdak [24], valamint a Pioneer és Mariner űrszondák [24, 25] 1962–66 között végzett méréseinek.

A mágneses erővonalak a bolygóközi térben közelítőleg archimedeszi spirál alakúak (garden hose effect). Ennek az az oka, hogy az interplanetáris plazma a Naptól nagyjából sugárirányban távolodik (napszél), magával ragadva a mágneses erőteret, ugyanakkor az erővonal kiindulópontja a Nap felszínével együtt forog. A spirális egy jellemző adata: a földpályával kb. 45° -os szöget zár be. A mágneses térerősség a Föld környezetében $\approx 5\gamma$, az Ekliptikára merőleges komponens $\approx 1\gamma$. A tér a mágneses térerősség iránya szerint többé-kevésbé felismerhető szektorokra

oszlik. Egy szektoron belül a mágneses tér nagyjából egyirányú (vagy kifelé, vagy befelé irányul az archimedeszi spirális mentén), a szomszédos szektorokban a tér ellentétes irányú. A szektorok szélessége lassan változik, sőt, számuk is változhat (5. ábra). Adott szektoron belül is előfordulnak a környezettel ellentétes mágnesezettségű tartományok. A Nap dipólustere ebben a síkban gyakorlatilag nem észlelhető.

Svalgaard vizsgálatai szerint [93] a naptevékenység minimuma körüli években a négy szektoros szerkezet jellemző, a napciklus többi részében a két szektoros. Az új napciklus kezdetekor a szektorszerkezet hirtelen teljesen széthullik. Vizsgálatainál a szektorszerkezet és a sarki geomágneses tér tulajdonságai között feltárt összefüggést használta fel, így, jóval a közvetlen űrbeli mérések kezdete előtti időbe visszanyúlva, négy teljes napciklus szektorszerkezetét tudta megvizsgálni.

A szabályos spirál- és szektorszerkezetre szuperponálódnak a tér kis méretű irregularitásai [7].



5. ábra. Az interplanetáris mágneses tér spirális szerkezete és szektorszerkezete. A kis nyilak mutatják a mágneses tér irányát

A spirális mágneses erővonalak a Nappal együtt ≈ 27 napos periódussal körbeforgni látszanak. A kozmikus sugárzás spirál menti diffúziójából és radiális konvekciójából olyan eredő sebesség keletkezik, amely azonos a Nap szögsebességével való forgásnak az adott pontra vonatkozó azimutális sebességével. Így a kozmikus sugárzás is „együtt forog” ezzel a forogni látszó térrel [5]. Ez a korotáció a Földön egy 18h óraszög irányából jövő részecskeáramot jelent, ami a kozmikus sugárzás intenzitásában szoláris napi periodicitást okoz. Ez adja a szoláris napi periodicitás fő komponensét [4, 26–31]. A részecskeáram irányán itt aszimptotikus irányt kell érteni, a Föld felszínén mért irány ettől jelentősen különbözhet [32].

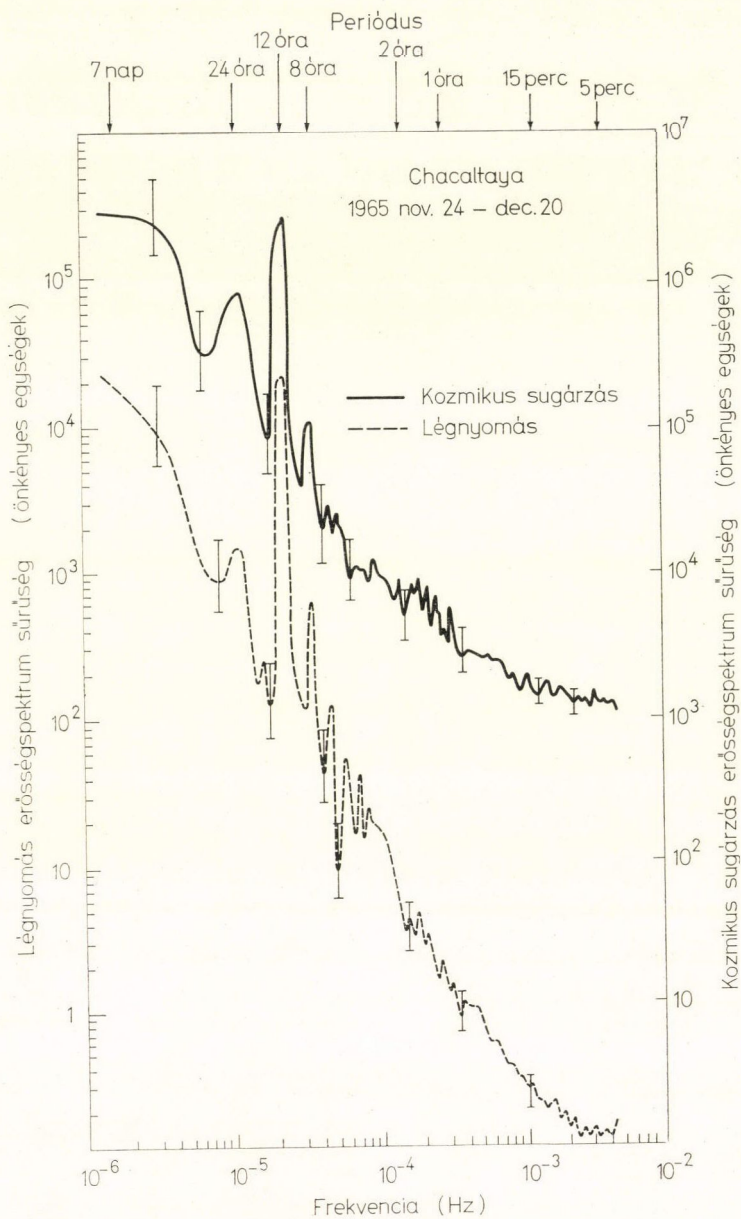
Milyen a szoláris napi periodicitás korotációból eredő komponensének merevség-függése? Mivel a korotációs részecskeáram bizonyos merevséghatár alatt a merevségtől függetlenül létrejön, ezért ez alatt a merevséghatár alatt a kapott periodicitás fázisa és amplitúdója a merevségtől független. Ezt a merevség-függetlenséget sikerült is kísérletileg kimutatni [26—28, 30, 31]. A korotáció felső merevséghatára a naptevékenység minimumakor 50 GV körül, maximumakor 100 GV körül van [1, 27—31]. Felmerült, hogy talán alsó merevséghatára is van a korotációnak, hogy nagyon kis merevségeknél nagy a transzverzális diffúziós együttható, az irregularitások szerepe nagyobb, mint a rendezett tér, ezért nincs korotáció [1, 34].

Vegyük észre, hogy a korotáció felső merevséghatárának értékében a modulációs térség vastagságára vonatkozó információ rejlik, bár elég bizonytalan információ. Ha korotáció van, akkor a részecske pályájának „bele kell férnie” a modulációs tartományba, annak vastagsága tehát nem lehet kevesebb mint a gírorádusz négyszerese. A határmerevség felett a körpálya „nem fér bele” a modulációs tartományba. Bizonytalanságot okoz, hogy nem ismerjük pontosan a mágneses térerősség változásának törvényét a Nap egyenlítői síkjától való távolsággal. Mindenesetre ebből az adódik, hogy a modulációs tartomány vastagsága a földpálya távolságában még minimális naptevékenységkor is 1 Cs. E. felett van (lásd 1. táblázat), maximális naptevékenységkor pedig ehhez képest is több, mint kétszeresére nő. A korotáció határmerevsége nagyon durva közelítésben a moduláció határmerevségének tekinthető. Ennél egy nagyságrenddel nagyobb merevségeknél még számottevő lehet a naprendszer mágneses terének eltérítő hatása. Egy részecskének a Földön detektált beesési iránya még észrevehetően különbözhet a naprendszeren kívüli iránytól. Két nagyságrenddel feljebb, tehát 10^{13} V körül azonban már valószínűleg jelentéktelen az eltérítő hatás.

A korotáción kívül a Föld pályamenti mozgása is okoz szoláris napi periodicitást. Ennek fázisa ellentétes a korotációból eredőével (9 h óraszög), amplitúdója pedig annál több mint egy nagyságrenddel kisebb (≈ 27 nap helyett 365,25 nap a forgási periódus). Ez kísérletileg nehezen észlelhető. A korotáció határmerevsége felett föld alatti műon-teleszkóppal lehet mérni, tehát a hőmérsékleti effektus [9] nagyon zavar a szoláris napi periodicitás analízisében. A korotáció határmerevsége alatt viszont a Föld keringésének hatásához képest nagy annak a bizonytalansága, hogy a Nap melyik részének forgási sebességével történik a korotáció. A Nap differenciális forgásában az egyenlítői részek forgási periódusa ≈ 26 nap, a pólus körüli részeké ≈ 30 nap, a közepes szélességekre a kettő közötti közbűlső érték.

Ha a Föld tengelye merőleges lenne az Ekliptikára, akkor a korotációból eredő szoláris napi amplitúdó arányos lenne a földrajzi szélesség koszinuszával. (Természetesen a detektor effektív aszimptotikus szélességi helyzetéről van szó.) Mivel a földtengely ferde, ezért a korotáció sebességvektora és a földtengely változó szöget zár be, az amplitúdó szélességfüggése változik. Adott földrajzi helyről nézve kismértékben változik a szoláris napi periodicitás amplitúdója és fázisa [34]. Mivel adott szögsebesség mellett az azimutális sebesség a sugárral arányos, ezért a földpálya excentricitása is behoz egy kis ingadozást a napi periodicitás amplitúdójában.

A bolygóközi tér szabályos spirálszerkezetére szuperponálódó kismértékű irregularitásokat a rádiócsillagászatban fedezték fel. Ezek a rádióhullámok számára törésmutatóingadozásokat jelentenek, így a pontszerű rádióforrások szcintillációja jön létre, éppúgy, mint a pontszerű optikai fényforrások (állócsillagok) szcintillációja a légkör törésmutatóingadozásai következtében. Az űrbeli mágneses mérések aztán



6. ábra. A kozmikus sugárzás és a légnymás ingadozásainak spektruma Chacaltayaban 1965. nov. 24.—dec. 20. között a 10^{-6} — $4,15 \cdot 10^{-3}$ c/sec frekvenciatartományban [35]

igazolták a létüket. Az űrszonda számára az irregularitások időbeli ingadozást jelentenek, mert együtt mozognak a napszéllal és így átfutnak a lassan mozgó űrszondán.

Feltehetően ezek az irregularitások okozzák a kozmikus sugárzás intenzitásában levő igen rövid idejű variációkat (mikrovariációkat), melyek tanulmányozását az utóbbi években megszületett nagy összeütleésszámú szuperdetektorok tették lehetővé, amelyek rövid időszakra is elfogadható értékre szorítják le a Poisson-fluktuációt. Ezeknek a mikrovariációknak folyamatos spektruma van, amely hatványfüggvénnyel írható le. A spektrum hatványkitevője néhány órás periódusidőknél $-1,6 \div -1,9$ körül van, néhány perces periódusidőknél pedig $-0,4 \div -0,5$ körül [35, 36]. Feltűnő, hogy a megfelelő tartományban mind a mágneses tér ingadozásainak, mind pedig a légnyomásingadozásoknak a spektruma leírható egységes kitevővel (6. ábra), ennek magyarázata még ismeretlen [35]. Nincs még teljesen kizárva az a lehetőség, hogy ezek a mikrovariációk atmoszferikus vagy magnetoszférikus eredetűek. Történt kísérlet a spektrum vizsgálatának egész 1 c/sec-ig való kiterjesztésére is, de egyelőre sikertelenül [37]. Néhányszor találtak diszkrét spektrumvonalakat is, de mindig csak egy-egy korlátozott időszakra [37–39].

Valószínű, hogy a 11 éves periodicitás létrejöttében a modulációs tartomány méretváltozásán kívül a szabad úthossz változásának is van szerepe [40]. Ha ez igaz, akkor a különböző merevségű részecskék között mutatott hiszterézis [17, 19, 20] azt jelenti, hogy a nagyobb méretű irregularitások száma a 11 éves napciklus során erősebben változik, mint a kisebb méretűeké. Hogy mennyire, azt a 11 éves periodicitás merevségspektrumából lehet megtudni, de azt kevesen mérték, inkább csak a különböző komponensek közötti korrelációt vizsgálták. Lockwood és Sing [41] szerint a 11 éves periodicitás spektruma

$$\frac{\Delta I}{I} \sim \exp \{-1,9R^{-1}\},$$

ahol R a merevség. Bachelet és mások szerint [3, 42], ha a 11 éves periodicitás merevségspektrumát hatványfüggvénnyel írjuk le, akkor a hatványkitevő 2–5 GV között $-1,7$, 5–12 GV között $-0,7$, 12 GV felett $-1,9$.

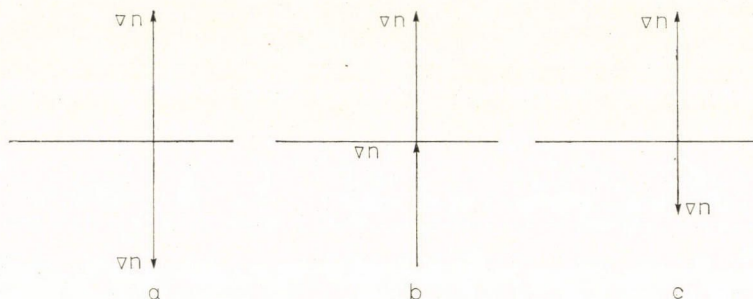
A kozmikus sugárzás sűrűséggradiense a Föld környezetében

A kozmikus sugárzás sűrűséggradiensét három egymásra merőleges komponensre bontva szokás vizsgálni: azimutális, radiális és merőleges komponensre. Az első kettő a Nap-egyenlítő síkjában van, a harmadik arra merőleges.

Az átmenetileg fellépő azimutális gradiens a tranziens jelenségek sorába tartozik. Van-e stacionárius azimutális gradiens? Ha ilyen van, akkor 27 nap körüli periódusidővel perzisztens periodicitást okoz. Bár van, aki azt állítja, hogy ilyen perzisztens hullám létezik [43], az általános vélemény az, hogy nincs, és a budapesti csoport mérése is ezt a véleményt támasztja alá [44]. Ezért zavarmentes időszakokra az azimutális gradienst zérusnak szokás tekinteni [4].

A merőleges gradiens űrszondával való mérésére eddig nem volt mód, mert ebben az irányban még egyetlen mesterséges égitest sem távolodott el lényegesen. (A már említett Pioneer 11 lesz az első.) Jó lehetőséget ad azonban a mérésre a Föld

keringése a Nap körül. Az Ekliptika $7,3^\circ$ -os szöget zár be a Nap egyenlítői síkjával, ezért a Föld keringése során északra is, délre is kb. $1/8$ Cs. E.-re távolodik el a Nap egyenlítői síkjától. Ezért, ha a Nap egyenlítői síkjától É és D felé egyaránt nő a kozmikus sugárzás sűrűsége, akkor féléves periodicitás jön létre (7a ábra), ha egyenletes É—D vagy D—É irányú sűrűséggradiens van, akkor éves periodicitás (7b ábra), ha pedig mindkét irányban nő a sűrűség, de egyik irányban erősebben, másik irányban gyengébben, akkor éves és féléves periodicitás egyszerre (7c ábra). A mérési



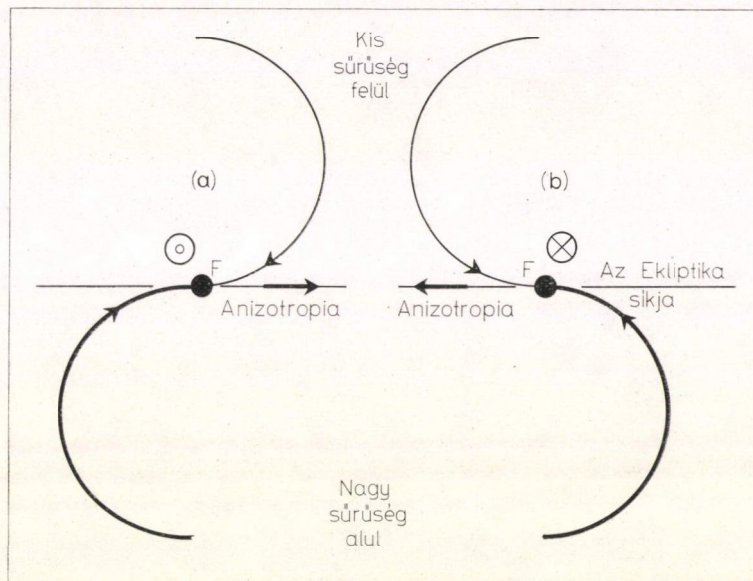
7. ábra. A kozmikus sugárzás merőleges sűrűséggradiensének három lehetséges helyzete a Nap egyenlítői síkjához képest

eredmények szerint a b) eset valósul meg. A kozmikus sugárzás sűrűsége 1961—70 között a Nap egyenlítői síkjától délre nagyobb volt, mint északra, a gradiens nagysága $3\text{--}8\%/ \text{Cs. E.}$ [23, 45—48]. Ez jól összevág azzal, hogy ezekben az években a Nap északi felének aktivitása nagyobb volt, mint a déli féltekéé. Ezekben a munkákban a szerzők úgy tekintik, hogy a meteorológiai korrekció után fentmaradt éves periodicitás tisztán a merőleges gradiensből származik. A földpálya excentricitásából eredő komponens valóban egy nagyságrenddel kisebb lenne ennél, ha a merőleges és radiális gradiens egy nagyságrendbe esne. Mivel azonban úgy látszik, hogy a radiális gradiens nagyobb, mint a merőleges, ezért szerepe az éves periodicitásban nem ilyen kicsi. Kolomeets és Shakhova [49] azt állítják, hogy a naptevékenységben is találtak éves periodicitást. Ha ez helytálló lenne, akkor a kozmikus sugárzás éves periodicitása részben ebből származhatna.

Schneider és Korff [47] találtak ugyan féléves periodicitást is, ennek amplitúdója azonban egy nagyságrenddel kisebb, mint az éves hullámé, így lehet akár annak felharmonikusa is, vagy pedig tökéletlen meteorológiai korrekció következménye.

Egy további lehetőséget nyújt a merőleges sűrűséggradiens meghatározására a szoláris napi és félnapi periodicitás vizsgálata [4]. A sűrűséggradiens ugyanis $\vec{B} \times \vec{\nabla} n$ irányú anizotrópiát okoz. Ha $\vec{\nabla} n$ egyik komponense a Nap egyenlítői síkjára merőleges, akkor $\vec{B} \times \vec{\nabla} n$ megfelelő komponense az egyenlítői síkban fekszik és merőleges a spirális irányára. Az anizotrópia létrejöttét a 8. ábra szemlélteti. Tegyük fel, hogy a kozmikus sugárzás sűrűsége nagyobb az Ekliptika alatt, mint felette. Akkor a Földön mért intenzitáshoz nagyobb járulékot adnak azok a részecskepályák, melyek vezető centruma az Ekliptika síkja alatt van. Ezek a pályák kifelé mutató mágneses tér esetén az ábra szerinti bal oldalról, befelé mutató mágneses tér esetén az ábra szerinti jobb oldalról érik a Földet. Tehát ha az éves perio-

dicitásból kapott $\vec{E}-D$ sűrűséggradiens igaz, akkor ebből olyan szoláris napi periodicitást kapunk, amelynek maximuma mágneses szektoronként változó irányú, mégpedig kifelé mutató mágneses tér esetén 15h, befelé mutató mágneses tér esetén pedig 3h helyi időre esik. Ha a 7a ábra vagy a 7c ábra szerinti helyzet valósulna meg, (most nem a Nap-egyenlítő, hanem az Ekliptika síkjához viszonyítva), akkor fél-napos periodicitás, ill. napi és fél-napos periodicitás egyszerre jönne létre.



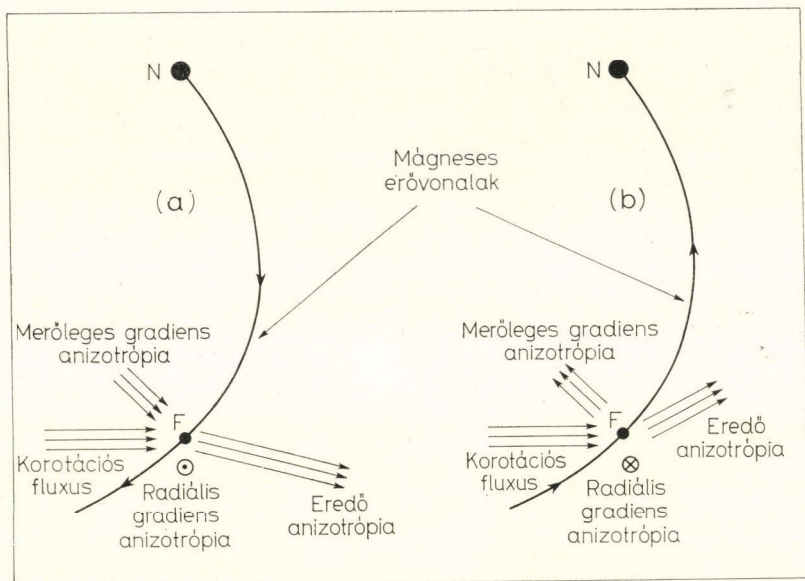
8. ábra. $\vec{B} \times \vec{\nabla} n$ anizotrópia létrejötte a merőleges gradiensből. Az ábra síkja merőleges a mágneses erőter irányára. a) kifelé mutat, b) befelé mutat a mágneses tér [4]

A napi periodicitásnak a mágneses szektorhatáron létrejövő ugrásából *Hatton* és *Barker* [48] arra következtettek, hogy az ebből becsült merőleges anizotrópia összefér az éves periodicitásból kapott értékkel. Megjegyzendő, hogy ≈ 25 GV merevségnél ugyanolyan bázistávolságon mérjük a merőleges gradiensét a napi periodicitásból, mint az évesből.

A napi periodicitás merőleges sűrűséggradiensből eredő komponense vektóriálisan adódik hozzá a korotációból eredő fő komponenshez, így kifelé mutató mágneses térnél annak amplitúdója megnő, fázisa pedig korábbra tolódik, befelé mutató mágneses térnél pedig amplitúdója lecsökken, és fázisa későbbre tolódik, ahogy ezt a 9. ábra mutatja. Az ábrán nincs feltüntetve a napi periodicitás spirál menti komponense [50–52], amelynek eredete tisztázatlan. A mágneses szektorok szerint szétválogatott napi periodicitásból $\approx 1,3\%$ /Cs. E. merőleges gradiens adódik, ami kb. négyszer kisebb, mint az éves periodicitásból kapott eredmény [53].

A napi periodicitás mellett sokan találtak fél-napos periodicitást is, melynek maximuma az archimedeszi spirálra merőleges irányban, tehát 3h és 15h helyi időben van [26, 29, 54–57]. Ilyen fél-napos periodicitás származhatna a merőleges

sűrűséggradiensből is (lásd 7c ábra), ez azonban ellentmondásban volna a fél éves periodicitás már említett nagyon kis amplitúdójával. Az okot tehát valószínűleg másban kell keresni. *Nagashima* és szerzőtársai [57] arra a következtetésre jutottak, hogy a fél napos periodicitás oka: több részecske pályája zár be nagy szöget a mágneses tér irányával, mint ahány kicsit.

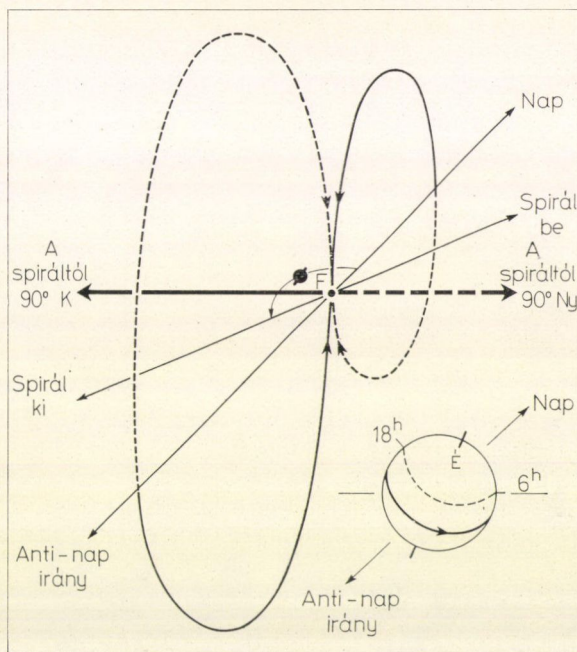


9. ábra. A napi periodicitás fő komponensének és a merőleges sűrűséggradiensből eredő komponensének összegződése a) kifelé mutató, b) befelé mutató mágneses tér esetén. Az ábrán szerepel a radiális gradiens anizotrópia iránya is, de nem szerepel a napi periodicitás spirál irányú (9 és 21 órás) komponense [4]

A radiális gradiens űrszondával való mérésére már történt néhány kísérlet. Sajnos, a kapott értékek szórása nagyon nagy. A két legszélsőségebb eredmény: *Krimigis* [58] 0,3 MeV körüli energián a Mariner 5 és Explorer 33 összekalibrált műszereinek adataiból $(-350 \pm 80)\%/Cs. E.$ értéket kapott (negatívnak tekintjük a radiális gradienst, ha a Nap felé mutat, pozitívnak, ha kifelé), *O'Gallagher* [59] pedig 20–30 MeV tartományban $+500\%/Cs. E.$ értéket. Egész sor mérést végzett a radiális gradiensre vonatkozóan a Mariner 2 és Mariner 5 Vénusz-szonda, valamint a Mariner 4 Mars-szonda. Azonban az egyazon űrszondán elhelyezett különböző típusú műszerek is egészen különböző eredményekre vezettek, $-15 \div +15\%$ Cs. E. intervallumban, néhányszor 10 MeV energiákon [20, 33, 59–61].

Krimigis [58] az igen kis energia miatt nyilván szoláris kozmikus sugárzást mért, *O'Gallagher* [59] mérésének helyességét pedig a nagy háttér miatt kétségbe vonják [33]. Az így fennmaradt, 10–100 MeV körüli energiákon végzett mérések szórásából arra lehet következtetni, hogy ebben a tartományban van a szoláris és galaktikus kozmikus sugárzás határa [1], egyik mérésben az egyik, másik mérésben a másik komponens gradiense dominál, a mérés időpontjától és a műszer jellemzőitől függően.

A szoláris sugárzás gradiense sokkal nagyobb, mint a galaktikusé, ezért az össz-sűrűség gradiensét az határozhatja meg, még akkor is, ha a galaktikus sugárzás sűrűsége nagyobb. (Még 10 MeV-nél is a naptevékenységgel fordítva változik az össz-sűrűség, ami arra utal, hogy az össz-sűrűség nagyobb részét a galaktikus eredetű sugárzás adja [62].) Ez a tartomány tehát a galaktikus kozmikus sugárzás sűrűség-gradiensének mérésére nem alkalmas, azt nagyobb energiákon kell végezni. Nagyobb energián két űrbeli mérés volt eddig. *Forman* és mások [14] már említett mérésükben > 400 MeV/nukleon energián a Lost City meteoritban talált izotóparány alapján $(+60 \pm 25)\%$ /Cs. E. radiális gradienst találtak, *O'Gallagher* és *Simpson* [63] pedig a Mariner 4 segítségével 6 GV körüli átlagos merevségnél 9% /Cs. E.-et.



10. ábra. $\vec{B} \times \vec{\nabla} n$ anizotrópia létrejötte a radiális sűrűség-gradiensből. A jobb alsó sarokban a csillagnapi periodicitás létrejötte látható az É—D aszimmetriából [4]

A merőleges gradienshez hasonlóan a radiális gradiens is vizsgálható a $\vec{B} \times \vec{\nabla} n$ anizotrópia segítségével [4]. Az anizotrópia létrejöttét a 10. ábra, irányát a 9. ábra mutatja. A külső részecskepályák helyén nagyobb a kozmikus sugárzás sűrűsége, mint a belső pályákén, tehát a külső pályákon mozgó részecskék nagyobb hozzájárulást adnak az intenzitáshoz. Ezek a külső pályák kifelé irányuló mágneses tér esetén délről, befelé irányuló tér esetén északról érik el a Földet, így a mágneses szektorral váltakozó irányú É—D anizotrópia jön létre. 0,5% feletti É—D aszimmetriát találtak *Mercer* és mások [64] a megfigyelési anyag nagy részében, míg *Lindgren* és mások [65] nyugodt időszakokban ilyen nem találtak.

Az \dot{E} — D anizotrópia felhasználását a radiális gradiens mérésére *Bercovitch* javasolta [66]. Ő a szektorhatárokon található irányváltásból $(8 \pm 3)/R$ %/Cs. E. gradienst talált (R a merevség), ami lényegesen kisebb, mint *O'Gallagher* és *Simpson* [63] eredménye.

A Föld tengelyének ferdesége miatt egy függőleges detektor 18h csillagidőkor néz a legészakabbra, 6h-kor a legdélebbre (10. ábra). Ezért egyetlen detektorral is észlelhető az \dot{E} — D anizotrópia, csillagnapi periodicitás formájában [4]. A mágneses szektorok szerint szétválogatott adatokon a csillagnapi periodicitás maximuma kifelé mutató mágneses tér esetén 6h, befelé mutató mágneses tér esetén 18h csillagidőkor van. Ezt az effektust *Swinson* [4] detektálta, de az amplitúdó túl kicsi volt a radiális gradiens kiszámításához. *Swinson* [4] szerint a radiális gradiens ≈ 75 GV-nél szűnik meg, ami összefér a korotáció felső határával.

Ha az \dot{E} — D anizotrópiából számítjuk ki a radiális gradienst, figyelembe kell venni, hogy a földtengely ferdesége miatt a korotáció is \dot{E} — D aszimmetriát okoz.

Tranziens jelenségek

A Napon keletkező flerek nyomán erős szuperszónikus plazmaáramlás indul az interplanetáris térbe, mely magával ragadja az aktív zóna erős mágneses terét, és a kozmikus sugárzást kiszorítja az általa elfoglalt térrészből. Az így keletkezett intenzitáscsökkenést hívjuk Forbush-effektusnak.

A Forbush-effektusok vizsgálata már régóta folyik. Keletkezési mechanizmusuk azonban csak azóta kezd világossá válni, amióta összehangolt űrbeli-földi mérések folynak. Azóta derült ki még az is, hogy a Forbush-effektusok és a geomágneses viharok korrelációja nem közvetlen okozati összefüggésre vezethető vissza, hanem arra, hogy a két jelenségnek közös oka van.

Ha a Földtől távoli űrszondán és a Földhöz közeli műholdon vagy magán a Földön egyidejűleg végeznek összehangolt mérést, akkor szétválaszthatók a bolygóközi térben az időbeli és térbeli változások. Így sikerült felfedezni a korotációban résztvevő hosszú élettartamú struktúrákat, amelyek a flerek nyomán keletkeznek, és nyomon követni a flerekből kiinduló lökéshullámok terjedését [67—69].

Östman és *Awadalla* [70] javasolta a Forbush-effektusok keletkezési mechanizmusuk szerinti csoportosítását: egyik típust a Földet érő lökéshullám, másik típust korotáló struktúra okozza. (Harmadikként egy átmeneti típust is javasoltak.) Nem sikerült azonban eldönteniük, hogy milyen észlelési paraméterek alapján lehet a Forbush-effektusokat az egyik vagy másik csoportba sorolni. Alátámasztják a két alaptípus létezését a torinói csoport vizsgálatai [71—73] a Forbush-effektusok és a Nap aktív zónái kapcsolatáról. Kimutatták, hogy az 1969. évben minden Forbush-effektus a Nap két aktív zónájához kapcsolódott, és ezek átvonulásakor akkor is volt Forbush-effektus, ha éppen nem keletkezett fler. Munkájuk egyben valószínűvé teszi, hogy a Forbush-effektusokat okozó forgó struktúrák nem egyes flerek nyomán maradnak meg sokáig, hanem aktív zónák sorozatos flerjei nyomán, állandóan újraképződve.

A Forbush-effektusok osztályozásában nagy előrelépést jelent *Verschell* és mások munkája [74]. Különböző típusú Forbush-effektusok rekurenciáját és flerekkel való korrelációját vizsgálták. Az I. típusba sorolták a Forbush-effektust, ha az intenzitáscsökkenés gyors volt (egy napnál rövidebb), a II. típusba akkor, ha

az intenzitáscsökkenés lassú volt (egy napnál hosszabb). Az I. típusúak amplitúdója általában nagyobb, a II. típusúaké kisebb. Az I. típusúak merevségspektruma laposabb, a II. típusúaké meredekebb. Az I. típusúaknál a kisebb energiáknál a helyreállítás lassúbb, mint nagyobb energiáknál, a II. típusúaknál a helyreállítás sebessége nem függ az energiától. Az I. típusúakkal mindig kapcsolatba sikerült hozni egy flert, a II. típusúakkal nem. A II. típusúakat majdnem minden esetben 27 nappal megelőzte egy másik Forbush-effektus, sőt egyszer ezenkívül még 54 napos elődöt is sikerült találni, az I. típusúaknak 27 napos elődjük nem volt. A szerzők mindkét típust korotáló struktúra hatásának tulajdonítják, de szerintük az I. típus 27 napnál fiatalabb, a II. típus 27 napnál öregebb struktúrától ered. Miután azonban az általuk közölt táblázat szerint a fler időpontjától az I. típusú Forbush-effektus minimumáig minden esetben csak 1—3 nap telt el, ezért nincs kizárva, hogy az I. típusú esetekben a lökeshullám közvetlenül érte a Földet. A II. típusúak közül viszont kettőnek nem volt 27 napos elődje, tehát ezek feltehetőleg 27 napnál fiatalabb korotáló struktúrától eredtek.

Nem vizsgálták a Forbush-effektust közvetlenül megelőző időszakot, pedig az osztályozás szempontjából ez is nyújthat információt. A Forbush-effektust gyakran megelőzi egy rövid ideig tartó kis intenzitásnövekedés [75], vagy egy hosszabb ideig tartó, de nagyon lassú és hasonlóan kicsi intenzitáscsökkenés [76]. Ezek mértéke kb. egy nagyságrenddel kisebb, mint magáé a Forbush-csökkenésé. Lökeshullám esetén könnyen magyarázható az előzetes intenzitásnövekedés a lökeshullámban összetorlódó részecskékkel. Korotáló struktúra esetén könnyen magyarázható az előzetes intenzitáscsökkenés a közeledő kis sűrűségű tartomány árnyékoló hatásával, amelyet egyébként a legnagyobb girorádiuszú részecskék éreznek meg leg hamarabb [71]. Lökeshullám esetén az előzetes intenzitáscsökkenést, vagy korotáló struktúra esetén az előzetes intenzitásnövekedést nehéz lenne megmagyarázni. Ezért várható, hogy előzetes intenzitásnövekedést az I. típusú, előzetes intenzitáscsökkenést a II. típusú Forbush-effektusok előtt lehetne találni.

A Forbush-effektus létrejöttének mechanizmusára lehetne további következtetéseket levonni a Forbush-effektusok merevség-spektrumának pontos ismeretéből. Sajnos erről még ellentmondásosak az eredmények. *Bachelet* és mások szerint [3, 42] a hatványspektrum kitevője 2—5 GV között $-1,7$, 5—12 GV között $-0,6$, 12 GV felett $-1,0$. *Lockwood* és *Singh* szerint [41] a spektrum alakja

$$\frac{\Delta I}{I} \sim \exp \{-KR^{-0,7}\},$$

ahol R a merevség, K pedig 0,2—0,9 között változik. Mind ez az utóbbi eredmény, mind pedig *Verschell*nek és másoknak a Forbush-effektusok osztályozására vonatkozó, már említett munkája [74] arra mutat, hogy a spektrumot célszerű lenne nem egységesen, hanem a különböző típusú Forbush-effektusokra külön-külön vizsgálni.

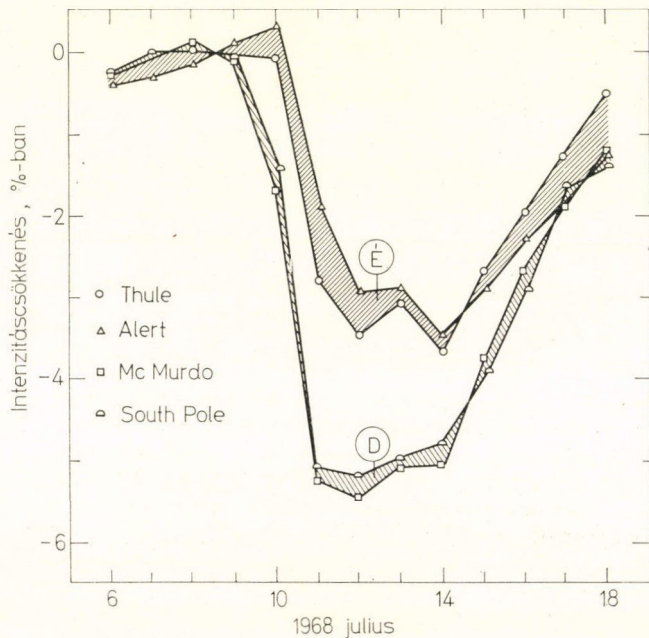
Többen csak kvalitatíve hasonlították össze a Forbush-effektusok és a 11 éves periodicitás spektrumát, amiből a két jelenség kapcsolatáról lehetne ítélni. *Balasubrahmanyam* és *Venkatesan* [19] szerint, valamint *Mathews* és mások [77] szerint a két spektrum egyforma, *Baixenas-Aiguabella* [78] szerint a Forbush-effektusok spektruma laposabb. *Lockwood* és *Singh* már említett kvantitatív eredménye [41], valamint 12 GV felett *Bachelet* és mások eredménye [3, 42] az utóbbi véleményt támasztja alá, míg *Bachelet* és mások 12 GV alatti eredménye [3, 42] az előbbit.

Látszik, hogy ennél az összehasonlításnál spektrumtartományok szerint és a Forbush-effektus típusai szerint válogatni kéne.

Antonucci és mások még 70 m vízekvivalens mélységben, tehát ≈ 230 GV merevségnél is találtak Forbush-effektusokat [79], ami arra mutat, hogy a Forbush-effektusok spektruma nagyobb merevségeig terjed, mint a kvázistacionárius modulációé. A szokásos aszimmetrikus alak helyett azonban lapos, szimmetrikus depresz-sziókat találtak, ami magyarázható azzal, hogy ezek a nagy merevségű részecskék már olyan pályán mozognak, mely csak részben halad át a Forbush-effektust okozó térségen (lásd 1. táblázat).

Az utóbbi időben kerültek az érdeklődés középpontjába a Forbush-effektusok anizotrópiái: az Észak—Dél aszimmetria és a Forbush-effektus tartama alatt megnövekedett amplitúdójú, megváltozott fázisú napi periodicitás.

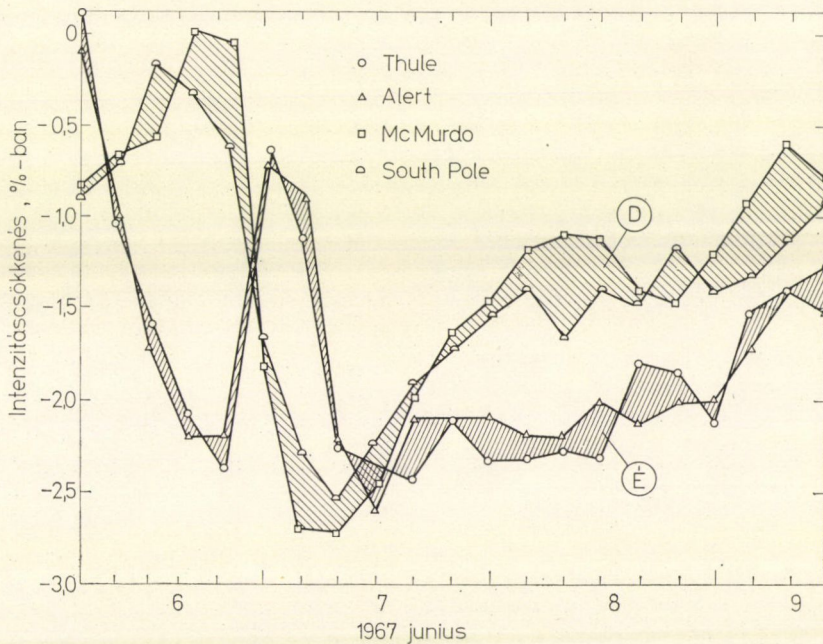
Forbush-effektus alatt Észak—Dél aszimmetriát először *A. G. Fenton* és szerzőtársai találtak [80]. Később *Nagashima*, *Duggal* és *Pomerantz* [81] vizsgálták a jelenséget behatóbban. *Duggal* és *Pomerantz* gyenge naptevékenység idején a Forbush-effektusok 30%-ánál [82], a naptevékenység maximumakor pedig 90%-ánál [83] találtak Észak—Dél aszimmetriát. Ők csak azokat az eseteket vették figyelembe, amikor az Észak—Dél aszimmetria nagyobb volt, mint a napi periodicitás amplitúdója. Mivel a napi periodicitás amplitúdója erősen megnövekedhet a Forbush-effektus alatt, ezért az Észak—Dél aszimmetriák valódi számát esetleg alábecsülték. *Mercer* és szerzőtársai szerint [64] valamennyi Forbush-effektus mutat É—D aszimmetriát az intenzitáscsökkenés szakaszában, és jelentős részük a helyreállási szakaszban is.



11. ábra. Az 1968. július 10—18-i Forbush-effektus É—D aszimmetriája [83]

Duggal és Pomerantz megfigyelései szerint [83] egyes esetekben az Észak—Dél aszimmetria iránya átfordul. Egyirányú aszimmetriára az 1968. július 10—18-i (11. ábra), változó irányúra az 1967. június 6—9-i (12. ábra) szolgálhat példaként.

Bár erre nézve még nem végeztek vizsgálatokat, lehetséges, hogy az Észak—Dél aszimmetriát a Nap egyenlítői síkjabeli (lökéshullám esetén alapvetően radiális, korotáló struktúra esetén alapvetően azimutális) sűrűséggradiensből adódó $\vec{B} \times \vec{V}_n$ anizotrópia okozza. Ezt támasztja alá Duggal és Pomerantz megfigyelése [82], hogy az É—D aszimmetria nincs korrelációban a Forbush-effektust okozó fler helio-grafikus szélességi helyzetével. Az elképzelés jól összefér azzal, hogy az É—D aszimmetria az esetek túlnyomó többségében lineáris függvénye az észlelő detektorok effektív aszimptotikus szélességi helyzete szinuszának [81, 83]. A $\vec{B} \times \vec{V}_n$ anizotrópia létrejöttéhez bizonyos mértékig egyensúlyi helyzetnek kell kialakulnia. A korotáló struktúrák esetén ez bizonyosan megvalósulhat, hiszen azok néhányszor tíz napig élnek. Ezért Antonucci és szerzőtársai az ilyen struktúrák előrelézését is a 100 GV feletti merevségű részecskék $\vec{B} \times \vec{V}_n$ anizotrópiája segítségével szeretnék megvalósítani [71]. Lökéshullám esetén az ilyen egyensúlyi helyzet kialakulása kétségesebb, de nem kizárt, mert GV nagyságrendű merevség esetén a részecskék sebessége már több százszorosa a lökéshullám sebességének. Az elképzelés ellenőrzéséhez a Forbush-effektusokat típus szerint és mágneses szektorok szerint szétválogatva kéne vizsgálni. Az É—D aszimmetria fázisváltozására például egyik lehetséges ok a mágneses tér irányának megváltozása a szektorhatáron.



12. ábra. Az 1967. június 6—9-i Forbush-effektus változó irányú É—D aszimmetriája [83]

A Forbush-effektusok alatt gyakran jelentősen megnő a napi periodicitás amplitúdója, és a maximum időpontja korábbra tolódik [3]. Ezt általában 9h óraszög irányából (a spirálirányból a Nap felől) jövő részecskeáram okozza, mely olyan erős, hogy a korotáció hatása (amellyel majdnem ellentétes irányú) nem tudja ellensúlyozni [84, 85]. Az effektus mechanizmusa még tisztázatlan. Nehézséget okoz az interpretációban, hogy a megnövekedett amplitúdó még 100 GeV energián is észlelhető [86].

Megváltozott — megnövekedett vagy lecsökkent — amplitúdójú és megváltozott fázisú napi periodicitás egyébként nyugodt (Forbush-effektustól mentes) időszakban is lehet [87, 88]. Megnövekedett amplitúdó esetén ilyenkor 21h óraszög irányából, tehát a spirál-irányból kívülről jön áramlás, amely a hozzá közeli irányú korotációs komponenssel vektoriálisan összegződik. Lecsökkent amplitúdót az okoz, hogy 9h óraszög irányából jön többlet-áramlás, ami azonban a Forbush-effektus alatt tapasztalt jelenséggel ellentétben nem erősebb, mint a korotációs áramlás, hanem csak azzal körülbelül egyforma erős, így vektoriálisan összegződve lerontják egymást. A magyarázat éppoly ismeretlen, mint a Forbush-effektusok idején jelentkező spirál irányú áramlatoké.

A Forbush-effektusokkal nagyjából egyidőben, az 1930-as években fedezték fel a 27 napos kvázi-periodicitást, amely a Nap tengely körüli forgásával és az aktív zónák vele együtt mozgásával kapcsolatos. Kvázi-periodicitásnak vagy rekurrenciának hívjuk, mivel egymástól független vonulatokban jelentkeznek. Egy vonulat hossza néhány periódustól tízegynéhány periódusig terjedhet, azután a periodicitás eltűnik. Az egyes vonulatok fázisa egymástól független. A vonulatok közötti távolság is változó, például olyan is van, hogy két vagy több vonulat részben átfedi egymást. A periódushossz is változik, attól függően, hogy a Napon milyen heliografikus szélességi körön helyezkednek el az aktív zónák, és hogy mozognak-e a Nap fel színéhez képest.

A 27 napos rekurrenciát kétféle ok okozhatja. Biztosan nagy szerepük van a rekurrens Forbush-effektusoknak [71—74]. Lehet azonban szerepe a zavarmentes napszél sebességében levő kisebb eltéréseknek is [89]. Hogy a Forbush-effektusoknak mekkora szerepük van a 27 napos kváziperiodicitás létrejöttében, azt a zavart napok kiküszöbölésével nem lehet megnyugtatóan eldönteni, mert a Forbush-effektusok jelentős része olyan kicsi, vagy olyan rövid [90], hogy észrevétlen maradhat. Néhány információt nyújthatna erről a két jelenség spektrumának összehasonlítása, azonban a 27 napos kvázi-periodicitás spektrumával még nagyon kevesen foglalkoztak (pl. [91, 92]). A spektrum felső határa azonos lehet a Forbush-effektuséval, 230 GV körül még észlelhető [79].

Az észlelhető 27 napos vonulatok száma és amplitúdója egyaránt erősen változik a naptevékenységgel, mindkettő erősebb naptevékenységkor nagyobb. Gyenge naptevékenységkor a 27 napos rekurrencia alig észlelhető [76].

Áttekintés

Befejezésül tekintsük át, milyen modulációs formái vannak a galaktikus kozmikus sugárzásnak a naprendszerben, és azokat mi okozza (3. táblázat). Az okok között nem tüntettük fel az atmoszferikus és geomágneses effektusokat, ezek valamennyi modulációs formánál zavaró tényezőként szerepelnek. A táblázatból ki-

maradtak a tisztán atmoszferikus vagy geomágneses eredetű változások (pl. lunáris napi periodicitás), valamint a más periodicitás felharmonikusaként, tehát nem fizikai okból létrejövő periodicitások (pl. negyedéves, harmadnapos periodicitás).

3. TÁBLÁZAT

A galaktikus kozmikus sugárzás modulációjának formái a Naprendszerben

20 éves periodicitás	tisztázatlan
11 éves periodicitás	a modulációs tartomány méretváltozása a szórócentrumok számának változása (a szabad úthossz változása)
éves periodicitás	merőleges sűrűséggradiens (pályahajlás) radiális sűrűséggradiens (pályaexcentricitás)
féléves periodicitás	merőleges sűrűséggradiens?
27 napos rekurrencia	tranzien szimutális anizotrópiák
szoláris napi periodicitás 18h komponens 6h komponens 3—15h komponens 9—21h komponens	korotáció a Föld keringése merőleges sűrűséggradiens tisztázatlan
csillagnapi periodicitás	galaktikus anizotrópia? radiális gradiens (E—D anizotrópia)
félnapos periodicitás	merőleges sűrűséggradiens a részecskék szögeloszlása a mágneses térhez képest (pitch angle distribution)
mikrovariációk	a bolygóközi tér irregularitásai?
Forbush-effektus	flerekből kiinduló lökéshullámok fler nyomán keletkező korotáló struktúra (mágneses nyelv)

Függelék

A merevség

Mágneses térben a töltött részecske olyan spirálpályán mozog, hogy a körüljárt henger sugara

$$r_1 = \frac{p_{\perp} c}{BZe},$$

ahol c a fénysebesség,

p_{\perp} a mágneses térre merőleges impulzuskomponens,

B a mágneses térerősség,

e az elemi töltés,

Z a rendszám.

Legnagyobb a sugár (gírorádusz) körpálya esetén, tehát ha a teljes impulzus merőleges a mágneses térre:

$$r = \frac{pc}{BZe}. \quad (F1)$$

A mágneses eltéríthetőségre jellemző

$$R = Br = \frac{cp}{Ze} \quad (F2)$$

menntiséget hívjuk merevségnek. Energia per töltés, tehát feszültség dimenziójú mennyiség, szokásos mértékegysége a volt. Kapcsolata a gírorádusszal a mértékegységátszámítást is figyelembe véve:

$$R[V] = 300 B[\text{Gauss}] r[\text{cm}] \quad (F3/a)$$

$$R[\text{MV}] = 300 B[\gamma] r[10^6 \text{ km}] \quad (F3/b)$$

$$R[\text{GV}] = 45 B[\gamma] r[\text{Cs. E.}] \quad (F3/c)$$

$$R[\text{TV}] = 0,9 \cdot 10^4 B[\gamma] r[\text{pc}]. \quad (F3/d)$$

A merevség és a kinetikus energia közötti kapcsolatot a következőképpen kapjuk meg:

$$ZeR = cp = \frac{m_0 vc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (F4)$$

ahol m_0 a nyugalmi tömeg.

A kinetikus energia

$$E_{\text{kin}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2, \quad (F5)$$

tehát

$$E_{\text{kin}} = ZeR \frac{c}{v} - m_0 c^2 \quad (F6)$$

Az (F4) egyenletből kifejezve c/v -t és behelyettesítve az (F6) egyenletbe

$$E_{\text{kin}} = ZeR \sqrt{\left(\frac{m_0 c^2}{ZeR}\right)^2 + 1} - m_0 c^2, \quad (F7)$$

ha pedig (F 5)-ből fejezzük ki v/c -t és helyettesítjük be (F 6)-ba, akkor

$$R = \frac{1}{Ze} (E_{\text{kin}} + m_0 c^2) \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E_{\text{kin}} + m_0 c^2} \right)^2} \quad (\text{F8})$$

adódik a kinetikus energia és a merevség közötti kapcsolatra. Erősen relativisztikus esetben

$$E_{\text{kin}} \gg m_0 c^2,$$

ekkor

$$R \approx \frac{1}{Ze} (E_{\text{kin}} + m_0 c^2) \approx \frac{E_{\text{kin}}}{Ze} \quad (\text{F9})$$

Tehát egyszerűen töltött részecske voltban kifejezett merevsége ekkor számszerűleg azonos az elektronvoltban kifejezett energiájával. Nem erősen relativisztikus esetben pedig a merevség számértéke a kinetikus energia és a teljes energia számértéke közé esik.

IRODALOM

1. E. N. Parker, 11 ICCR, Budapest, Invited Papers and Rapporteur Talks, 341, 1969.
2. A. Somogyi, 11 ICCR, Budapest, Invited Papers and Rapporteur Talks, 357, 1969.
3. A. Somogyi, MTA Központi Fizikai Kutató Intézete, preprint No. KFKI-71-79, 1971.
4. D. B. Swinson, 12 ICCR, Hobart, 2, 588, 1971.
5. Kóta J., Magyar Fizikai Folyóirat, 21, 191, 1973.
6. E. V. Kolomeets, A. G. Zusmanovich, 12 ICCR, Hobart, 5, 1964, 1971.
7. W. R. Webber, 10 ICCR, Calgary, Part A, 146, 1967.
8. B. Rossi, Cosmic Rays, McGraw-Hill, New York, 1964.
9. Varga A., Magyar Fizikai Folyóirat, előkészületben.
10. Benkó Gy., Magyar Fizikai Folyóirat, előkészületben.
11. E. V. Kolomeets, Yu. A. Shakhova, A. G. Zusmanovich, 11 ICCR, Budapest, 2, 305, 1970.
12. E. N. Parker, Space Sci. Rev., 9, 324, 1969.
13. A. K. Lavrukhina, 12 ICCR, Hobart, 5, 1864, 1971.
14. M. A. Forman, R. W. Stoenner, R. Davis Jr., 12 ICCR, Hobart, 2, 575, 1971.
15. S. E. Forbush, J. Geophys. Res., 63, 651, 1958.
16. H. V. Neher, 11 ICCR, Budapest, 2, 289, 1970.
17. J. A. Simpson, Pontificiae Acad. Sci. Scripta Varia, 25, 323, 1963.
18. Yu. I. Stozhkov, T. N. Charakhchyan, 11 ICCR, Budapest, 2, 301, 1970.
19. V. K. Balasubrahmanyam, D. Venkatesan, 11 ICCR, Budapest, 2, 327, 1970.
20. S. R. Kane, J. R. Winckler, 11 ICCR, Budapest, 2, 269, 1970.
21. G. A. Bazilevskaya, V. P. Okhlopov, T. N. Charakhchyan, 11 ICCR, Budapest, 2, 203, 1970.
22. M. V. Alania, L. Kh. Shatashvili, 11 ICCR, Budapest, 2, 199, 1970.
23. M. C. Barker, C. J. Hatton, 11 ICCR, Budapest, 2, 177, 1970.
24. N. F. Ness, C. S. Seearce, S. Cantarans, J. Geophys. Res., 71, 3305, 1966.
25. P. J. Coleman, J. Geophys. Res., 71, 5509, 1966.
26. A. C. Willets, W. K. Griffiths, C. J. Hatton, P. L. Marsden, 11 ICCR, Budapest, 2, 61, 1970.
27. R. M. Jacklin, S. P. Duggal, M. A. Pomerantz, 11 ICCR, Budapest, 2, 47, 1970.
28. H. S. Ahluwalia, J. H. Erickson, 11 ICCR, Budapest, 2, 139, 1970.
29. D. J. Summer, D. M. Thomson, A. Hashim, T. Thambyahpillai, 11 ICCR, Budapest, 2, 69, 1970.
30. H. S. Ahluwalia, 12 ICCR, Hobart, 2, 641, 1971.
31. J. E. Humble, 12 ICCR, Hobart, 2, 612, 1971.
32. K. G. McCracken et al., IQSY Manual No. 10, Cosmic Ray Tables. IQSY Committee, London, 1965.
33. J. A. Lezniak, W. R. Webber, 11 ICCR, Budapest, 2, 111, 1970.
34. A. J. Somogyi Acta Phys. Acad. Sci. Hung., 32, 261, 1972.
35. M. S. Dhanju, V. Sarabhai, 11 ICCR, Budapest, 2, 237, 1970.
36. N. P. Chirkov, V. I. Ipatjev, 11 ICCR, Budapest, 2, 257, 1970.
37. P. M. Aghshin et al., 11 ICCR, Budapest, 2, 247, 1970.
38. M. S. Dhanju, V. A. Sarabhai, Phys. Rev. Lett., 19, 252, 1967.

39. S. Ruthberg et al., 11 ICCR, Budapest, 2, 241, 1970.
40. J. J. Quenby, J. F. Sear, 12 ICCR, Hobart, 2, 771, 1971.
41. J. A. Lockwood, P. Singh, 11 ICCR, Budapest, 2, 319, 1970.
42. F. Bachelet, N. Iucci, G. Villoresi, 12 ICCR, Hobart, 1971, MOD-66, nem publikált.
43. W. Zwanzig, Nuovo Cim., 40, 65, 1965.
44. J. Kóta, A. Somogyi, G. Válas, A. Varga, 11 ICCR, Budapest, 2, 215, 1970.
45. G. Subramanian, Canad. J. Phys., 49, 34, 1971.
46. N. J. Martinic, 12 ICCR, Hobart, 2, 745, 1971.
47. S. M. Schneider, S. A. Korff, 11 ICCR, Budapest, 2, 163, 1970.
48. M. C. Barker, C. J. Hatton, Planet. Space Sci., 19, 547, 1971.
49. E. V. Kolomeets, Yu. A. Shakhova, 12 ICCR, Hobart, 5, 1974, 1971.
50. S. E. Forbush, J. Geophys. Res., 72, 4937, 1967.
51. S. E. Forbush, J. Geophys. Res., 74, 3451, 1969.
52. K. H. Schatten, J. M. Wilcox, 11 ICCR, Budapest, 2, 279, 1970.
53. A. Hashim, M. Bercovitch, 12 ICCR, Hobart, 2, 596, 1971.
54. Z. Fujii et al., 11 ICCR, Budapest, 2, 83, 1970.
55. U. R. Rao, S. P. Agrawal, 11 ICCR, Budapest, 2, 77, 1970.
56. L. V. Kargathra, V. A. Sarabhai, 12 ICCR, Hobart, 5, 1879, 1971.
57. K. Nagashima et al., 12 ICCR, Hobart, 2, 661, 1971.
58. S. M. Krimigis, 11 ICCR, Budapest, 2, 125, 1970.
59. J. J. O'Gallagher, Astrophys. J., 150, 675, 1967.
60. W. R. Anderson, J. Geophys. Res., 73, 2897, 1968.
61. S. M. Krimigis, D. Venkatesan, J. Geophys. Res., 74, 4129, 1969.
62. J. J. Burger, B. N. Swanenburg, 12 ICCR, Hobart, 5, 1858, 1971.
63. J. J. O'Gallagher, J. A. Simpson, Astrophys. J., 147, 819, 1967.
64. J. B. Mercer, D. N. H. Barker, W. K. Griffiths, C. J. Hatton, 12 ICCR, Hobart, 2, 717, 1971.
65. S. T. Lindgren, O. Larfors, B. Sporre, M. F. Tolba, 12 ICCR, Hobart, 5, 1873, 1971.
66. M. Bercovitch, 11 ICCR, Budapest, 2, 169, 1970.
67. Sz. N. Vernov et al., Trudü Mezsdunarodnogo Szeminara po Izucseniyju Fiziki Mezsplanetyetnogo Prosztransztva sz Pomoscsju Koszmicseszkih Lucsej, Leningrád, 30, 1969.
68. V. K. Balasubrahmanyam, E. C. Roelof, R. P. Bukata, R. A. R. Palmeira, 11 ICCR, Budapest, 2, 31, 1970.
69. J. J. Quenby, 12 ICCR, Hobart, 2, 730, 1971.
70. B. Östmann, E. Awadalla, 11 ICCR, Budapest, 4, 7, 1970.
71. E. Antonucci, G. Cini Castagnoli, M. A. Dodero, Solar Phys., 17, 491, 1971.
72. E. Antonucci, G. Cini Castagnoli, M. A. Dodero, Solar Phys., 20, 497, 1971.
73. E. Antonucci, G. Cini Castagnoli, M. A. Dodero, 12 ICCR, Hobart, 2, 623, 1971.
74. H. J. Verschell, R. B. Mendell, S. A. Korff, E. C. Roelof, 12 ICCR, Hobart, 2, 705, 1971.
75. L. I. Dorman, N. S. Kaminer, T. V. Kebuladze, 11 ICCR, Budapest, 2, 227, 1970.
76. L. I. Dorman, Variacii Koszmicseszkih Lucsej i Iszszledovanyije Koszmosza, Izd. AN SzSzSzR, Moszkva, 1963.
77. T. Mathews, P. H. Stoker, B. G. Wilson, Planet. Space Sci., 19, 981, 1971.
78. C. Baixenas-Aiguabella, 12 ICCR, Hobart, 5, 1891, 1971.
79. E. Antonucci, G. Cini Castagnoli, M. A. Dodero, 12 ICCR, Hobart, 2, 629, 1971.
80. A. G. Fenton, K. G. McCracken, D. C. Rose, B. G. Wilson, Canad. J. Phys., 37, 970, 1959.
81. K. Nagashima, S. P. Duggal, M. A. Pomerantz, Planet. Space Sci., 16, 29, 1968.
82. S. P. Duggal, M. A. Pomerantz, 11 ICCR, Budapest, 2, 351, 1970.
83. S. P. Duggal, M. A. Pomerantz, 12 ICCR, Hobart, 2, 723, 1971.
84. S. Lindgren, 11 ICCR, Budapest, 2, 345, 1970.
85. H. Razdan, M. M. Bemalkhedkar, 12 ICCR, Hobart, 2, 697, 1971.
86. P. Chaloupka, P. Mokry, T. Kowalski, T. Sándor, A. Somogyi, F. Telbisz, Nuovo Cim., 12, 639, 1959.
87. A. G. Ananth, S. P. Agrawal, U. R. Rao, 12 ICCR, Hobart, 2, 651, 1971.
88. M. F. Tolba, S. T. Lindgren, 12 ICCR, Hobart, 2, 690, 1971.
89. E. N. Parker, Interplanetary Dynamical Processes. Interscience Publ., New York—London, 1963.
90. D. Blaniariu, A. Moldovanu, E. B. Bradu, Gerlands Beiträge zur Geophysik, 79, 321, 1970.
91. E. S. Glokova, O. I. Inozemceva, Proc. Moscow Conf. on Cosmic Rays, 4, 300, 1960.
92. L. I. Dorman, L. H. Satawili, Koszmicseszkie Lucsi, 4, 179, 1961.
93. L. Svalgaard, J. Geophys. Res., 77, 4027, 1972.

A FÖLD MAGNETOSZFÉRÁJA

SZEMERÉDY PÁL

Geofizikai Tanszék, Eötvös Loránd TE, Budapest

A földkörüli térség azon zónáját, ahol a felső légkör nagymértékben ionizált és az elektromosan töltött részecskék mozgását a Föld mágneses tere lényegesen befolyásolja, magnetoszférának nevezzük. Az elnevezést *Gold* javasolta 1959-ben. A magnetoszféra alsó határát, a definíciónál alapul szolgáló szempontnak megfelelően, különböző magasságokban vonhatjuk meg. Ha azt a magasságot tekintjük, ahol a légkörben az elektromosan töltött és semleges részecskék száma megegyezik egymással, a magnetoszféra alsó határát — némi önkénnyel — 1000 km-es magasságban célszerű felvenni. A külső határ helyzetét a Föld mágneses terének terjedelme szabja meg, amelyet a napszél és a földi mágneses tér között kialakuló kölcsönhatás korlátoz. Mivel a napszélben áramló részecskék sebessége és térfogategységre eső száma a Nap aktivitásától függően változik, ezért a Föld mágneses terének kiterjedése is ingadozást mutat. Nyugalmi napszélben a magnetoszféra határa a Nap irányában a Föld középpontjától kb. $10a_f$ távolságban helyezkedik el (a_f a Föld sugara). A Nappal átellenes irányban a Föld mágneses tere uszályként kihúzódik. A geomágneses uszály hossza ismeretlen, esetleg a $10^4 a_f$ méretet is eléri. A magnetoszféra létezésére a Napon fellépő flare-eket követő földmágneses és sarki fény viharok vizsgálata kapcsán következtek. A sarki fény vihar és a földmágneses vihar — amelyekhez egyéb jelenségek is társulnak — a magnetoszféra vihar megnyilvánulási formái. A magnetoszféra vihar különösen hevesen és változatosan érezteti hatását a sarkvidékeken, ahol az egyes jelenségek lefolyásában több impulzusszerű szakasz ismerhető fel. Ezekből arra lehet következtetni, hogy egy magnetoszféra vihar több magnetoszféra szubviharból tevődik össze, amelyek 1—3 óráis időközönként követik egymást. Anélkül, hogy az egyes sarki szubviharok jellegzetességeit taglalnánk, megemlíthetjük, hogy a mágneses és a sarki fény szubviharokon kívül a sarki ionoszféra állapotának megváltozásában, a természetes eredetű nagyon alacsony (1 kHz rendű) és igen alacsony (kb. 1 Hz rendű) elektromágneses sugárzásban, a légkör sűrűbb rétegeibe bejutó elektronok által kiváltott X-sugárzás erősségében, a protonok által keltett sarki fényben és légköri infraszónikus hullámok fel-lépésében ismerhető fel szubviharszerű lefolyás. Kis földrajzi szélességeken nem jelentkezik a magnetoszféra vihar sarkvidéki megnyilvánulásaira jellemző változatos formában, és itt a mágneses vihar lefolyása is egészen más természetű.

A magnetoszféra-kutatás célja olyan modell megszerkesztése, amelynek alapján megérthetők a felső légkörrel összefüggő jelenségek és ezek kapcsolatai. A helyes modell megszerkesztésének egyik kérdése a napszél és a földmágneses tér kölcsönhatásával függ össze. A kölcsönhatás eredményeként jön létre a magnetopauza, ami a Föld mágneses terének az interplanetáris tér irányába vett határa. Valószínűleg a kölcsönhatás fedezi azt az energiát, amelyből a magnetoszféra viharok alatt fellépő

különbféle jelenségek táplálkoznak. Bár a kölcsönhatás folyamata részleteiben még nem ismert, a magnetoszféra nappali alakja és kiterjedése egyszerű feltevésekkel a tapasztalattal viszonylag jó megegyezésben levezethető.

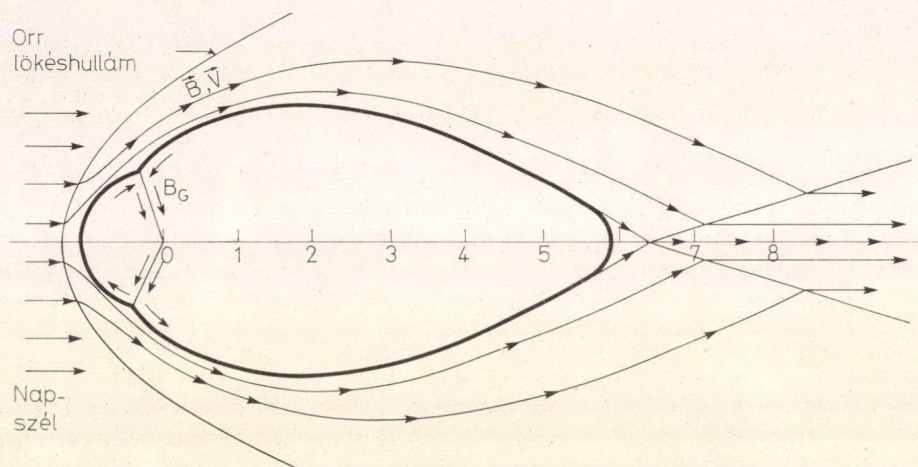
*

Az az elgondolás, amely szerint a Föld mágneses tere az interplanetáris térben áramló szoláris plazma hatására egy üregbe szorul, *Chapman és Ferraro (1940)* munkájának eredményeként merült fel. Hipotézisükkel a Napon fellépő flare-eket követően jelentkező földmágneses viharok első fázisát kielégítően meg lehetett magyarázni. Feltevésük szerint a flare által kidobott semleges plazma, miközben a Föld közelében halad, annak mágneses terét összenyomja.

A mágneses viharok észlelhető térerősség-növekedés — amely legkifejezettebben a kis földrajzi szélességeken észlelhető — ennek az összenyomódásnak az eredménye. Csak később, *Birmannak* az üstökös csóvákkal kapcsolatos vizsgálatai (1951) vették fel a napkorona állandó expanziójának lehetőségét, amelyből az következett, hogy nem csupán esetenként, hanem állandóan plazma áramlik az interplanetáris térben. Ebből *Parker* arra következtetett, hogy a geomágneses üreg nem kizárólag a flare-ek után átmenetileg alakul ki, hanem állandóan létezik. Később az állandó plazmafolyam — a napszél — hipotézisét az interplanetáris laboratóriumok mérései alátámasztották és a geomágneses üreget határoló réteget, a magnetopauzát is kimutatták. *Chapman és Ferraro* a Nap korpuszkuláinak és a Föld mágneses terének kölcsönhatását részecskeszemléleten alapuló felfogásban vizsgálták, nem vették még számításba a plazmával együtt sodródó interplanetáris mágneses teret. Fel tették, hogy a részecskék — mielőtt a Föld mágneses terével kölcsönhatásba kerülnek — egységesen V_∞ sebességgel mozognak, mégpedig egymással párhuzamosan. Ez a megszorítás az áramló részecskék hőmozgását kizárja. Így a Newton-féle folyadéknak tekintett (végtelenben ρ_∞ sűrűségű) gáznak valamely felületre kifejtett nyomása: $2\rho_\infty V_\infty^2 \cos^2 \psi$. Itt ψ a felület normálisa és az áramlási irány közti szögjelöli. A határfelületben, ahol a Föld mágneses tere és a részecskeáram egymással érintkezik, egy elektromos áramréteg alakul ki, ami a protonok és elektronok egymástól különböző gírorádiuszának következménye. A rétegben folyó árnyékoló áram megakadályozza azt, hogy a részecskeáramba a Föld mágneses tere behatoljon. Amikor tehát az összenyomott földi mágneses térről beszélünk, valójában a Föld zavartalan mágneses terének és az árnyékoló áramok mágneses terének eredőjére gondolunk. A Föld mágneses terét lehatároló réteg vastagsága kicsi, ezért első közelítésben egy felületnek vehető. Időben állandó részecskeáramot feltételezve a felület ott alakul ki, ahol a kinetikus nyomás megegyezik az üregben levő mágneses tér nyomásával. A *Chapman—Ferraro-féle* kölcsönhatás-mentes részecske-közelítés alapján kiszámolt egyensúlyi felület közelebb helyezkedik el a Földhöz, mint ahogyan azt a valóságban észlelték. Ebből az következik, hogy a részecskeáram kinetikus nyomása kisebb a feltételezetténél. A kisebb nyomás magyarázatát legkézenfekvőbb az interplanetáris mágneses tér szerepében keresni. Az egyébként kis intenzitású (kb. 5γ) és bizonyos mértékig rendezetlen interplanetáris mágneses tér kölcsönhatást teremt a napszélrészecskék között olyanformán, hogy bizonyos mértékig egymáshoz kapcsolja azokat. Ekkor pedig — a *Chapman—Ferraro-felfogás* helyett — a napszelet áramló folyadéknak lehet tekinteni.

A magnetoszféra alakjára vonatkozólag elvégzett hidrodinamikai vizsgálatoknál a napszél nyomásának leírására változatlanul a $K\rho_\infty V_\infty^2 \cos^2 \psi$ Newton-féle

közelítést alkalmazzák. A K együttható megfelelő megválasztásával viszonylag jól figyelembe vehető az interplanetáris mágneses tér hatása, sőt a magnetoszféra alakjának kiszámítását függetleníteni lehet a magnetoszféra környezetében kialakuló bonyolult gázfolyási viszonyok vizsgálatától. Ebből a célból kb. $K=1$ értéket kell választani. A Newton-féle közelítés megtartásával, ha fizikailag más tartalma is van az általa leírt nyomásnak, a feladat matematikai megfogalmazása azonos azzal, amelyet *Chapman* és *Ferraro* már megoldtak.



1. ábra. A geomágneses üreg és a körülötte kialakuló napszél-áramlás, ha a napszél és a földmágneses tér kölcsönhatásában nincsen sűrűsödés (*Lees* 1964)

A geomágneses üreg kialakulásának vázolt mechanizmusából következik, hogy az üreg fala tökéletesen rugalmas és a napszélrészecskék számára áthatolhatatlan. Ez alól csak két helyen van kivétel, amelyeket semleges pontoknak nevezünk. Szemléltetés céljából az 1. ábrán a kezdeti vizsgálatok folyamán megszerkesztett üreg éjfél-dél meridiánsík menti metszetét mutatjuk be, amely már túlhaladott. A semleges pontok ott alakulnak ki, ahol az üreg falával párhuzamosan haladó erővonalak irányt váltanak (pl. B_G -nél az Északi-sark felett). Ezen két pont kivételével — ahol megszűnik az árnyékoló áram — az üreget körülvevő terület bármely pontjára fennáll, hogy

$$\text{grad } p = \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{c} \quad (1)$$

ahol \vec{j} az árnyékoló áram sűrűsége és p a gáznyomás.

A

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2)$$

Maxwell-egyenlet segítségével (1) átalakítható:

$$\text{grad } p = \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \text{ grad}) \vec{B} - \frac{1}{8\pi} \text{grad } B^2 \quad (3)$$

A határfelületnél a mágneses tér irányába haladva a mágneses tér változása kicsi, a felületi normális irányába mutatkozó változáshoz képest. Ez az állítás csak a két semleges pontban nem érvényes. A semleges pontokat nem tekintve — az előbbiek értelmében — a (3) egyenlet jobb oldalának első tagja elhanyagolható. A nyert egyenlet integrálásával a következő eredmény adódik:

$$\left[p + \frac{B^2}{8\pi} \right]_{\text{napszél}} = \left[p + \frac{B^2}{8\pi} \right]_{\text{magnetoszféra}}. \quad (4)$$

A mennyiségek a határfelület megfelelő oldalára vonatkoznak. Mivel a magnetoszférán belül a gáznyomás elenyésző a mágneses tér nyomásához képest, a magnetoszférán kívül viszont az interplanetáris mágneses tér nyomása a gáznyomáshoz viszonyítva jelentéktelen, (4)-ből nyerjük, hogy

$$p = \frac{B^2}{8\pi}. \quad (5)$$

A bal oldal a napszél, a jobb oldal a magnetoszférában uralkodó nyomást jelenti a felület megfelelő oldalán.

Mint az előzőekben ezt már kifejtettük, a napszél nyomását a

$$p = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \cos^2 \psi \quad (6)$$

formulával közelítjük.

A napszélplazma áramlási irányát jellemző \vec{V}_0 egységvektor és a felület \vec{n}_0 normális vektora segítségével (6) így írható:

$$p = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 (\vec{V}_0 \vec{n}_0)^2 = p_{st} (\vec{V}_0 \vec{n}_0)^2, \quad (7)$$

ahol p_{st} a magnetoszféra orránál kialakuló stagnációs nyomás. (7) figyelembevételével (5)-ből kapjuk, hogy

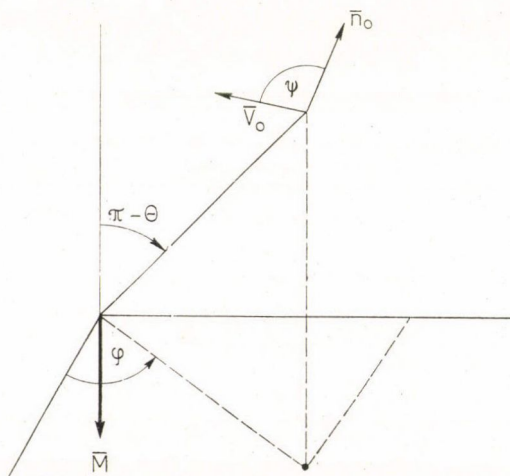
$$p = p_{st} (\vec{n}_0 \vec{V}_0)^2 = \frac{B^2}{8\pi}. \quad (8)$$

Ha megkívánjuk, hogy ez az egyenlet a magnetopauzát jellemezze, akkor a mágneses térnek nem lehet normális irányú összetevője. Ez (8) segítségével az alábbi összefüggésre vezet:

$$|\vec{n}_0 \times \vec{B}| = -(8\pi p_{st})^{1/2} (\vec{n}_0 \vec{V}_0). \quad (9)$$

A negatív előjel azért adódik, mert a felület mentén $(\vec{n}_0 \vec{V}_0) \leq 0$ kell legyen, vagyis a felület egy része sem lehet napszél-árnyékban.

Tételezzük fel, hogy a felület $F(r, \Theta, \varphi) = 0$ egyenlete felírható az $F(r, \Theta, \varphi) = r - G(\Theta, \varphi) = 0$ alakban (2. ábra).



2. ábra. Az \vec{M} földmágneses dipólusnyomatékhoz rögzített polárkoordináta-rendszer

A választott gömbi koordináta-rendszer origóját a Föld középpontjában helyeztük el. A poláris tengely a Föld mágneses tengelyébe esik és a Θ szélességet a Föld északi mágneses sarkától mérjük, amelynek helyzetét a $78,6^\circ$ É és $71,1^\circ$ Ny földrajzi koordináták jellemzik. Feltesszük, hogy a zavartalan napszél iránya a mágneses tengelyre merőleges és a φ szöget e két irányra merőleges síktól számítjuk.

A napszél érkezési irányába $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ezzel ellentett irányba pedig $\frac{3}{2}\pi$.

A felület normálisa

$$\vec{n}_0 = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} = \lambda \left(\vec{r}_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \Theta} \vec{\Theta}_0 - \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \vec{\varphi}_0 \right), \quad (11)$$

ahol \vec{r}_0 , $\vec{\Theta}_0$ és $\vec{\varphi}_0$ koordináta egységvektor, λ pedig normálási faktor.

A plazmaáramlás irányát megadó egységvektor az r , Θ , φ koordináta-rendszerben kifejezve:

$$\vec{V}_0 = -\sin \varphi \sin \Theta \vec{r}_0 - \sin \varphi \cos \Theta \vec{\Theta}_0 - \cos \varphi \vec{\varphi}_0. \quad (12)$$

A határfelületet csak akkor lehet meghatározni, ha a határrétegben folyó áramból adódó mágneses tér és a földi mágneses tér eredőjét mindenütt ismerjük. Az előbbi kiszámítása azonban már feltételezi a felület ismeretét. Ezért a felület kiszámításához a selfconsistent field módszert célszerű alkalmazni, ami a következő mozzatokból épül fel:

1. egy ésszerű közelítést kell felvenni \vec{B} -re,
2. ezzel ki kell számítani a felület egyenletét a (9) összefüggés alapján,
3. a felület ismeretében újraszámolandó \vec{B} stb.

A számítás első lépéséhez kihasználható az a körülmény, hogy a felületnek várhatóan nagy a görbületi sugara. Ha a felület sík lenne, a felületben folyó áramok által keltett mágneses tér ellentétben egyenlő lenne a felület két oldalán. Mivel a mágneses tér erőssége a felület külső oldalán 0 kell legyen, viszont a dipólszerű földmágneses tér azonos a felület mindkét oldalán, a felületben folyó áramok mágneses tere meg kell egyezzen a Föld mágneses terének tangenciális összetevőjével. Így az első lépésnél $\vec{B} = 2\vec{B}_f$ feltételezéssel a

$$\vec{B}_f = -\frac{a_f^3 B_{eq}}{r^3} (2 \cos \Theta \vec{r}_0 + \sin \Theta \vec{\Theta}_0) \quad (13)$$

kifejezés alkalmazható, ahol $a_f = 6,38 \cdot 10^8$ m a Föld sugara és $B_{eq} = 0,312$ gauss a földmágneses tér intenzitása az egyenlítőnél.

Figyelembe véve a felület érintősíkjára felírható

$$\Delta F = \Delta r - \frac{\partial G}{\partial \Theta} \Delta \Theta - \frac{\partial G}{\partial \varphi} \Delta \varphi = 0 \quad (14)$$

egyenletet, (9)-ből (11), (12) és (13) segítségével a következő parciális differenciálegyenlet adódik:

$$\left[\frac{1 + 3 \cos^2 \Theta}{R^6} \left(\frac{1}{R \sin \Theta} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{R^6} \left(\sin \Theta + \frac{2 \cos \Theta}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2 \right] = \\ = \left(\sin \varphi \sin \Theta - \frac{\sin \varphi \cos \Theta}{R} \frac{\partial R}{\partial \Theta} - \frac{\cos \varphi}{R \sin \Theta} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2. \quad (15)$$

Az egyenletben áttértünk az

$$R = \frac{r}{a_f \left(\frac{B_{eq}^2}{2\pi p_{St}} \right)^{1/6}} \quad (16)$$

jelölésre.

A fenti nem lineáris parciális differenciálegyenlet a háromdimenziós peremérték-feladat megoldását foglalja magában, és egzakt módszerekkel nem oldható meg. Egzakt megoldás csak — kétdimenziós feladatnál — az éjfél-dél meridiánsíkban létezik. Ekkor ugyanis $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ és $\frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0$. Ezen feltételekkel (15) egy közösleges differenciálegyenletre egyszerűsödik:

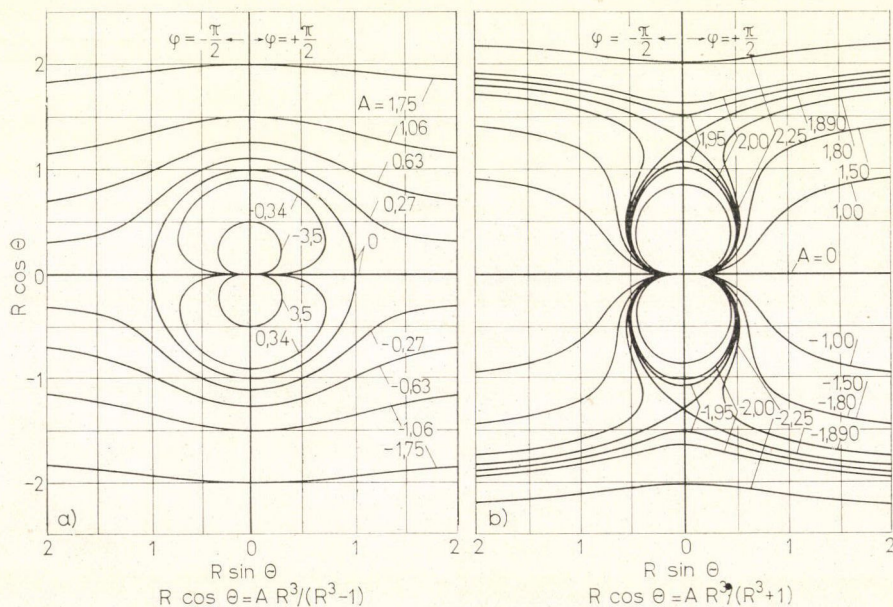
$$\frac{dR}{d\Theta} = R \operatorname{tg} \Theta \frac{R^3 \pm 1}{R^3 \pm 2} \quad (17)$$

Egyenletünk integrálása parciális törtekre bontással megoldható:

$$R \cos \Theta = \frac{AR^3}{R^3 \mp 1} \quad (18)$$

Az integrálási állandót A -val jelöltük.

A 3. ábra bal oldalán a felső előjelnek megfelelő integrálgörbék láthatók. Ezek alapján kitűnik, hogy egyedül az $A=0$ és $R=1$ választás vezet elfogadható megoldáshoz. A jobb oldali ábrán az alsó előjelnek megfelelő integrálgörbe-rendszer



3. ábra. A (17) differenciálegyenlet integrálgörbéi

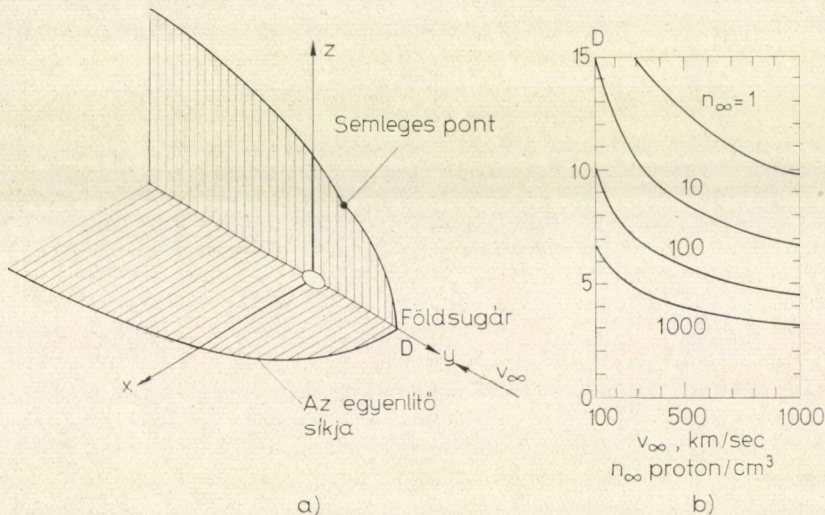
van feltüntetve. Mindkét görbesereget figyelembe véve belátható, hogy csak egyetlen olyan „folyamatosan egymáshoz csatlakozó” és az origóban zérustól eltérő megoldás van, amely eleget tesz a $\psi = \frac{\pi}{2}$ feltételnek. Ez pedig a bal oldali görbesereg $A=0$ és $R=1$ körének egy részéből és a jobb oldali görbesereg $A=3 \times 2^{-2/3} = 1,89$ paraméterű görbéből tevődik össze. Viszonylag egyszerű, de csak numerikusan integrálható differenciálegyenlet adódik (15)-ből a $\Theta = \frac{\pi}{2}$ és $\frac{\partial R}{\partial \Theta} = 0$ feltételekre, vagyis az egyenlítő síkjában

$$\frac{dR}{d\varphi} = R \left(\frac{R^6 \sin \varphi \cos \varphi + \sqrt{R^6 - 1}}{R^6 \cos^2 \varphi - 1} \right). \quad (19)$$

A számítással nyert egyenlítői és éjfél-dél meridiánsík menti metszet a 4. ábrán tanulmányozható. Az ábrán feltüntetett diagramból a napszél n_∞ protonszűrűségének és V_∞ sebességének függvényében a felület szubszoláris pontjának a Föld közepétől mért távolsága is leolvasható. Átlagos napszél-viszonyoknál $n_\infty = 10$ és $V_\infty = 300$ km/sec. Ehhez $D = 10a_f$ tartozik.

A (15) egyenlet numerikus megoldásával Briggs és Spreiter (1963) az 5. ábrán feltüntetett felületet nyerték. Az ábrán csak az egyenlítőtől északra eső felület-szakasz van feltüntetve. A déli szakasz ennek az egyenlítő síkjára vett tükörképe.

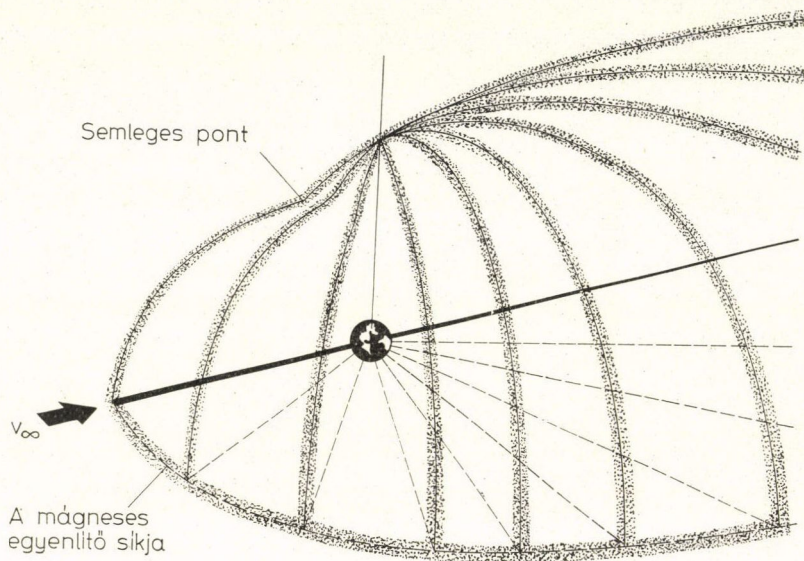
A fő meridián környezetében felismerhető „horpadás” a semleges pont környezetében lép fel, ahol feltevés szerint a felület belső oldalán eltűnik a mágneses tér. A (6), (7) és (8) alapján ebben a pontban $\cos \psi = 0$ kell legyen, vagyis a magnetoszféra határa párhuzamos a zavartalan napszél irányával.



4. ábra. a) A magnetoszféra számított határa az egyenlítői, ill. az éjfél-dél meridiánsíkban (Spreiter 1962)

b) A szubszoláris pont D távolsága a Föld középpontjától. $D = a_f \left(\frac{B_{eq}^2}{2\pi p_{st}} \right)^{1/6}$

A semleges pontok további érdekessége, hogy a vázolt elmélet szerint a déli és az északi félgömbön csak egy-egy olyan erővonal van, amely a Föld felszínéről a semleges pontba jut. A semleges pontok kijelölése, illetőleg a peremérték-feladat megoldása a semleges pontok környezetében meglehetősen sok nehézséggel jár. Ez két körülményből adódik. Egyrészt, mint már említettük, a semleges pontoknál a felületben folyó áram megszűnik, másrészt környezetükben a felület erősen görbült. A mágneses tér szerkezetét mindkét tényező nagy mértékben befolyásolja. Ennek megfelelően, a különböző szerzők által elvégzett számítások a semleges pontoknál eltérő eredményre vezetnek.

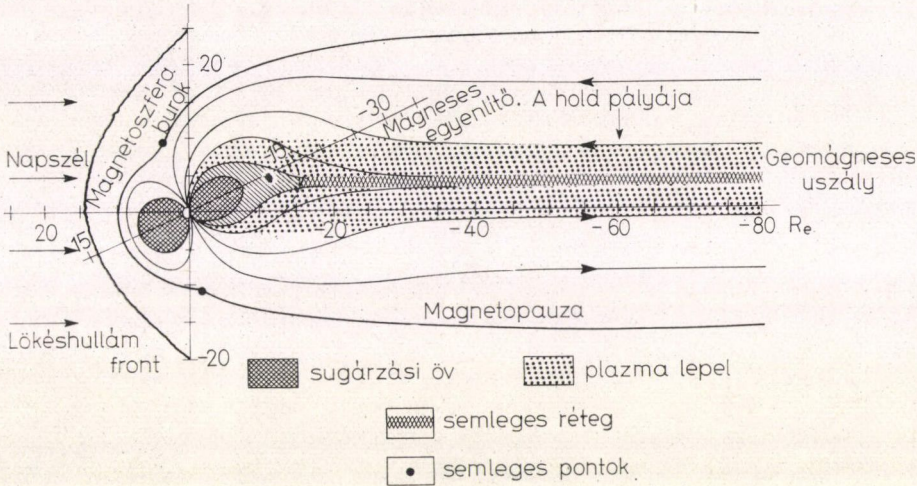


5. ábra. A magnetoszféra alakja (Spreiter 1967)

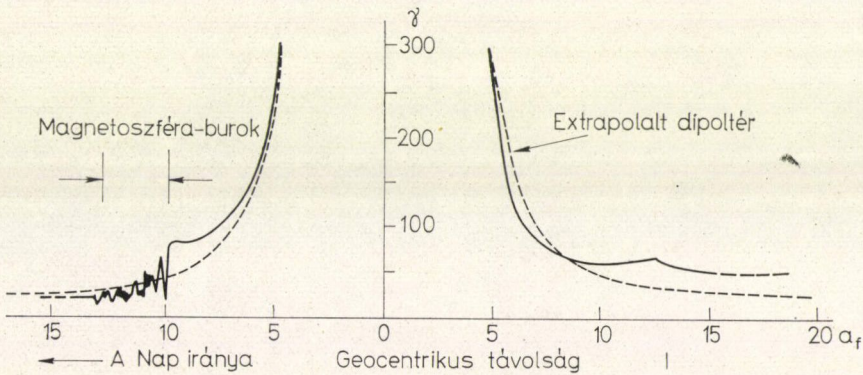
Az eltérések ellenére — a $K=1$ választás mellett — a számítások eredményei a magnetoszféra nappali oldalán kitűnő egyezésben vannak a mérési eredményekkel. (Pl. az Explorer 18 mérési eredményei : Ness és társai 1964.)

Az eddigiekben a disszipatív folyamatoknak nem tulajdonítottunk jelentőséget. Az így elvégzett megfontolások lényegileg az 1. ábrán bemutatott magnetoszféra alakhoz vezetnek. Azonban a Nappal átellenes oldalon a mágneses tér szerkezete eltérést mutat ettől az idealizált esettől. Az a transzverzális nyomás, amely a disszipatív folyamatok következtében lép fel, a nappali oldalon nem játszik lényeges szerepet, mivel itt a normális irányú nyomás túlnyomó. A Nappal átellenes oldalon viszont a transzverzális nyomás már nem elhanyagolható, ezért a mágneses erővonalak kihúzódnak. Következésképpen az északi és a déli félteke kihúzott erővonalai között egy csaknem semleges zóna alakul ki, ahol a mágneses térerősség igen kicsiny. Ezt a körülményt szemlélteti a 6. ábra, amelyet Ness szerkesztett meg a legújabb mérések alapján (éjfél-dél meridiánsik menti metszet). A rajzon az a torzulás is érzékelhető, amely annak következménye, hogy a Föld mágneses tengelye általában nem merőleges a napszél irányára.

A napszél és a földmágneses tér között fellépő disszipatív kölcsönhatás természete ez ideig még nem tisztázott. A kölcsönhatás okát a magnetopauzánál létrejövő magnetoszonikus hullámokban, illetőleg az interplanetáris és földmágneses erővonalak összekapcsolódásában keresik. Az utóbbi lehetőséggel a későbbiekben még foglalkozunk.



6. ábra. A magnetosféra szerkezetének vázlata az éjfél-dél meridiánsíkban



7. ábra. A mágneses térerősség nagysága a Föld környezetében az egyenlítő síkjában, a Földet a Nappal összekötő egyenes mentén (Obayashi 1965)

A 7. ábrán vázlatosan bemutatjuk a magnetopauzán való áthaladáskor bekövetkező mágneses térerősség-ugrást, valamint a magnetoszférán kívüli és belüli mágneses térerősség-closzlás jellegzetességeit. Az ábra nyugodt napszél-viszonyokra vonatkozik, amikor a magnetopauza a Nap felé kb. $10a_f$ távolságban van. A Nap felé eső irányba a magnetopauzán áthaladva a magnetosféra burok egy kb. $3a_f$ vastagságú

rétegeként jelentkeznek, ahol a mágneses tér intenzitása erősen ingadozik. A magnetoszféra burkot a Nap irányába egy ütközésmentes álló lökéshullámfront határolja le. Az „ütközésmentes” jelző azt hangsúlyozza ki, hogy a napszélrészecskék közti kölcsönhatást nem az ütközések, hanem az interplanetáris mágneses tér és az elektromos terek teremtik meg. Az ábrán a Föld dipóltérszerű mágneses terének elképzelt intenzitás-eloszlását is feltüntettük.

Abban a közelítésben, amilyen pontossággal az interplanetáris laboratóriumok mérései a magnetoszféra előtt kialakuló lökéshullámbeli és a magnetoszféra burkokbeli viszonyok tanulmányozását eddig lehetővé tették, a magnetoszféra környezetében a napszél áramlása kielégítően vizsgálható, mint egy tompa akadály körüli szuperszónikus gázfolyási probléma. Ilyen egyszerűsítéssel a gyenge interplanetáris mágneses térnek csak az a hallgatólágos szerep jut, hogy a már említett okokból jogossá teszi a folyadékközelítés alkalmazását. Ha az interplanetáris mágneses tér viselkedését is vizsgálni kívánjuk, ez megtehető a második lépésben. Csupán azt kell kihasználni, hogy az áramló plazma a mágneses teret magával sodorja. A vázolt egyszerűsítéssel adódó aerodinamikai probléma megoldása még így is bonyolult lenne, ha a Chapman—Ferraro-feladat eredményeként nyert idom környezetében vizsgálnánk a viszonyokat. A gázfolyást leíró nem lineáris, kevert elliptikus-hiperbolikus parciális differenciálegyenletek megoldása nagy nehézségekbe ütközne. Ezért a magnetoszféra külső aerodinamikáját a 4. ábrán látható egyenlítői metszet megforgatásával nyert tengelyszimmetrikus idomon célszerű tanulmányozni.

A tökéletes gáz viselkedését disszipációmentes esetben a következő egyenletekkel lehet leírni:

$$\operatorname{div} \varrho \vec{v} = 0 \quad (20)$$

$$\varrho (\vec{v} \operatorname{grad}) \vec{v} + \operatorname{grad} p = 0 \quad (21)$$

$$(\vec{v} \operatorname{grad}) S = 0 \quad (22)$$

$$S - S_0 = C_v \ln \frac{p/p_0}{(\varrho/\varrho_0)^\gamma}, \quad (23)$$

ahol ϱ , p , S és \vec{v} a gáz sűrűségét, nyomását, az entrópiát és a sebességet jelentik.

$\gamma = C_p/C_v = \frac{N+2}{N}$, amelyben C_p és C_v az állandó nyomáson, illetve térfogaton vett fajhő, N a gázrészecskék szabadsági fokának száma. Monoatomos gáznál $N=3$ és $\gamma=5/3$.

A disszipációt a második deriváltakat tartalmazó tagok írják le. Ezeknek elhanyagolása csak akkor megengedett, ha a gradiensek kicsik. A vizsgálni kívánt lökéshullámban ez a feltétel nem teljesül, a disszipációmentes differenciálegyenleteknek nincs folytonos megoldásuk. A tömeg, az impulzus és az energia megmaradása azonban ekkor is változatlanul fennáll. (Sőt, ha a fentieknél általánosabb disszipációmentes magnetohidrodinamikai egyenleteket tekintjük, a mágneses fluxus megmaradásának tétele is érvényes.) A $[Q] = Q_1 - Q_0$ szimbólum felhasználásával, ahol a 0 index a gázfolyás irányával ellenkező, az 1-es index pedig azzal megegyező oldalára vonatkozik a diszkontinuitási felületnek, a megmaradási egyenletek a követ-

kezők:

$$[qv_n] = 0 \quad (24)$$

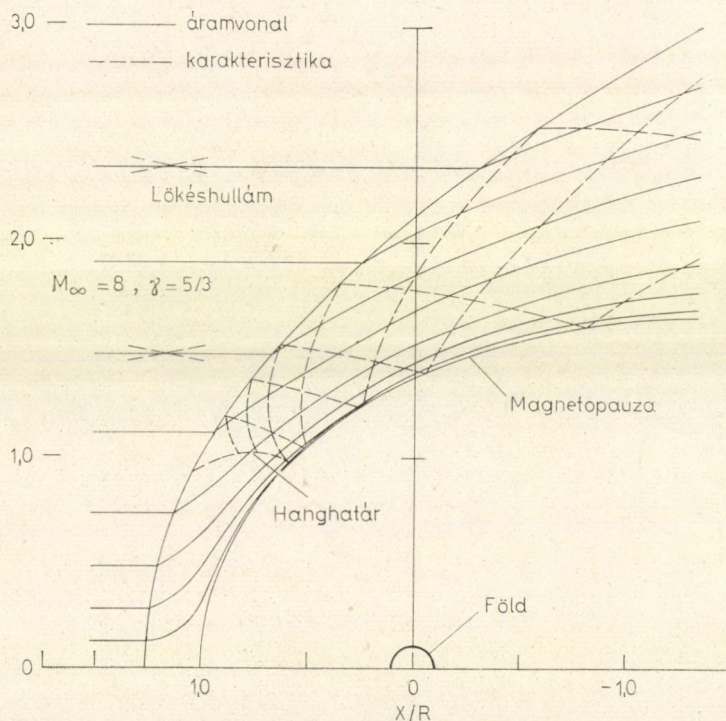
$$[qv_n \bar{v} + p \bar{n}_0] = 0 \quad (25)$$

$$[qv_n(h^2 + v^2/2)] = 0 \quad (26)$$

ahol az n index a felületre merőleges összetevőt jelent, $h = C_p T$ pedig az entalpia, és T a hőmérséklet.

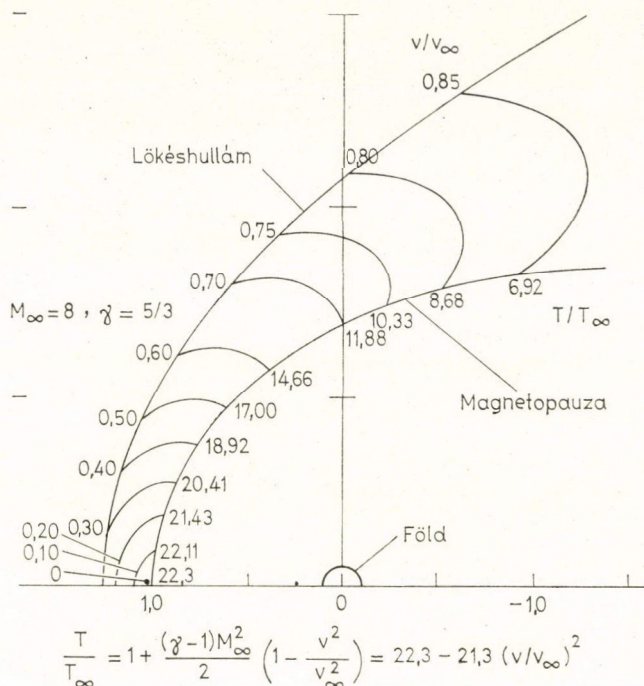
A tengelyszimmetrikus test körüli gázfolyás vizsgálatára vonatkozó számítási eljárások a kérdés technikai érdekessége következtében jól ki vannak dolgozva. (Spreiter, 1966.)

A 8. ábra az egyik módszerrel kiszámított áramlási vonalakat és karakterisztikákat mutatja a magnetosféra és a lökeshullámfront közötti térben. A szabadon áramló napszélre $M_\infty = 8$ -as Mach-számot és $\gamma = 5/3$ -os értéket tételtek fel. A karakterisztikák, amelyek végtelen amplitúdójú kompressziós és dilatációs álló hullámoknak felelnek meg, olyan szög alatt keresztezik az áramlási vonalakat, hogy a hullámra merőleges sebességösszetevő pontosan a helyi hangsebességgel egyenlő. Így a karakterisztikák csak ott léteznek, ahol az áramlás szuperszónikus. Hiányuk a magnetosféra orránál szubszónikus sebességre utal. A távolságot a (16)-nak meg-



8. ábra. A magnetosféra előtt kialakuló lökeshullám, a napszél áramlási vonalai és Mach-vonalai (karakterisztikái), amikor a zavartalan áramlásban a Mach-szám (M_∞) = 8 és $\gamma = C_p/C_v = 5/3$ (Spreiter 1967)

felelő R egységekben számítjuk. Különösen figyelemreméltó a hőmérséklet alakulása a magnetoszféra burookban, amelynek tanulmányozásához a 9. ábra ad támpontot. A lökeshullámon áthaladó gáz hőmérséklete feltűnően megnövekszik. Ha pl. a beeső napszél hőmérséklete 10^5 K° , ez az érték a stagnációs pontban $2,23 \cdot 10^6 \text{ K}^\circ$ -ra növekszik. A stagnációs pontnál a hőmérséklet nagyságrendben azonos a gáz hőmérsékletével a napkorona azon tartományában, ahol a gáz még nem gyorsult fel a földpálya távolságában fellépő napszél-sebességre.



9. ábra. A napszél-sebesség és hőmérséklet alakulása a magnetoszféra burookban $M_\infty = 8$ és $\gamma = 5/3$ esetén (Spreiter 1967)

Mint már megjegyeztük, az interplanetáris mágneses tér erővonalainak viselkedése a magnetoszféra körül áramló plazmában annak feltételezésével tanulmányozható, hogy ezeket a napszél magával sodorja. Általában az erővonalak térgörbék, de a leglényegesebb következtetések egyszerű modellek segítségével is levonhatók. Ha feltesszük, hogy az egymással párhuzamos erővonalvektorok a magnetoszféra éjfél-dél meridiánsíkjával párhuzamos síkokba esnek, akkor egy-egy sík mentén az erővonalak viselkedése jól követhető. A 10. ábrán a mágneses erővonalak torzulását a Föld középpontján átmenő síkban mutatjuk be, amikor az erővonalak 45° -os szöveget zárnak be a napszél irányával. Az erővonalak a magnetoszféra burookban összetorlódnak. A kontúrvonalak az egyenlő intenzitású helyeket kötik össze.

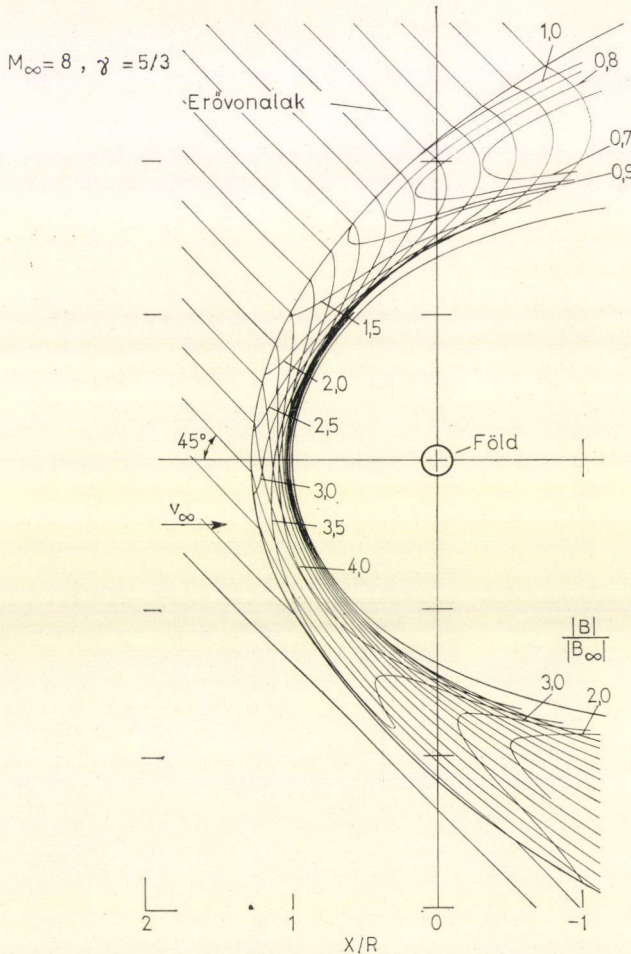
Ha ugyanabban a síkban a zavartalan napszél irányával párhuzamos erővonalakat veszünk fel, könnyű belátni, hogy az erővonalak iránya a lökeshullámfronton

való áthaladás után is követi az áramlás irányát. Egyszerű megfontolás azt adja, hogy a mágneses térerősség a következő aránynak megfelelően változik:

$$\frac{B}{B_{\infty}} = \frac{qv}{Q_{\infty}v_{\infty}}. \quad (27)$$

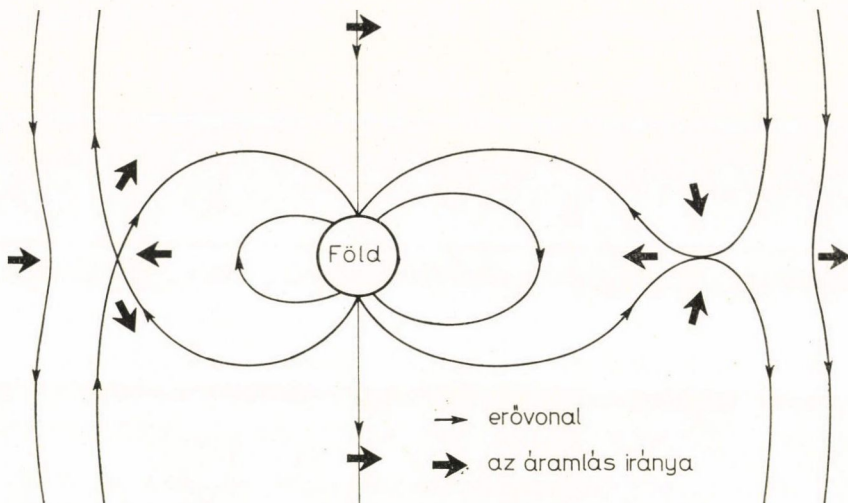
A különböző síkokban elvégzett számítások azt a feltevést támasztják alá, hogy a mágneses erővonalak általában nem akadnak meg a körülfolyt idom felületénél, hanem az áramlással együtt sodródnak.

Ez a megállapítás azonban annyiban módosítandó, hogy amennyiben van déli irányú összetevője az interplanetáris mágneses térnek, a Föld mágneses erő-



10. ábra. A napszélbe fagyott mágneses erővonalak viselkedése a magnetoszféra burokbán és az azonos intenzitású helyek kontúrgörbéi $M_{\infty}=8$ és $\gamma=5/3$ esetén (Spreiter 1967)

vonalai az interplanetáris mágneses erővonalakhoz kapcsolódhatnak. Az összekapcsolódás a magnetoszféra orránál következhet be. Ezt elősegíthetik a magnetoszféra burokbán fellépő örvények, amelyek a plazma elektromos vezetőképességét lecsökkentik. Az örvényekről természetesen az egyszerű gázdinamikai tárgyalásmód nem adhat számot. A Föld azon mágneses erővonalait, amelyek az interplanetáris mágneses erőterhez kapcsolódtak, a napszél a beléagyott interplanetáris mágne-



11. ábra. A földi és az interplanetáris mágneses erővonalak nap felőli oldali egybeolvadásának és a földi mágneses erővonalak Nappal átellenes oldali újra összekapcsolódásának vázlata az éjfél-dél meridiánsíkban (Dungey 1961)

ses erővonalak útján antiszoláris irányba vonszolhatja és kihúzhatja. A semleges rétegben a Föld mágneses erővonalai újra összekapcsolódhatnak (11. ábra). Az összekapcsolódással együttjáró energiaszabadulás lehet egyik oka a napszél-energia disszipációjának, amely többek között a geomágneses uszály kialakulásához vezet. Amikor a Föld mágneses erővonalai a semleges rétegben összekapcsolódtak, a Föld felé visszaáramlanak. Következésképpen a magnetoszférában egy $\vec{V} \times \vec{B}$ típusú — a reggeli oldaltól az esti oldal felé mutató — elektromos tér uralkodik, amely a magnetoszféra-viharok idején különösen felerősödik és nagy kiterjedésű plazmaáramlásokat kelt. A plazmaáramlások kérdése azonban már a magnetoszféra szerkezetével függ össze, amellyel itt nem foglalkozunk.

IRODALOM

- Birmann, L., Kometenschweife und solare Korpuskular-Strahlung, Z. Astrophys., 29, 274—286, 1951
 Briggs, B. R. and Spreiter, J. R., Theoretical Determination of the Boundary and Distortion of the Geomagnetic Field in a Steady Solar Wind, NASA TR R-179. 1963.
 Chapman, S. and Ferraro, V. C. A., Theory of the First Phase of a Geomagnetic Storm, Terrest. Magnetism Atmospheric Elec. 45, 245—268, 1940.

- Chapman, S. and Ferraro, V. C. A.*, A New Theory of Magnetic Storms, *Terrest. Magnetism Atmospheric Elec.* 36, 77—79, 1931.
- Dungey, J. W.*, Interplanetary magnetic field and the auroral zones, *Phys. Rev. Letters*, 6, 47—48, 1961.
- Gold, T.*, Motion in the Magnetosphere of the Earth, *J. Geophys. Res.* 64, 1219—1224, 1959.
- Lees, L.*, Interaction between the solar plasma wind and the geomagnetic cavity, A.I.A.A. Aerospace Sci. Meeting, New York. 1964.
- Ness, N. F., Behanon, K. W., Cantarano, S. C. and Searce, C. S.*, Observation of the earth's magnetic tail and neutral sheet at 5 100 000 kilometers by Explorer 33, *J. Geophys. Res.*, 72, 927—933, 1967.
- Ness, N. F., Searce, C. S. and Cantarano, S. C.*, Probable observation of geomagnetic tail at $10^3 R_E$ by Pionir 7, *J. Geophys. Res.*, 72, 3769—3776, 1967.
- Obayashi, T.*, NASA Tech. Note, NASA TN D-2789, 1965.
- Spreiter, J. R., Summers, A. L. and Alksne, A. Y.*, Hydromagnetic Flow around the Magnetosphere, *Planetary Space Sci.*, 14, 223—253, 1966.
- Spreiter, J. R. and Briggs, B. R.*, Theoretical Determination of the form of the Boundary of the Solar Corpuscular Stream produced by Interaction of the Earth's, *J. Geophys. Res.*, 67, 37—51, 1962.
- Spreiter, J. R., Alberta, Y. A. and Andrey, L. S.*, External Aerodynamics of the Magnetosphere *Astrophys. and Space Sci. Library*, D. Reidel Publishing Company, 1967.

BEVEZETÉS A SUGÁRZÁSI ÖVEZETEK DIPÓLUS-ELMÉLETÉBE

GOMBOSI TAMÁS

MTA Központi Fizikai Kutató Intézet, Budapest

1. Bevezetés
 - 1.1. Bevezetés
 - 1.2. A kísérleti helyzet
 - 1.3. Egységrendszer
2. Töltött részecske mozgása mágneses dipólus terében
 - 2.1. Hamilton-formalizmus forgásszimmetrikus elektromágneses terek esetén
 - 2.2. Mágneses dipól tere
 - 2.3. Tiltott zónák a dipólus meridiánsíkjában
 - 2.4. A vezetőközpont* mozgása
 - 2.5. Adiabatikus invariánsok
 - 2.6. Adiabatikus invariánsok mágneses dipólus terében
3. Sugárzási övezetek a Föld mágneses terében
 - 3.1. Kötött részecskék a Föld mágneses terében
 - 3.2. L, B koordináták
 - 3.3. Időbeli változások

1. Bevezetés

1.1. Bevezetés

Amikor 1958-ban *Van Allen* az első Explorereken végzett kísérletekből az 1. ábrán látható intenzitáseloszlást kapta a mágneses térerősség függvényében, előtérbe került *C. Störmer*nek még a század elején felvetett elképzelése, amely szerint a Föld geomágneses tere a töltött részecskék számára bizonyos helyeken részecskecsapdaként viselkedhet. E számolás alapján vetődött fel a gondolat, hogy a Föld körül kialakulhatnak sugárzási övezetek. A hipotézis végleges megerősítését az Argus kísérletsorozat szolgáltatta, melynek során nagy magasságban végzett nukleáris robbantás segítségével hatalmas mennyiségű elektront juttattak a magnetoszférába, s mérték azok térbeli eloszlását az idő függvényében. Azt tapasztalták, hogy az elektronok egy adott mágneses héj mentén tovaterjedtek, s ez a formáció igen hosszú ideig stabilis maradt, kötött sugárzás alakult ki.

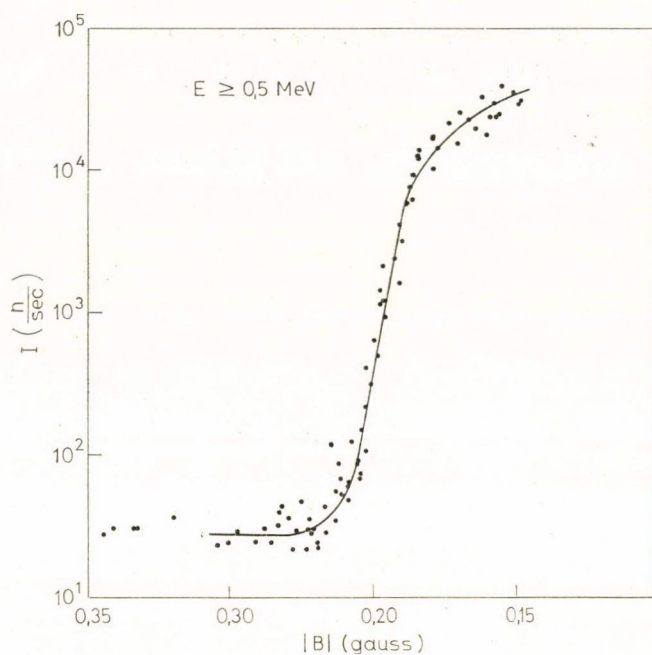
A későbbi kísérletek során kiderült, hogy sugárzási övek csak $8 R_c$ -nél** kisebb távolságban alakulnak ki, a földi magnetoszféra torzultsága miatt.

A 2. ábrán látható a sugárzási övezetek elhelyezkedése a magnetoszférában.

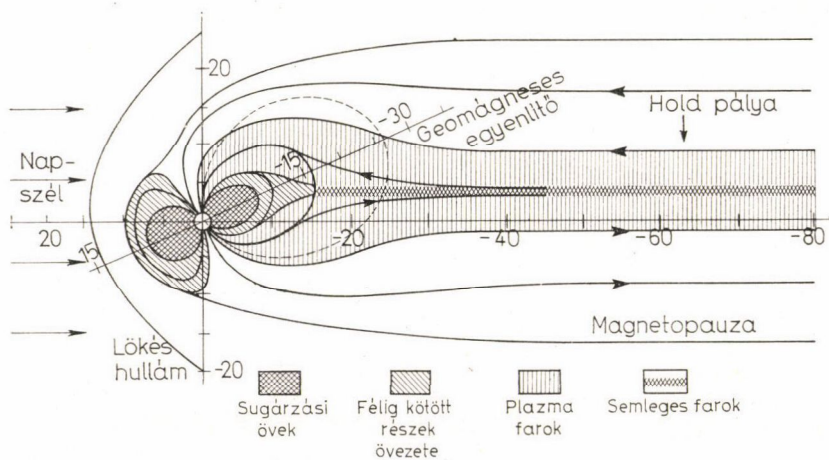
A kötött sugárzás felfedezése óta eltelt viszonylag rövid idő alatt a sugárzási övek tulajdonságait elég jól megismertük, de a dinamikai jelenségekkel, a feltöltési és veszteségi mechanizmusokkal kapcsolatban még elég sok a homályos pont.

* A „guiding centre” kifejezés magyar megfelelőjének javasoljuk a „vezetőközpont” nevet.

** R_c -vel jelöljük a Föld sugarát.



1. ábra. Az Explorer 1 és Explorer 3 jelzésű amerikai mesterséges holdak által mért intenzitás a $|B|$ függvényében



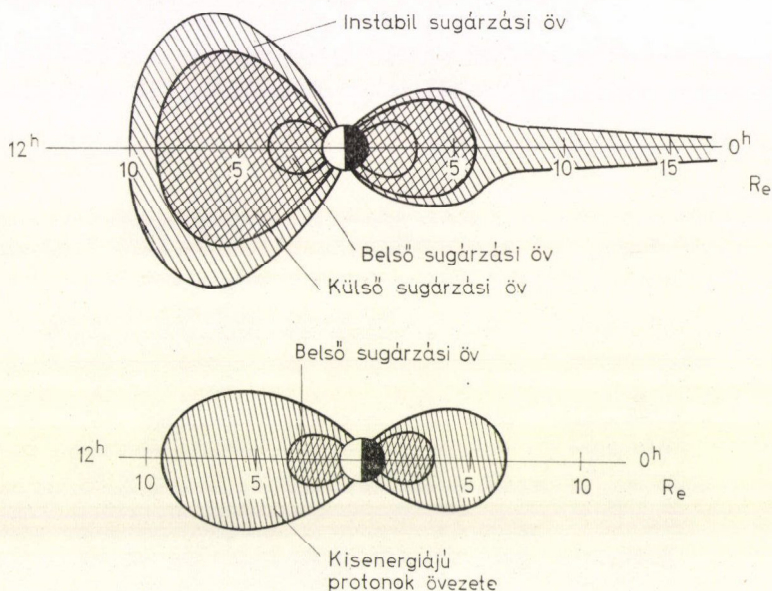
2. ábra. A sugárzási övezetek elhelyezkedése a Föld magnetoszférájában

A továbbiakban a kísérleti helyzet rövid ismertetése után a sugárzási övezetek dipólus-elméletét fogjuk ismertetni, majd néhány — még nem megoldott — dinamikai problémát is érintünk.

1.2. A kísérleti helyzet

A kísérletek szerint a sugárzási övezeteket elsősorban protonok és elektronok alkotják, melyek több, egymástól térbelileg elkülönülő övezetben találhatók, s az egyes övezeteket alkotó részecskék energiája egymástól különböző tartományba esik. Ezen övezetek térbeli elhelyezkedését mutatja a 3. ábra.

A sugárzási övezetek alsó határa a földrajzi hely függvényében változik; az Atlanti Óceán közepe felett például 400 km, Singaporenál pedig 1200 km magasan kezdődik a kötött sugárzás. Ez a jelenség összefügg a geomágneses tér excentrikus voltával és a dipólus-tértől való eltéréseivel.



3. ábra. A sugárzási övezetek elhelyezkedése a helyi idő függvényében, a 3a ábrán az elektron- a 3b-n a proton-övezet térbeli elhelyezkedése látható

A protonkomponens két övezetet alkot, melyek közül a belsőben $E \geq 35$ MeV-os részecskék találhatók, melyek maximális intenzitásukat ($\approx 10^4$ rész $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$) mintegy $1,5 R_e$ távolságban érik el, és $2,2 R_e$ -nél is van egy kisebb intenzitásmaximum (4. ábra).

Ebben a tartományban az intenzitást a következő függvény közelíti

$$I_p(E) \sim \begin{cases} E^{-1,8} & 50 \leq E \leq 700 \text{ MeV} \\ E^{-4,5} & 10 \leq E \leq 50 \text{ MeV} \end{cases}$$

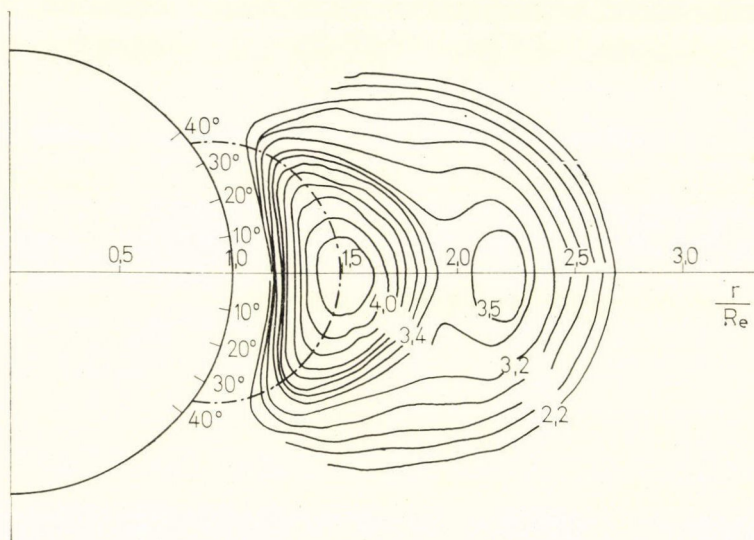
ahol a két tartomány közt folytonos az átmenet.

A külső protonövezetet elsősorban $0,1 \div 4,5$ MeV energiájú részecskék alkotják, melyek az intenzitásmaximumot ($\sim 10^8$ rész $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$) $3 R_e$ körül érik el.

Ezek intenzitás-eloszlását a következő módon közelítik:

$$I_p(E) \sim e^{-\frac{E}{308} \left(\frac{R}{R_e} \right)^{-5,2}}.$$

A teljes protonkomponens intenzitáseloszlását az 5. ábra mutatja, feltüntetve a külső és belső övezetet is.



4. ábra. Az $E_p \geq 35$ MeV energiájú protonok egyenlő intenzitású görbéi. A kontúrokon levő számok az intenzitás 10-es alapú logaritmusát jelentik

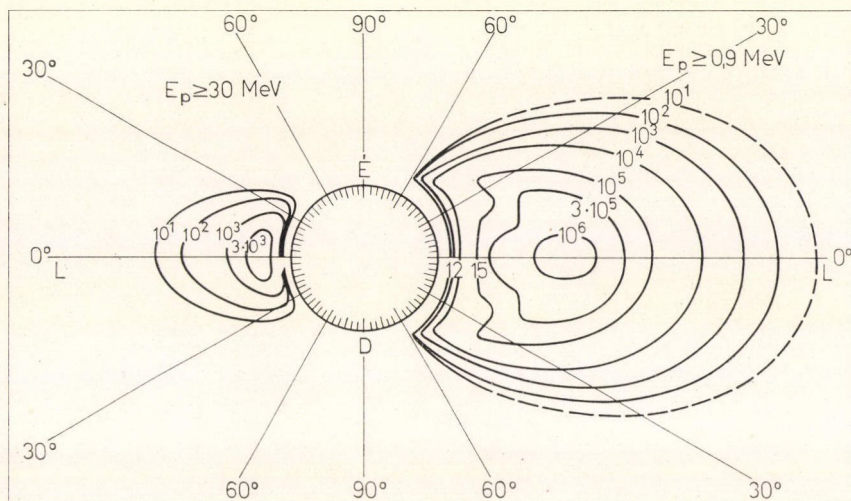
Az elektronok elhelyezkedése a magnetoszférában már nem határozható meg ennyire egyértelműen. A nagy energiájú elektronok ($E = 0,5 \div 5$ MeV) alkotják a belső elektronövezetet, ezek intenzitásmaximumukat ($\approx 5,5 \cdot 10^5$ rész $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$) $1,5 R_e$ távolságban érik el, míg a spektrumra kapott függvény

$$I_e(E) \sim \begin{cases} E^{-2} & 0,35 \leq E \leq 0,65 \text{ MeV} \\ E^{-7} & 1 \leq E \leq 5 \text{ MeV} \end{cases}$$

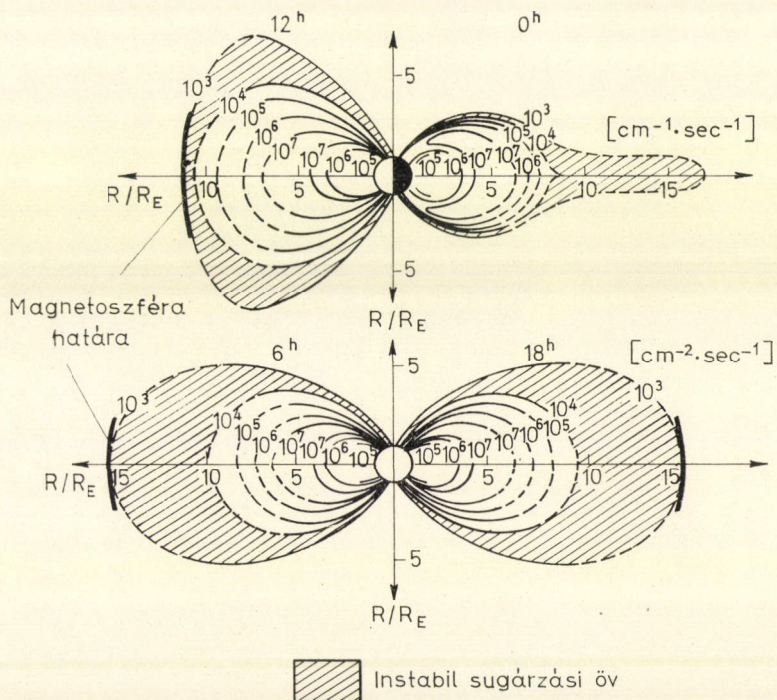
5 MeV-nél nagyobb energiájú elektron a tapasztalat szerint igen kevés van, a Luna—2 például ezek legnagyobb intenzitását $\approx 10^3$ rész $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ -ben adta meg.

A kis energiájú ($E < 0,5$ MeV) elektronok csaknem az egész magnetoszférát kitöltik.

A magnetoszféra azonban aszimmetrikus (l. 2. ábra), azaz a nappali és éjszakai oldalon az elektronokat fogva tartó erővonalrendszer másként helyezkedik el a térben, így az elektronövezetek elhelyezkedése a helyi idő szerint változik, amint az a 6. ábrán látható.



5. ábra. A sugárzási övezetek protonkomponensének intenzitáseloszlása, baloldalt az $E_p \geq 30$ MeV-es, jobboldalt az $E_p \geq 0,9$ MeV-es protonok esetén. A görbéken levő számok az átlagos részecskeáramot jelentik ($\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1} \text{ster}^{-1}$) egységben



6. ábra. Totális elektronintenzitás a sugárzási övezetekben a helyi idő függvényében

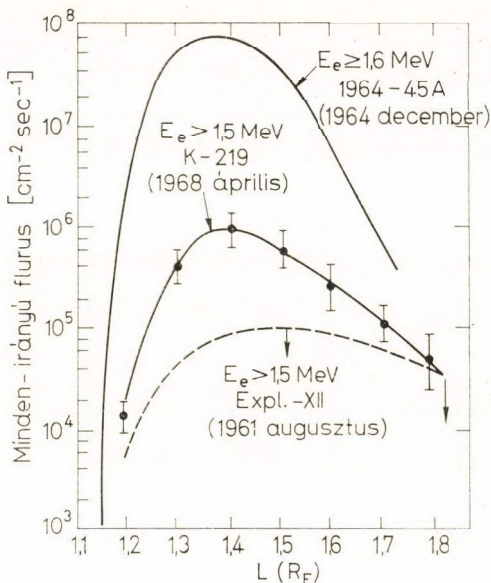
Ily módon instabilis sugárzási övezetek is kialakulnak a magnetoszféra szélén, melyeket a mágneses viharok néha feltöltenek, majd ezek exponenciális bomlás-törvényt követve kiürülnek. Intenzitásuk rövid időre 10^9 rész $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ -et is elérhet, energiaspektrumuk pedig

$$I_e(E) \sim \exp \left\{ \frac{-E}{E_0} \right\}$$

ahol $E_0 = 10 \div 20$ keV.

A stabilis sugárzási övezet kis energiájú elektronkomponense nagyon érzékeny

a mágneses tevékenységre. Ezek intenzitása mágnesesen nyugodt időszakban eléri a 10^8 rész $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ értéket is. Mágneses viharok esetén az intenzitás először hirtelen lecsökken, majd ismét megnő; ezek a változások nagyon gyorsan, nem ritkán egy nap alatt mennek végbe.



7. ábra. A nagyenergiájú elektronok intenzitásának változása 1961 és 1968 között

A mérések szerint az elektronintenzitás időben igen erősen változik. Ennek szemléltetésére a 7. ábrán felrajzoltuk az Explorer 12, az 1964–45 A és a Kozmosz 219 jelzésű mesterséges holdak által mágnesesen nyugodt időszakban mért nagy energiájú elektronintenzitást. Látszik, hogy 1961 és 1964 között az intenzitás három nagyságrendet változott, míg 1968-ban szinte ezek középpértéke adódott. L a főlidsugarakban kifejezett távolság a Föld középpontjától mérve, a későbbiekben pontosabban fogjuk definiálni.

A részecskék sugárzási övbeli élettartamát részben az Argus és Starfish kísérletek révén határozták meg (elektronokra), részben pedig a mágneses viharok perturbáló hatásából és az intenzitás rekonstruálódásából. Ezen élettartamokat mutatja az 1. táblázat.

1. TÁBLÁZAT

Részecske	Energia (MeV)	Élettartam		
		$R=1,2 \text{ Re}$	$R=1,6 \text{ Re}$	$R=3 \text{ Re}$
Proton	10	2 hónap	30 év	100 év
	100	5 év	1000 év	nem kötött
Elektron	0,3	10 nap	6 év	20 év
	2	3 hónap	60 év	200 év

1.3. Egységrendszer

Számításaink során a Giorgi-féle (vagy más néven MKSA) egységrendszert fogjuk használni, amelyben a Maxwell-egyenletek a következő alakúak:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \varepsilon_0 \varrho & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

ahol ϱ a töltéssűrűség, \vec{j} az áramsűrűség és

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{henry}}{\text{m}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}$$

a vákuum mágneses permeabilitása, ill. dielektromos állandója.

2. Töltött részecske mozgása mágneses dipólus terében

A továbbiakban a sugárzási övezetek dipóluselméletének elemeit fogjuk áttekinteni, amely szoros kapcsolatban van a töltött részecskék mozgásával mágneses dipól terében. Ezen mozgás tulajdonságainak ismeretében viszonylag könnyen lehet általánosítani a valódi sugárzási övezetekre.

2.1. Hamilton-formalizmus forgásszimmetrikus elektromágneses terek esetén

Tetszőleges elektromágneses térben levő részecske mozgásának leírására igen alkalmas a Hamilton-formalizmus.

Az \vec{E} elektromos térerősség és \vec{B} mágneses indukció felírható egy \vec{A} vektor és egy Φ skalárpotenciál segítségével:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}. \end{aligned}$$

Ebben az elektromágneses térben egy Ze töltésű és m tömegű részecske mozgását a következő Lagrange-függvény jellemzi:

$$L = Ze(\vec{A}\vec{v} - \Phi) - mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Másrészt tudjuk, hogy az x_i általános koordináta-hoz rendelt kanonikus impulzus

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

így most

$$\pi_i = ZeA_i + p_i.$$

A probléma Hamilton-függvénye pedig

$$H = \sum_i v_i \pi_i - L = Ze\Phi + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ahol a második tag a részecske energiája, ami írható $c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$ alakba is. Ezért

$$H(x_i; \pi_i) = Ze\Phi + c \sqrt{(\vec{\pi} - Ze\vec{A})^2 + m^2 c^2}.$$

Válasszuk az x_i -ket hengerkoordinátáknak, akkor

$$x_1 = \varrho \quad x_2 = \varphi \quad x_3 = \zeta$$

Ezekkel a jelölésekkel:

$$L = Ze(A_\varrho \dot{\varrho} + A_\varphi \varrho \dot{\varphi} + A_\zeta \dot{\zeta} - \Phi) - mc^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\zeta}^2)}$$

így tehát

$$\pi_\varrho = ZeA_\varrho + \gamma m \dot{\varrho}$$

$$\pi_\varphi = ZeA_\varphi \cdot \varrho + \gamma m \varrho^2 \dot{\varphi}$$

$$\pi_\zeta = ZeA_\zeta + \gamma m \dot{\zeta}$$

ahol γ a Lorentz-faktor.

Szűkítsük ezután a problémát arra az esetre, mikor Φ is és \vec{A} is független φ -től. Ebben az esetben látszik, hogy

$$\dot{\pi}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

azaz a π_φ mozgásállandó. A π_φ -ben szereplő ϱA_φ kifejezés egyszerűbb alakra hozható. A forgásszimmetria miatt ugyanis

$$\varrho A_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_\varphi \varrho d\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint \vec{A} d\vec{s}.$$

A Stokes-tétel alapján ez tovább alakítható:

$$\varrho A_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_F \text{rot } \vec{A} d\vec{F} = \frac{1}{2\pi} \int_F \vec{B} d\vec{F}$$

ahol F egy ζ tengely körüli ϱ sugarú kör által határolt tetszőleges felület (a kör középpontja a $(0, 0, \zeta)$ pontban van). Másrészt tudjuk, hogy az $\int_F \vec{B} d\vec{F}$ pontosan az F felületen átmenő mágneses fluxus, így

$$\varrho A_\varphi = \frac{1}{2\pi} \Phi_M(\zeta, \varrho).$$

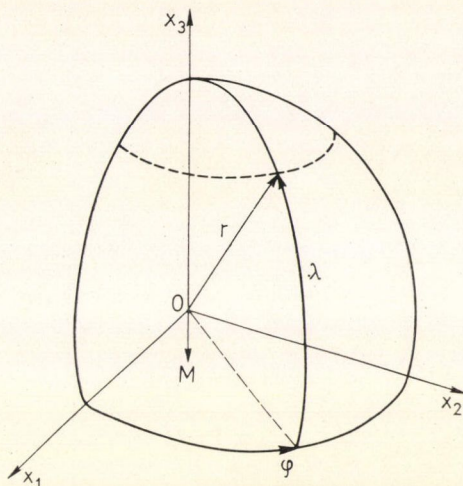
A π_φ -ben szereplő másik tag pedig pontosan a részecske ζ irányú impulzusmomentuma, így a következő összefüggést kaptuk:

$$\pi_\varphi = L_\zeta + \frac{Ze}{2\pi} \Phi_M = \text{const.}$$

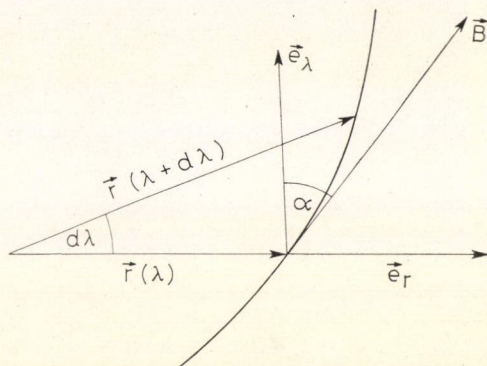
E megmaradási tétel alapján válik érthetővé a sugárzási övezetek kialakulása.

2.2. Mágneses dipólus tere

Vizsgáljuk egy \vec{M} mágneses momentumú dipólus terét. Válasszunk olyan koordinátarendszert, ahol a ζ tengely ($-\vec{M}$) irányú, s a gömbi polárkoordinátákat értelmezzük a 8. ábrán látható módon.



8. ábra. Az általunk használt koordinátarendszer; az origóban helyezkedik el a mágneses dipólus



9. ábra. \vec{B} -helyzete az \vec{e}_r , \vec{e}_λ által kifeszített koordinátarendszerben

Ebben az esetben a \vec{B} egy mágneses skálárpotenciál (η) segítségével írható fel:

$$\vec{B} = -\text{grad } \eta,$$

ahol

$$\eta = -\vec{M} \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -M \frac{1}{r^2} \sin \lambda.$$

Tehát

$$B_r = -\frac{\partial \eta}{\partial r} = -2 \frac{M}{r^3} \sin \lambda$$

$$B_\varphi = -\frac{1}{r \cos \lambda} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = 0$$

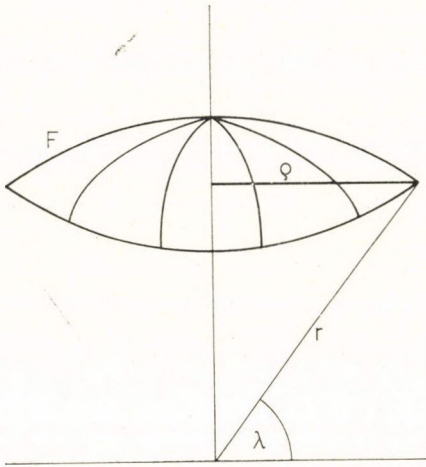
$$B_\lambda = -\frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} = M \frac{\cos \lambda}{r^3},$$

B abszolút értéke pedig

$$B = \frac{M}{r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}.$$

Egyszerűen felírható az erővonalak egyenlete is. Mivel $B_\varphi = 0$, így az erővonalak egy $r(\lambda)$ összefüggést elégítenek ki.

A 9. ábrán ábrázoltuk az erővonalak helyzetét az \vec{e}_r és \vec{e}_λ által meghatározott



10. ábra. A $\rho = \text{konstans}$ -sal jellemzett F gömbcsúcs

koordinátarendszerben. Az ábra alapján az r a $\lambda + d\lambda$ helyen a következő:

$$r(\lambda + d\lambda) = r(\lambda) + \tan \alpha \cdot r d\lambda = r(\lambda) + \frac{B_r}{B_\lambda} r d\lambda.$$

Másrészt sorba fejtve

$$r(\lambda + d\lambda) = r(\lambda) + \frac{dr}{d\lambda} d\lambda,$$

azaz

$$\frac{dr}{d\lambda} = r \frac{B_r}{B_\lambda},$$

innen

$$\frac{dr}{r} = -2 \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} d\lambda$$

tehát az erővonal egyenlete

$$r = r_0 \cos^2 \lambda.$$

Határozzuk meg ezek után a 2.1. pontban szereplő fluxust az r, λ függvényében. Láttuk, hogy

$$\Phi_M = \int_F \vec{B} d\vec{F}.$$

Legyen az F felület most olyan r sugarú gömbcsúcs, melynek határológörbéje olyan ρ sugarú kör, melynek középpontja a $(0, 0, z)$ pontban van (l. 10. ábra). Ekkor

$$d\vec{F} = \vec{e}_r r^2 \cos \lambda d\varphi d\lambda$$

és így

$$\Phi_M(\lambda, r) = - \int_{\lambda}^{\pi/2} d\varphi d\lambda' \frac{2M}{r} \sin \lambda' \cos \lambda'$$

tehát

$$\Phi(r, \lambda) = -2\pi \frac{M}{r} \cos^2 \lambda.$$

Ennek alapján π_φ felírható a következőképpen:

$$\pi_\varphi = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \varphi^2 - Ze \frac{M}{r} \cos^2 \lambda = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \varphi^2 \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} - Ze \frac{M}{r} \cos^2 \lambda$$

ahol s a részecsketrajektória mentén mért ívhossz. Másrészt tudjuk, hogy

$$\dot{s} = v,$$

ezért a

$$\pi_\varphi = pr^2 \cos^2 \lambda \frac{d\varphi}{ds} - Ze \frac{M}{r} \cos^2 \lambda$$

menyiség mozgásállandó.

2.3. Tiltott zónák a dipólus meridiánsíkjában

Az ívelem az r, φ, λ koordinátákkal a következőképpen írható fel:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 \cos^2 \lambda (d\varphi)^2 + r^2 (d\lambda)^2,$$

ebből következik, hogy

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \cos^2 \lambda \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = 1.$$

A részecskepályára vonatkoztatva $d\varphi/ds$ kifejezhető π_φ -vel, s így megkapható a részecske meridiánsíkbeli mozgásegyenlete. Tehát:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\pi_\varphi}{pr^2 \cos^2 \lambda} + \frac{ZeM}{pr^3} = \frac{Ze}{p} \frac{1}{r^2 \cos^2 \lambda} \left[c + \frac{M}{r} \cos^2 \lambda \right]$$

ahol $C = \pi_\varphi / Ze$. Így

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \left(\frac{Ze}{p}\right)^2 \left[\frac{c}{r \cos \lambda} + \frac{M}{r^2} \cos \lambda \right]^2 + r^2 \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = 1.$$

Legyen

$$r_s = \frac{ZeM}{p}$$

$$\gamma = \frac{cr_s}{2M}$$

akkor

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = 1 - \left[\left(\frac{r_s}{r}\right)^2 \cos \lambda + \left(\frac{r_s}{r}\right) \frac{2\gamma}{\cos \lambda} \right]^2.$$

Mivel a bal oldal nem-negatív, ezért a jobb oldalnak is annak kell lennie, tehát fizikai értelme csak azoknak az eseteknek van, ahol

$$\left| \left(\frac{r_s}{r}\right)^2 \cos \lambda + \left(\frac{r_s}{r}\right) \frac{2\gamma}{\cos \lambda} \right| \leq 1. \quad (I)$$

Ez azt jelenti, hogy az a tartomány, ahol ez nem teljesül, a részecske számára tiltott zóna lesz.

Vizsgáljuk meg a tiltott tartomány határát. Ezt az

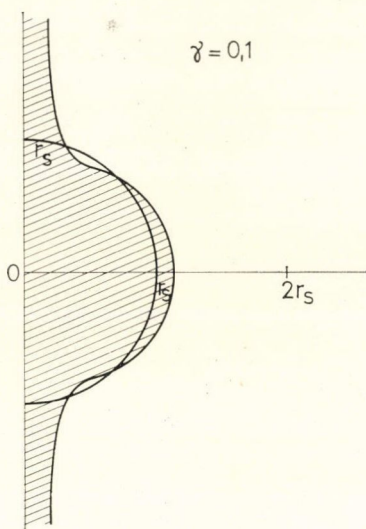
$$\left(\frac{r_s}{r}\right)^2 \cos \lambda + \left(\frac{r_s}{r}\right) \frac{2\gamma}{\cos \lambda} = \pm 1$$

egyenletek megoldásai adják. Ha a $+1$ -et vesszük figyelembe, akkor az egyenlet

$$r_s^2 \cos \lambda + r \cdot r_s \frac{2\gamma}{\cos \lambda} = r^2$$

így

$$r = \frac{r_s \gamma}{\cos \lambda} \pm r_s \sqrt{\frac{\gamma^2}{\cos^2 \lambda} + \cos \lambda}$$



11. ábra. A tiltott tartomány $\gamma=0,1$ esetén

de $r > 0$, így a fizikai megoldás

$$r_1 = \frac{r_s \gamma}{\cos \lambda} + r_s \sqrt{\frac{\gamma^2}{\cos^2 \lambda} + \cos \lambda}.$$

Ha a -1 -et vesszük figyelembe, akkor

$$r^2 + r_s^2 \cos \lambda + \gamma r_s \frac{2\gamma}{\cos \lambda} = 0.$$

Innen a két megoldás

$$r_2 = -\frac{r_s \gamma}{\cos \lambda} - r_s \sqrt{\frac{\gamma^2}{\cos^2 \lambda} - \cos \lambda}$$

$$r_3 = -\frac{r_s \gamma}{\cos \lambda} + r_s \sqrt{\frac{\gamma^2}{\cos^2 \lambda} - \cos \lambda}.$$

Látjuk, hogy a tiltott zóna γ értékétől függően más és más, vizsgáljuk tehát az egyes eseteket külön-külön.

A) eset $\gamma > 0$.

Ekkor az r_2 és r_3 -nak nincs fizikai jelentése és a tiltott zóna az

$$r(\lambda) < \frac{r_s \gamma}{\cos \lambda} + r_s \sqrt{\frac{\gamma^2}{\cos^2 \lambda} + \cos \lambda}$$

tartomány, melyet $\gamma=0,1$ esetben a 11. ábra mutat be.

B) eset $0 > \gamma \geq -1$.

Ebben az esetben az $r_1(\lambda)$ zárt görbe lesz, amelynek egyenlete

$$r_1(\lambda) = -\frac{r_s |\gamma|}{\cos \lambda} + r_s \sqrt{\frac{\gamma^2}{\cos^2 \lambda} + \cos \lambda}.$$

Adott λ -nál az $r < r_1(\lambda)$ pontok tiltottak. Emellett bizonyos λ -ra az r_2 és r_3 valós és pozitív lesz, azaz nem teljesül az (I) feltétel a közöttük levő r -ekre. Ennek következtében kialakul egy második tiltott tartomány az r_2 és r_3 között.

Mivel $\gamma > -1$, így lesz egy olyan λ érték, melyre a diszkrimináns eltűnik, itt $r_2 = r_3$ és ez alatt nincs második tiltott zóna. Legyen

$$\cos^3 \lambda_a = \gamma^2$$

Ekkor ha $\lambda = \lambda_a$, akkor

$$r_2 = r_3 = -r_s \gamma^{1/3}$$

ha $\lambda < \lambda_a$, akkor r_2, r_3 komplex.

Így a tiltott tartomány a következő jellegű:

C) eset $\gamma < -1$.

Ebben az esetben r_2 és r_3 is minden λ -ra pozitív és valós lesz, így a tiltott tartomány a 13. ábrán látható jelleget ölti.

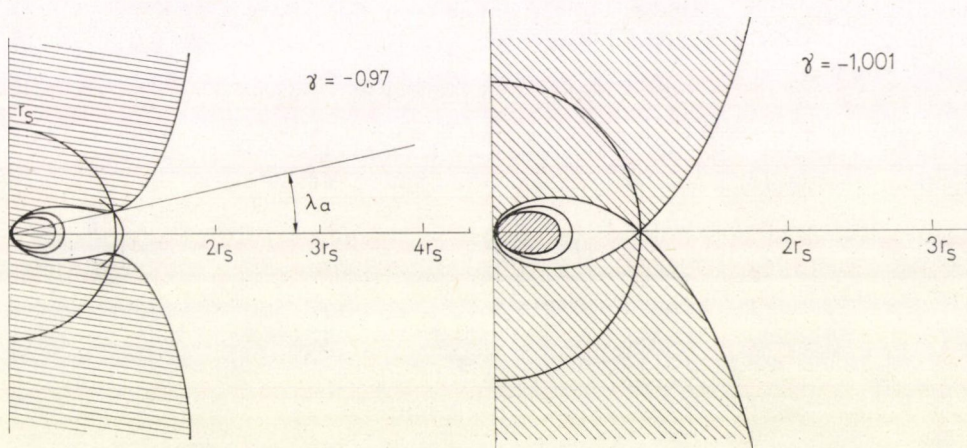
A részletes vizsgálatok alapján látszik, hogy a $\gamma < -1$ esetben lesznek olyan tartományok, melyekből a részecske nem tud kiszabadulni, mintegy kötött állapotba kerül a dipólus körül. Ez akkor valósul meg, ha a következő összefüggés teljesül:

$$\frac{\pi_\phi}{Ze} \frac{\sqrt{Ze}}{\sqrt{p}} \frac{\sqrt{M}}{2M} < -1$$

azaz, ha

$$\frac{\pi_\phi}{2} < -\sqrt{ZeMp}.$$

A továbbiakban az ilyen kötött részecskék mozgását fogjuk vizsgálni.



12. ábra. A tiltott tartomány $\gamma = 0,97$ esetén

13. ábra. A tiltott tartomány $\gamma = -1,001$ esetén

2.4. A vezetőközpont mozgása

Vezetőközpontnak (guiding centre) nevezzük az elektromágneses térben mozgó részecske mágneses térre merőleges síkvetületének adott pontjához húzott görbületi kör (Larmor-kör) középpontját. Ez azt jelenti, hogy homogén mágneses térben a részecske a vezetőközpont (VK) körül Larmor-sugarú körön mozog.

Tiszta, stacionárius mágneses térben mozgó részecske VK-ja az

$$\vec{r} - \vec{R} = \vec{r} - \frac{\vec{v} \times \vec{\Omega}}{\Omega^2}$$

pontban van, ahol $\vec{\Omega}$ a részecske giroszögsebessége

$$\vec{\Omega} = -\frac{c^2}{\varepsilon} Ze \vec{B} \quad \vec{R} = -\frac{1}{Ze} \vec{p} \times \frac{\vec{B}}{B^2}$$

ahol ε jelenti a részecske teljes energiáját.

Jelöljük τ -val a VK körüli mozgás periódusidejét, melynek reciprok értékét nevezzük gyofrekvenciának:

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi\epsilon}{ZeBc^2}.$$

További vizsgálataink során feltesszük, hogy mozgása során a részecske a mágneses teret lassan változónak észleli. Ez matematikailag a következőket jelenti:

Legyen L jelentése a következő

$$\frac{1}{L} = \max_{i,j} \left\{ \frac{1}{B} \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \right\}.$$

Ha

$$L \gg v\tau,$$

akkor a részecske a VK körüli körülfordulás alatt mintegy állandó mágneses térben érzi magát, és a részecske helyén a mágneses tér közel azonos a VK helyén levő térrel, így a részecske mozgása lokálisan úgy tekinthető, mintha homogén mágneses térben lenne.

Ez a feltétel a sugárzási övezetben levő részecskékre teljesül, tehát ez a közelítés esetünkben jogos.

Ebből következik, hogy a részecske a VK körül körmozgást végez, és a további mozgások már a VK mozgásaként írhatók le. A VK sebessége

$$\vec{v}^{(G)} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v} + \frac{1}{Ze} \frac{d}{dt} \left[\vec{p} \times \frac{\vec{B}}{B^2} \right] = \vec{v} + \frac{1}{Ze} \left[\frac{d\vec{p}}{dt} \times \left(\frac{\vec{B}}{B^2} \right) + \vec{p} \times \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{B}}{B^2} \right) \right].$$

De

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \times \frac{\vec{B}}{B^2} = Ze \frac{(\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{B^2} = -Ze\vec{v}_\perp$$

ahol

$$\vec{v}_\perp = \vec{v} - \frac{\vec{B}(\vec{v} \cdot \vec{B})}{B^2}$$

tehát

$$\vec{v}^{(G)} = \vec{v}_\parallel + \frac{1}{Ze} \vec{p} \times \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{B}}{B^2} \right).$$

Így a VK erővonalakra merőleges sebessége

$$\vec{v}_\perp^{(G)} = \frac{1}{Ze} \left[\vec{p} \times \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{B}}{B^2} \right) \right]_\perp.$$

Másrészt most $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$, így

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{B}}{B^2} \right) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{\vec{B}}{B^2} \right).$$

A „lassan változó tér” közelítésben felvehetjük úgy a koordinátarendszert, hogy $\vec{B} = (0, 0, B)$, így

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{B_1}{B^2} \right) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{B_2}{B^2} \right) = 0$$

és

$$(\vec{v}\vec{\nabla})\left(\frac{B_3}{B^2}\right) = (\vec{v}\vec{\nabla})\left(\frac{1}{B}\right) = -v_k(\partial_k B)\frac{1}{B^2}.$$

Az L definíciója miatt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{B_3}{B^2}\right) \sim -v\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{L}$$

tehát

$$v_{\perp}^{(G)} \sim -\frac{1}{Ze}\left[\vec{p}\times\frac{v\delta_{3k}}{BL}\right]_{\perp} = \frac{1}{Ze}\frac{v\vec{p}_{\perp}}{BL} = v\frac{R}{L}.$$

Mivel pedig a feltétel miatt $R \ll L$, így $v_{\perp}^{(G)}$ elsőrendűen kicsiny v -hez képest. Látszik tehát, hogy a VK az erővonal mentén v sebességhez közeli sebességgel mozog, míg arra merőlegesen vR/L körüli sebességgel. Mivel azonban valódi γ -kra a megengedett tartomány igen szűk, így a $v_{\perp}^{(G)}$ egy ζ tengely körüli forgást fog jelenteni.

Másrészt elemi eszközökkel megmutatható, hogy egy adott részecske megengedett övezetében egy és csak egy olyan erővonal van, amely mindvégig a tartományon belül marad, s ez az

$$r_0 = -2\frac{r_s}{\gamma}$$

egyenlítői távolságú erővonal. Így az általunk használt közelítésben úgy tekintjük, hogy a részecske VK-ja ezen erővonal mentén mozog, illetve sokkal lassabban, ilyen r_0 -lal jellemzett erővonalakon keresztül mozog.

2.5. Adiabaticus invariánsok

A Hamilton-formalizmus segítségével lassan változó terekben mozgó részecskékhez első közelítésben mozgásállandó mennyiségeket lehet rendelni minden olyan koordináta szerint, mely a részecske mozgása során periodikusan változik.

Jelöljük q_e -vel a periodikusan változó koordinátát, és T -vel a periódusidőt.

Tegyük fel továbbá, hogy a stacionárius külső tér valamilyen λ_{α} ($\alpha=1, 2, \dots$) paraméterrendszeren keresztül hat a részecske mozgására, és a külső tér lassú változása miatt a részecske a λ_{α} -kat kvázistacionáriusnak érzi, azok időben lassan változnak. Ha ezekre megfogalmazzuk a \vec{B} -re már látott feltételt a trajektóriaív-hossz függvényében, akkor a lassan változás a következőt jelenti:

$$\lambda_{\alpha}\frac{ds}{d\lambda_{\alpha}} \gg \frac{ds}{dt}T,$$

azaz

$$\lambda_{\alpha} \gg \frac{d\lambda_{\alpha}}{ds}\frac{ds}{dt}T = \frac{d\lambda_{\alpha}}{dt}T.$$

E feltétel teljesülése esetén a q_e koordinátához bevezethető egy olyan mennyiség, mely a külső tér lassú változásának ellenére első közelítésben invariáns marad, s így alkalmas a részecske mozgásának jellemzésére.

Ha az idő csak a λ_α -k közvetítésével szerepel, akkor a H Hamilton-függvény sem függ explicite az időtől, s így, mivel $H = H(q_k, \pi_k, \lambda_\alpha)$, ezért

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \left[\dot{q}_k \frac{\partial H}{\partial q_k} + \dot{\pi}_k \frac{\partial H}{\partial \pi_k} \right] + \sum_\alpha \dot{\lambda}_\alpha \frac{\partial H}{\partial \lambda_\alpha}.$$

Másrészt tudjuk, hogy

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial \pi_k} \quad \text{és} \quad \dot{\pi}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

így tehát

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dE}{dt} = \sum_\alpha \dot{\lambda}_\alpha \frac{\partial H}{\partial \lambda_\alpha}.$$

Képezzük ennek az egyenletnek az átlagát egy periódusra. Ez a lassú változás miatt jó közelítéssel

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_T = \sum_\alpha \dot{\lambda}_\alpha \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda_\alpha} \right\rangle_T$$

azaz

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE}{dt} dt = \sum_\alpha \dot{\lambda}_\alpha \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda_\alpha} dt.$$

Másrészt tudjuk, hogy bármely k -ra

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial \pi_k}.$$

Ha q_e a periodikus koordináta, akkor a dt azzal kifejezhető

$$dt = \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_e} \right)^{-1} dq_e$$

azaz így

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_T = \sum_\alpha \dot{\lambda}_\alpha \frac{\oint \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_\alpha} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_e} \right)^{-1} dq_e}{\oint \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_e} \right)^{-1} dq_e}.$$

Egy perióduson belül az energia állandónak tekinthető, így felírhatjuk a következő azonosságot:

$$\frac{dH}{d\lambda_\alpha} = 0,$$

mivel pedig egy periódus alatt $\pi_e = \pi_e(q_e, E, \lambda_\alpha)$, ezért

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial \pi_e} \frac{\partial \pi_e}{\partial \lambda_\alpha} = 0.$$

Innen

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_\alpha} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_\alpha} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_e} \right)^{-1}.$$

így

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_T = - \sum_{\alpha} \dot{\lambda}_{\alpha} \frac{\oint \frac{\partial \pi_e}{\partial \lambda_{\alpha}} dq_e}{\oint \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_e} \right)^{-1} dq_e}$$

azaz

$$\oint dq_e \left\{ \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_T \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_e} \right)^{-1} + \dot{\lambda}_{\alpha} \left(\frac{\partial \pi_e}{\partial \lambda_{\alpha}} \right) \right\} = 0. \quad (1)$$

Legyen

$$I_{q_e} = \oint \pi_e dq_e.$$

Ekkor

$$\dot{\pi}_{q_e} = \oint dq_e \left\{ \frac{\partial \pi_e}{\partial q_e} \dot{q}_e + \frac{\partial \pi_e}{\partial E} \dot{E} + \sum_{\alpha} \dot{\lambda}_{\alpha} \frac{\partial \pi_e}{\partial \lambda_{\alpha}} \right\}.$$

Ennek egy periódusra vett átlaga

$$\langle \dot{I}_{q_e} \rangle = \oint dq_e \left\{ \frac{\partial \pi_e}{\partial q_e} \langle \dot{q}_e \rangle + \frac{\partial \pi_e}{\partial E} \langle \dot{E} \rangle + \sum_{\alpha} \dot{\lambda}_{\alpha} \frac{\partial \pi_e}{\partial \lambda_{\alpha}} \right\}.$$

Az (1) egyenletet felhasználva ez a következő lesz:

$$\langle \dot{I}_{q_e} \rangle_T = \oint dq_e \frac{\partial \pi_e}{\partial q_e} \langle \dot{q}_e \rangle_T.$$

Minthogy

$$\langle \dot{q}_e \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{q}_e dt = \frac{1}{T} [q_e(T) - q_e(0)] = 0,$$

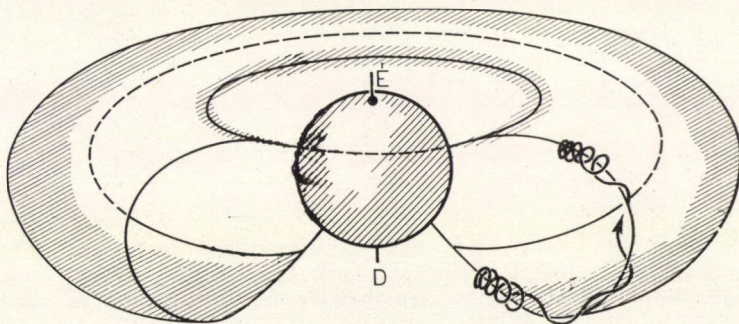
azért

$$\langle \dot{I}_{q_e} \rangle_T = 0.$$

Tehát az I_{q_e} mennyiségek a lassan változó terekben invariánsak, ezeket szokták adiabatikus invariánsoknak nevezni.

Az I_{q_e} ismeretében a T periódusidő egyszerűen megkapható. Ugyanis

$$T = \oint \frac{\partial \pi_e}{\partial E} dq_e = \frac{\partial I_{q_e}}{\partial E}.$$



14. ábra. Részecske pályája a Föld dipólusterében

2.6. Adiabátikus invariánsok mágneses dipólus terében

A 2.4. fejezetben láttuk, hogy a részecskék a mágneses dipólus lassan változó terében három periodikus mozgást végeznek: közel körpályán mozognak a VK körül, a VK mozog az erővonal mentén körülbelül \bar{v}_{\parallel} sebességgel, és a VK körbe mozog a dipólus körül vR/L nagyságrendű sebességgel.

Ebben a fejezetben a fenti három periodikus mozgáshoz tartozó adiabátikus invariánsokat vezetjük be.

A) Transzverzális invariáns

Mivel közelítésünkben a részecske egy körülfordulása alatt a mágneses tér közel homogénnek tekinthető, azért vegyünk fel lokálisan egy olyan koordináta-rendszert, melyben a z tengely a B irányába mutat.

Legyen a VK az origóban, ekkor a mozgás a 15. ábrán látható módon megy végbe.

Mivel most a q a ciklikus koordináta, így

$$I_q = \oint \pi_q dq = \oint [ZeA_q + p_q] dq.$$

Mivel $\vec{B} = (0, 0, B)$, így $A_q = 0$, azaz

$$I_q = \oint p_q dq.$$

A 15. ábra alapján látszik, hogy

$$dq = R \sin \Theta d\Theta$$

és

$$p_q = p_{\perp} \sin \Theta$$

ahol R a sugár. Így

$$I_q = \int_0^{2\pi} R p_{\perp} \sin^2 \Theta d\Theta = R p_{\perp} \left[\frac{1}{2} \Theta - \frac{1}{4} \sin 2\Theta \right]_0^{2\pi} = \pi p_{\perp} R = \frac{\pi p_{\perp}^2}{ZeB}.$$

Legyen

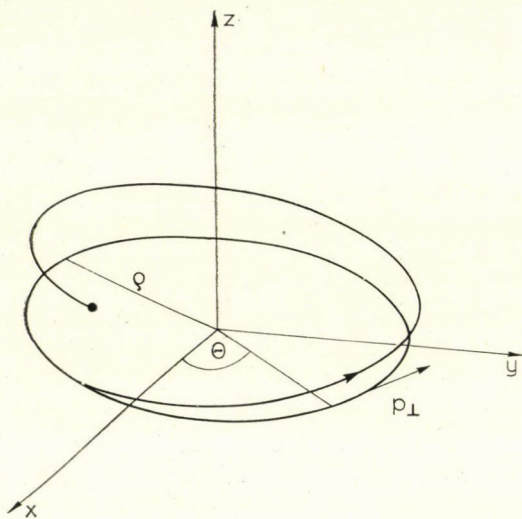
$$I_1 = \frac{p_{\perp}^2}{B}.$$

Ekkor

$$I_q = \frac{\pi}{Ze} I_1.$$

Látszik tehát, hogy ha a VK egy erővonal mentén mozog, akkor p_{\perp} -nek változni kell, s mivel

$$p_{\perp} = p \sin \alpha,$$



15. ábra. Részecske pályája, ha a VK a z tengely mentén mozog

ahol α az irányszög (pitch angle),* ezért ez változik az erővonal menti mozgás során.

Kiszámítható a VK körüli forgás periódusideje is, ez

$$T_e = \frac{\partial I_e}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial I_e}{\partial p_{\perp}} \frac{\partial p_{\perp}}{\partial \varepsilon} = \frac{2\pi}{ZeB} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_{\perp}} \right)^{-1}.$$

De

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_{\perp}} = c \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \sqrt{c^2 m^2 + p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2} = \frac{c^2 p_{\perp}}{\varepsilon}$$

így

$$T_e = \frac{2\pi \varepsilon}{Zec^2 B}.$$

Nem relativisztikus esetben ez numerikusan azt jelenti, hogy

$$T_e = \begin{cases} 6,5 \cdot 10^{-4} B^{-1} & \text{protonokra} \\ 3,6 \cdot 10^{-7} B^{-1} & \text{elektronokra} \end{cases}$$

ahol B -t gaussokban kell számítani.

B) Longitudinális invariáns

A VK közelítően a mágneses erővonalak mentén mozog, így ha az erővonal ívhosszát koordinátának tekintjük, abban a részecske mozgása periodikus lesz.

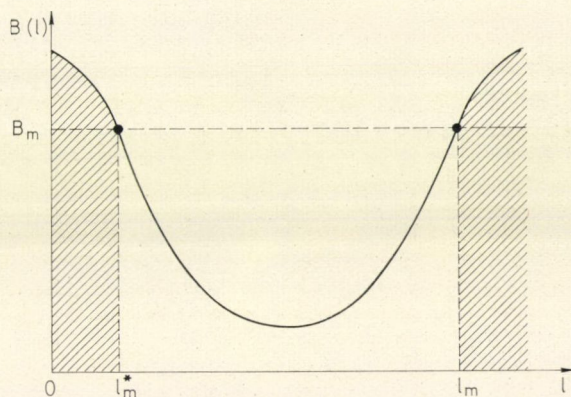
Egyszerűen kiszámítható az a két ívhossz is, amelyeknél a részecske longitudinális impulzusa irányt változtat.

Jelöljük nulla indexszel az egyes mennyiségeknek az egyenlítő síkban felvett értékét. Ekkor tudjuk, hogy

$$\frac{\sin^2 \alpha_0}{B_0} = \frac{\sin^2 \alpha(l)}{B(l)}.$$

Legyen B_m a mágneses tér értéke ott, ahol $\sin^2 \alpha = 1$. Ekkor

$$\frac{1}{B_m} = \frac{\sin^2 \alpha_0}{B_0}.$$



16. ábra. B mint az erővonal mentén mért ívhossz függvénye

Ez azt jelenti, hogy B_m -nél nagyobb télerősségű szakaszba a részecske nem tud eljutni.

A 16. ábrán látható a $B-l$ összefüggés egy erővonalra. A görbe jellege miatt nyilvánvaló, hogy a vonalkázott részeket a részecske nem érheti el, az l_m^* és az l_m pontok tehát visszaverődési pontok.

* Azaz a részecskepálya és az erővonal által bezárt szög. Az angol „pitch angle” kifejezés magyar megfelelőjének javasoljuk a „mágneses irányszög” vagy röviden „irányszög” elnevezést.

Ha a teret lokálisan homogénnek tekintjük, és a z tengelyt a \vec{B} irányába vesszük fel, akkor nyilvánvaló, hogy $A_z = 0$, azaz

De
$$\pi_l = p_l.$$

így
$$p_l = p \cos \alpha$$

$$I_l = \oint p_l dl = \oint p \cos \alpha dl.$$

Az I_l -ből tudjuk, hogy

így
$$\frac{\sin^2 \alpha}{B(l)} = \frac{1}{B_m}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{B}{B_m}}.$$

Ismeretes, hogy

$$dl = r \sqrt{1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2} d\lambda,$$

s mivel az erővonal mentén

$$r = r_0 \cos^2 \lambda,$$

azért

$$dl = r_0 \cos^2 \lambda \sqrt{1 + \frac{4 \cos^2 \lambda \sin^2 \lambda}{\cos^4 \lambda}} d\lambda = r \cos \lambda \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda} d\lambda$$

így

$$I_l = 2p \int_{l_m^*}^{l_m} \sqrt{1 - \frac{B(l)}{B_m}} r_0 \cos \lambda \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda} d\lambda.$$

Tudjuk, hogy

$$B = \frac{M}{r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda},$$

és hogy a probléma az egyenlítőre szimmetrikus, így

$$I_l = 4pr_0 \int_0^{\lambda_m} \left[1 - \frac{\cos^6 \lambda_m \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}}{\cos^6 \lambda \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda_m}} \right]^{1/2} \cos \lambda \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda} d\lambda.$$

Kiszámítható az erővonal menti mozgás periódusideje is. Ez

Mivel
$$T_l = \frac{\partial I_l}{\partial \varepsilon} = \oint \frac{\partial p_l}{\partial \varepsilon} dl.$$

azért
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_l} = c \frac{\partial \sqrt{m^2 c^2 + p_l^2 + p_\perp^2}}{\partial p_l} = \frac{c^2 p_l}{\varepsilon},$$

$$T_l = \oint \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{1}{p_l} dl,$$

ez pedig a következő alakba írható:

$$T_l = \frac{4r_0}{v} \int_0^{\lambda_m} \frac{\cos \lambda \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda} d\lambda}{\left[1 - \frac{\cos^6 \lambda_m \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}}{\cos^6 \lambda \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda_m}}\right]^{1/2}} = \frac{4r_0}{v} F(\lambda_m).$$

Az $F(\lambda_m)$ csak numerikusan számolható, ennek menetét mutatja a 17. ábra.

Az eddigiek alapján megbecsülhető T_l és T_e aránya:

$$\frac{T_l}{T_e} = \frac{4r_0 \varepsilon}{pc^2} F(\lambda_m) \cdot \frac{Zec^2 B}{2\pi \varepsilon} = \frac{2r_0}{R_m} \frac{F(\lambda_m)}{\pi}$$

ahol R_m a girorádusz akkor, mikor a VK az l_m helyen van. Mivel $2F/\pi \approx 1$, azért

$$\frac{T_l}{T_e} \approx \frac{r_0}{R_m}.$$

C) Fluxus invariáns

Láttuk, hogy a VK lassan mozog az erővonalakra merőleges irányban, így a részecske igen lassan precesszál a ζ tengely körül. Az ebből következő adiabatikus invariáns:

$$I_\varphi = \oint \pi_\varphi d\varphi.$$

Mivel láttuk, hogy π_φ mozgásállandó, és φ -től független, azért

$$I_\varphi = 2\pi\pi_\varphi.$$

Másrészt

$$\pi_\varphi = L_\xi + \frac{Ze}{2\pi} \Phi_M.$$

Ha azt a közelítést alkalmazzuk, hogy a VK erővonal mentén mozog, akkor $L_\xi = 0$

és $\Phi_M = -2\pi \frac{M}{r_0}$, s így

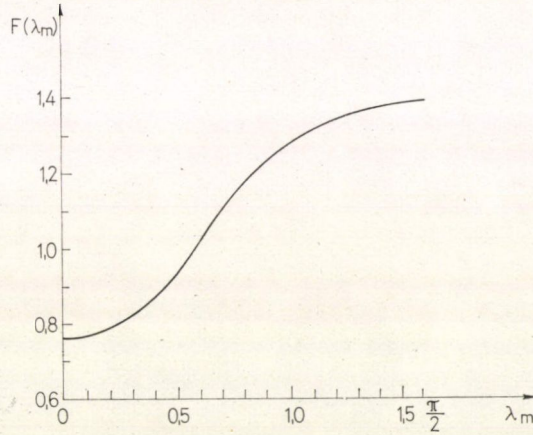
$$\pi_\varphi = -Ze \frac{M}{r_0}.$$

A precesszió periódusideje

$$T_\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\partial L_s}{\partial \varepsilon} \cdot d\varphi = \frac{1}{c^2} \int_0^{2\pi} \varrho^2 \dot{\varphi} d\varphi$$

ennek kiszámítása csak numerikusan lehetséges.

A 2. és 3. táblázatban feltüntettük a T_e , T_e , T_φ értékeket különböző energiákra és λ_m -ekre, mind elektronok, mind protonok esetére.



17. ábra. Az $F(\lambda_m)$ függvény menete

Proton

2. TÁBLÁZAT

K, ev	ro/r \oplus	$\lambda_m=0^\circ$			$\lambda_m=20^\circ$			$\lambda_m=40^\circ$			$\lambda_m=60^\circ$			$\lambda_m=67^\circ$		
		r, sec	T _I , sec	T _φ , sec	r, sec	T _I , sec	T _φ , sec	r, sec	T _I , sec	T _φ , sec	r, sec	T _I , sec	T _φ , sec	r, sec	T _I , sec	T _φ , sec
10 ⁵	1,02	2,170 $\times 10^{-4}$	4,393	2,598 $\times 10^4$												
	1,155	3,152 $\times 10^{-4}$	4,975	2,294 $\times 10^4$	1,866 $\times 10^{-4}$	5,712	2,466 $\times 10^4$									
	1,738	1,074 $\times 10^{-3}$	7,487	1,525 $\times 10^4$	6,358 $\times 10^{-4}$	8,595	1,639 $\times 10^4$	1,451 $\times 10^{-4}$	10,86	1,875 $\times 10^4$						
	4,080	1,389 $\times 10^{-2}$	17,57	6,495 $\times 10^3$	5,644 $\times 10^{-3}$	20,17	6,982 $\times 10^3$	1,876 $\times 10^{-3}$	25,49	7,989 $\times 10^5$	1,203 $\times 10^{-4}$	30,10	8,996 $\times 10^3$			
	6,680	6,096 $\times 10^{-2}$	28,77	3,967 $\times 10^3$	3,609 $\times 10^{-2}$	25,96	4,265 $\times 10^3$	8,235 $\times 10^{-3}$	41,74	4,879 $\times 10^3$	5,279 $\times 10^{-4}$	49,27	5,494 $\times 10^3$	1,153 $\times 10^{-4}$	50,91	5,653 $\times 10^3$
10 ⁷	1,02	2,170 $\times 10^{-4}$	0,4393	2,598 $\times 10^2$												
	1,155	3,152 $\times 10^{-4}$	0,4975	2,294 $\times 10^2$	1,866 $\times 10^{-4}$	0,5712	2,466 $\times 10^2$									
	1,738	1,074 $\times 10^{-3}$	0,7487	1,525 $\times 10^2$	6,358 $\times 10^{-4}$	0,8595	1,639 $\times 10^2$	1,451 $\times 10^{-4}$	1,086	1,875 $\times 10^2$						
	4,080	1,389 $\times 10^{-2}$	1,757	64,95	5,644 $\times 10^{-3}$	2,017	69,82	1,876 $\times 10^{-3}$	2,549	79,89	1,203 $\times 10^{-4}$	3,010	89,96			
	6,680	6,096 $\times 10^{-2}$	2,877	39,67	3,609 $\times 10^{-2}$	2,596	42,65	8,235 $\times 10^{-3}$	4,174	48,79	5,279 $\times 10^{-4}$	4,927	54,94	1,153 $\times 10^{-4}$	5,091	56,53

3. TÁBLÁZAT

K, ev	$ro/r \oplus$	$\lambda_m = 0^\circ$			$\lambda_m = 20^\circ$			$\lambda_m = 40^\circ$			$\lambda_m = 60^\circ$			$\lambda_m = 67^\circ$		
		r, sec	T_l , sec	T_φ , sec	r, sec	T_l , sec	T_φ , sec	r, sec	T_l , sec	T_φ , sec	r, sec	T_l , sec	T_φ , sec	r, sec	T_l , sec	T_φ , sec
10^4	1,02	$1,204 \times 10^{-7}$	0,3286	$2,623 \times 10^5$												
	1,55	$1,749 \times 10^{-7}$	0,3722	$2,316 \times 10^5$	$1,036 \times 10^{-7}$	0,4273	$2,490 \times 10^5$									
	1,738	$5,960 \times 10^{-7}$	0,5601	$1,540 \times 10^5$	$3,528 \times 10^{-7}$	0,6430	$1,655 \times 10^5$	$8,053 \times 10^{-8}$	0,8124	$1,893 \times 10^5$						
	4,080	$7,709 \times 10^{-6}$	1,314	$6,558 \times 10^4$	$3,132 \times 10^{-6}$	1,509	$7,050 \times 10^4$	$1,041 \times 10^{-6}$	1,907	$8,066 \times 10^4$	$6,676 \times 10^{-8}$	2,252	$9,083 \times 10^4$			
	6,680	$3,383 \times 10^{-5}$	2,152	$4,005 \times 10^4$	$2,003 \times 10^{-5}$	1,942	$4,306 \times 10^4$	$4,570 \times 10^{-5}$	3,123	$4,926 \times 10^4$	$2,930 \times 10^{-7}$	3,686	$5,547 \times 10^4$	$6,390 \times 10^{-8}$	3,809	$5,708 \times 10^4$
10^6	1,02	$3,494 \times 10^{-7}$	2,06818	$3,884 \times 10^8$												
	1,155	$5,075 \times 10^{-7}$	0,07721	$3,430 \times 10^8$	$3,004 \times 10^{-7}$	0,03865	$3,687 \times 10^8$									
	1,738	$1,729 \times 10^{-6}$	0,1162	$2,265 \times 10^8$	$1,024 \times 10^{-6}$	0,1334	$2,450 \times 10^8$	$2,336 \times 10^{-7}$	0,1685	$2,803 \times 10^8$						
	4,080	$2,236 \times 10^{-5}$	0,2727	$9,710 \times 10^8$	$9,087 \times 10^{-6}$	0,3130	$1,044 \times 10^8$	$3,020 \times 10^{-6}$	0,3956	$1,194 \times 10^8$	$1,937 \times 10^{-7}$	0,4672	$1,345 \times 10^8$			
	6,680	$9,815 \times 10^{-5}$	0,4465	$5,931 \times 10^8$	$5,810 \times 10^{-5}$	0,4029	$6,376 \times 10^8$	$1,326 \times 10^{-5}$	0,6478	$7,294 \times 10^8$	$8,499 \times 10^{-7}$	0,7647	$8,214 \times 10^8$	$1,856 \times 10^{-7}$	0,7901	$8,482 \times 10^8$

3. Sugárzási övezetek a Föld mágneses terében

3.1. Kötött részecskék a Föld mágneses terében

A Föld mágneses terének dipólus-összetevője olyan $M = 8,06 \cdot 10^{25}$ gauss cm^3 erősségű dipólussal helyettesíthető, amely a Föld középpontjától 436 km-re van, s tengelye 11° -os szöget zár be a Föld forgástengelyével.

Mivel a Föld északi sarka a dipólus déli pólusa, ezért az erővonalak a déli mágneses pólustól az északi felé haladnak.

Ez a dipólustér jól írja le a Föld mágneses terét mintegy $6-8 R_e$ -ig ($R_e = 6,37 \cdot 10^8$ cm). Ezen a tartományon belül a dipólustértől való eltérés csak kis perturbációnak tekinthető.

A Föld dipólusterében csapdába esett részecske csak a földkéreg felett (most az atmoszféra is ide értendő) kerülhet stacionárius pályára, s ez a körülmény limitálja a sugárzási öveget alkotó részecskék energiáját.

Mivel

$$\gamma = \frac{c}{2M} r_s = \frac{\pi_\phi}{Ze} \frac{1}{2M} \sqrt{\frac{ZeM}{p}} = -\frac{1}{2r_0} \sqrt{\frac{ZeM}{p}}$$

és a kötött pálya kialakulásának feltétele

$$\gamma < -1,$$

így ebből

$$\frac{ZeM}{4r_0^2} > p$$

adódik. Beírva a numerikus értékeket azt kapjuk, hogy

$$p < 1,5 \cdot 10^4 \text{ MeV/c}.$$

Adott p és r_0 esetén meghatározható az a λ_m , ameddig a stacionárius sugárzás terjedhet. Ugyanis teljesülnie kell annak a feltételnek, hogy

$$2R_m \leq r_2(\lambda_m) - r_1(\lambda_m),$$

különben a részecske szóródik a tiltott zóna határáról, s a feltételt teljesítő pályára áll rá. A feltételt részletesen kiírva

$$\frac{2p}{ZeB_m} \leq -\frac{2r_s\gamma}{\cos \lambda_m} - r_s \left\{ \sqrt{\frac{\gamma^2}{\cos^2 \lambda_m} - \cos \lambda_m} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{\cos^2 \lambda_m} + \cos \lambda_m} \right\}.$$

Minthogy

$$\gamma = -\frac{1}{2r_0} \sqrt{\frac{ZeM}{p}} = -\frac{r_s}{2r_0}$$

és

$$r_s = \sqrt{\frac{ZeM}{p}},$$

azért

$$\frac{2p}{ZeB_m} \leq \frac{r_s^2}{r_0 \cos \lambda_m} - r_s \left\{ \sqrt{\frac{r_s^2}{4r_0^2 \cos^2 \lambda_m} - \cos \lambda_m} + \sqrt{\frac{r_s^2}{4r_0^2 \cos^2 \lambda_m} + \cos \lambda_m} \right\}$$

tehát

$$\frac{Zpr_0^3 \cos^6 \lambda_m}{ZeM \sqrt{1+3 \sin^2 \lambda_m}} \cong \frac{r_s^2}{r_0 \cos \lambda_m} - r_s \left\{ \sqrt{\frac{r_s^2}{4r_0^2 \cos^2 \lambda_m} - \cos \lambda_m} + \sqrt{\frac{r_s^2}{4r_0^2 \cos^2 \lambda_m} + \cos \lambda_m} \right\}$$

így

$$\frac{2r_0^4 \cos^6 \lambda_m}{\sqrt{1+3 \sin^2 \lambda_m}} \cong \frac{r_s^4}{\cos \lambda_m} - r_s^3 \left\{ \sqrt{\frac{r_s^2}{4 \cos^2 \lambda_m} - r_0^2 \cos \lambda_m} + \sqrt{\frac{r_s^2}{4 \cos^2 \lambda_m} + r_0^2 \cos \lambda_m} \right\}.$$

Az egyenlőségénél adódó λ_m a stacionáriusan elérhető legnagyobb szög. Az egyenlőtlenségből belátható, hogy a maximális λ_m az r_s növekedésével nő. Mivel pedig $r_s \sim p^{-1/2}$, így növekvő energiával λ_m csökken. Ezáltal érthetővé válik, hogy protonok belső sugárzási övezete — amely nagy energiájú részecskékből áll — miért csak a mágneses egyenlítő felett helyezkedik el, míg a külső elektronövezet miatt terjed majdnem a sarkokig.

3.2. L — B koordináták

Az eddigiekben láttuk, hogy a részecskék közelítőleg egy-egy erővonal mentén mozognak, s ζ körüli mozgásuk közben az erővonal r_0 -ja állandó marad. Másrészt azt is láttuk, hogy az

$$I_l = \frac{\sin^2 \alpha}{B}$$

konstans, és így az erővonal egyes szakaszain való tartózkodás valószínűsége arányos $\sqrt{BI_l}$ -gyel. Látszik tehát, hogy a sugárzási övek leírására az r_0 és B mennyiségek igen alkalmasak, az intenzitás csak ezektől fog függeni.

Elvileg természetesen más koordináta-pár is alkalmas lenne erre a feladatra, de az r_0 és B segítségével a Föld dipólustól eltérő terében bevezethető olyan L koordináta az r_0 helyett, mely a dipólustól való eltéréseket automatikusan korrigálja, vagyis az L, B rendszerben a Föld mágneses tere 0,03 százaléknál jobban közelíti a dipólust.

Ez az L koordináta az I_2 adiabatikus invariáns segítségével vezethető be.

Láttuk, hogy dipólus esetében

$$I_l = 4pI_2 = 4pr_0 h_1(\lambda_m)$$

ahol

$$h_1(\lambda_m) = \int_0^{\lambda_m} \left[1 - \frac{\cos^6 \lambda_m \sqrt{1+3 \sin^2 \lambda}}{\cos^6 \lambda_m \sqrt{1+3 \sin^2 \lambda_m}} \right]^{1/2} \cos \lambda \sqrt{1+3 \sin^2 \lambda} d\lambda.$$

Másrészt bármely pontban

$$B = \frac{M}{r_0^3 \cos^6 \lambda} \sqrt{1+3 \sin^2 \lambda}$$

azaz

$$\frac{r_0^3 B}{M} = h_2(\lambda).$$

h_2 egyértékű függvény, így

$$\lambda = h_2^{-1} \left(\frac{r_0^3 B}{M} \right).$$

Másrészt látszik, hogy

$$\frac{I_2^3 B_m}{M} = \frac{r_0^3 B_m}{M} h_1^3(\lambda_m) = \frac{r_0^3 B_m}{M} h_1^3 \left(h_2^{-1} \left(\frac{r_0^3 B_m}{M} \right) \right).$$

Tehát

$$\frac{I_2^3 B_m}{M} = f \left(\frac{r_0^3 B_m}{M} \right)$$

azaz innen

$$\frac{r_0^3 B_m}{M} = F \left(\frac{I_2^3 B_m}{M} \right).$$

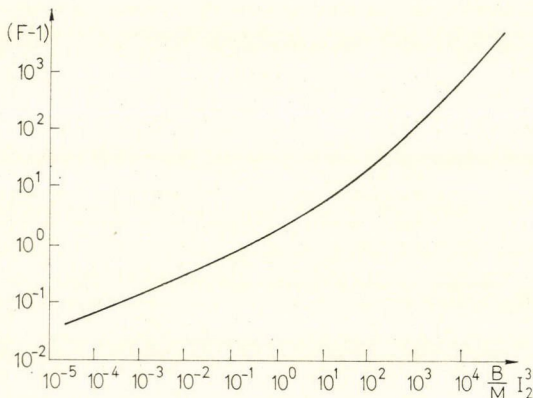
Az α_0 megfelelő választásával B_m bármely pontba kerülhet az erővonalon, így ez minden B -re igaz, azaz

$$\frac{r_0^3 B}{M} = F \left(\frac{I_2^3 B}{M} \right).$$

Az F függvény menetét mutatja a 18. ábra.

Definiáljuk ezután a Föld mágneses terében az L mennyiséget a következő módon:

$$\frac{L^3 B}{M} = F \left(\frac{I_2^3 B}{M} \right)$$



18. ábra. Az $(F-1)$ függvény menete.

B ismeretében az L pontról pontra kiszámítható, s így az I_2 adiabikus invariáns ellensúlyozza a földi mágneses tér pólustól való eltérését.

Az L fizikai jelentése igen szemléletes. Valódi dipólus terében a részecske a φ irányú driftet egy r_0 -konstans erővonalaseregen át végzi, most ez a felület L -konstans megkötést jelent. Az L segítségével a problémát dipólus esetre vettük vissza.

Mivel az L bevezetésével megőriztük a tengelyszimmetriát, és I_1 invariáns volta miatt az irányszög B -vel kifejezhető, így a részecskesűrűség csak L , B és p függvénye lehet, azaz

$$n = n(L, B, p).$$

Ezt az elméleti következtetést a kísérletek jól igazolják. A 19. ábrán láthatók az Explorer IV. által mért azonos intenzitású görbék az L , B síkon.

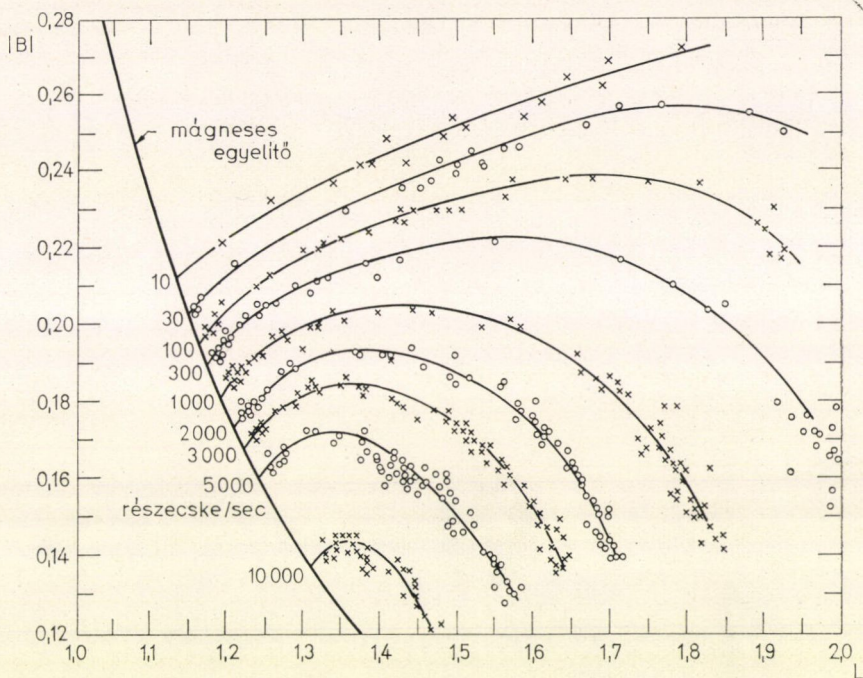
Vezessük be az r_{eff} és λ_{eff} mennyiségeket a következő módon:

$$B = \frac{M}{r_{\text{eff}}^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda_{\text{eff}}}$$

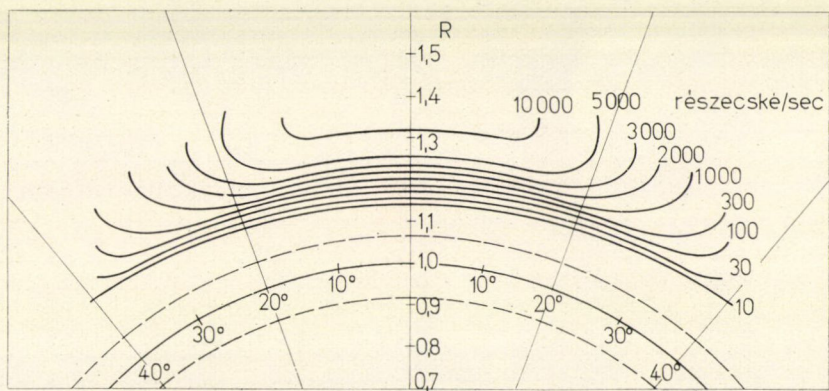
$$r_{\text{eff}} = L \sin^2 \lambda_{\text{eff}}$$

majd ábrázoljuk az azonos intenzitású görbéket az r_{eff} , λ_{eff} síkon. Ekkor a 20. ábrán látható görbéket kapjuk, melyek a pontos mágneses dipólus terében kialakuló megengedett zónák határainak felelnek meg.

Sugárzási öv térképekre rátekintve látszik, hogy az egyes övezetek úgy tekint-



19. ábra. Az Explorer IV. által mért egyenlő intenzitású görbék az L, B síkon



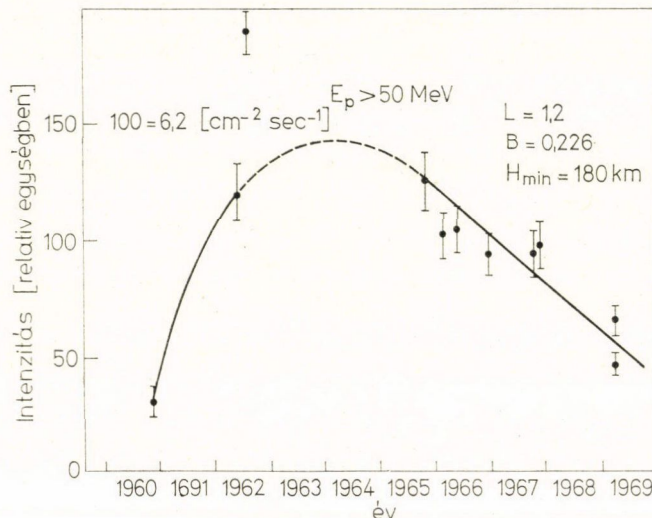
20. ábra. Az Explorer IV. által mért egyenlő intenzitású görbék effektív polárkoordinátákban ábrázolva

hetők, mint egy-egy adott L körül kialakuló megengedett zónák, melyekben azonban egy adott energiaövből elhelyezkedő részecskék találhatók.

Még nem tisztázott az a kérdés, hogy miért éppen az adott L -ek körül alakulnak ki a sugárzási övek.

3.3. Időbeli változások

Azok a fizikai folyamatok, melyek a sugárzási övezetek időbeli változásait okozzák, nem ismertek teljesen. A jelenlegi eredmények alapján azonban bebizonyítottak tekinthető, hogy a magnetoszféra egészének dinamikája tükröződik ezekben a változásokban. Ennek ellenére mind ez ideig nem sikerült megtalálni a magnetoszférának azt a dinamikai paraméterrendszerét, melynek változásával leírható a sugárzási övek dinamikája. Valószínűnek látszik, hogy a részecskék magneto-hidrodinamikai mozgások révén kapcsolódnak a magnetoszférához.



1. ábra. A belső protonövezet intenzitásváltozása a 60-as években

Mivel a magnetoszféra paramétereinek változásai a napszél változásaira vezethetők vissza, azért — egyes elképzelések szerint — a sugárzási övek dinamikáját a napszél időbeli változásai segítségével kellene leírni. Ilyen számítások elvégzéséhez azonban jelenleg sem a megfelelő elméleti alap, sem elegendő kísérleti tény nem áll rendelkezésünkre.

A kísérletek tanúsága szerint a belső proton sugárzási övek 11 éves periodicitást mutatnak, mint az a 21. ábrán látható. Mágneses viharok idején az övezetben az intenzitás nagymértékben csökken, ez a jelenség valószínűleg a dipólustértől való nagyarányú időleges eltérés következménye, a kérdés azonban még nincs tisztázva.

Tapasztalat szerint a külső protonövezet stabilabb, mint a belső, nem mutatja a 11 éves periodicitást, s a mágneses viharok is csak kisebb intenzitásváltozást okoznak benne.

Az elektronok időbeli változásai igen erősek, s az instabil zónában az intenzitás a helyi idő szerint is változik a magnetoszféra aszimmetriája miatt. Ez a zóna igen érzékeny mind a napszél, mind a geomágneses tevékenység változásaira, mágneses viharok idején feltöltődik, majd nyugodt időszakban kiürül.

A külső elektronövezet szintén követi a mágneses változásokat; a tapasztalat szerint a külső elektronövezetben a harmadik adiabatikus invariáns nem marad változatlan, így befelé irányuló radiális sodrás van, mely a másik két invariáns megmaradása miatt gyorsítással jár.

A belső elektronövezetben nyugodt mágneses időszakban az intenzitás folytonosan csökken, míg mágneses viharok idején növekszik. Ennek valószínűleg az az oka, hogy az övezetből nagy a kifolyás, az utánatöltési mechanizmus ezt nem tudja kompenzálni.

A feltöltés mechanizmusa még kevésbé ismeretes, mint a veszteségeké. Az elektronövezetek és a kis energiájú protonövezetek feltöltéséről a napszél gondoskodik, itt az I_ϕ sérüléséből következő gyorsítási mechanizmusok lépnek fel. A belső protonövezetet a legelterjedtebb elmélet szerint az ún. neutron-albedo mechanizmus tölti fel, amely azon alapszik, hogy a légkör felső részében a nagy energiájú kozmikus sugárzás és a légkör molekuláinak kölcsönhatásakor keletkeznek olyan neutronok is, melyek felfelé repülnek, és éppen a sugárzási övben szenvednek β bomlást. Ez az elképzelés akkor lenne helyes, ha a protonok élettartama a belső sugárzási övben nagyobb lenne, mint $3 \cdot 10^7$ sec, szemben a kísérletileg tapasztalt mintegy 10^6 sec-mal. $E > 50$ MeV-es részekre a neutron-albedo forrás már produkálni tudja a mért intenzitást, míg a kisebb energiájú tartomány feltöltésébe az I_ϕ sértés mechanizmusa is besegít. Ez a modell már nagyságrendileg jó eredményeket ad, úgy tűnik, hogy közel jár az igazsághoz.

IRODALOM

1. B. Rossi, S. Olbert, Introduction to the Physics of Space. New York 1970. 2, 3, 5, 6. fejezet.
2. С. Н. Вернов, П. В. Вакулов, Е. В. Горчаков, Ю. И. Логачев, Радиационные Пояса Земли и Космические Лучи Москва, 1971.
3. D. J. Williams, Sources, Losses and Transport of Magnetospherically Trapped Particles ERL 180—SDL 16 preprint 1970.
4. S. N. Vernov, The Earth's Radiation Belts, Invited paper a XI. Nemzetközi Kozmikus Sugárzási Konferencián 1969.
5. C. E. McIlwain, J. Geophys. Res. 66, 3691, 1961.
6. J. A. Van Allen, J. Geophys. Res. 64, 1483, 1959.
7. В. С. Мурзин Физика Космических Лучей, Москва 1970. 6.7. fejezet.
8. С. Н. Вернов и др. ДАН СССР 120, 123, 1958.
9. Л. И. Дорман, В. С. Смирнов, М. И. Тясто Космические Лучи в Магнитном Поле Земли Москва, 1971.

A KOZMIKUS SUGÁRZÁS EREDETE

KIRÁLY PÉTER

MTA Központi Fizikai Kutató Intézete, Budapest

A dolgozat a kozmikus sugárzás keletkezésével és terjedésével kapcsolatos újabb kutatásokról nyújt áttekintést. A problémakör csillagászati háttérének rövid összefoglalása után felsorolja a primer kozmikus sugárzás mért jellemzőit, s ezek alapján az eredetre néhány egyszerűbb megállapítást tesz. Ezután a gyorsítás és terjedés fizikai alapfolyamataival foglalkozik, majd kissé részletesebben tárgyalja az eredet legvalószínűbbnek látszó modelljeit.

Bevezetés

Kozmikus sugárzáson e dolgozatban a naprendszeren kívülről érkező, kb. 1 MeV-nél nagyobb kinetikus energiájú korpuszkuláris és elektromágneses sugárzást értjük. Az 1 MeV-es határ technikai jellegű: e határ alatt a naprendszeren kívülről származó korpuszkuláris komponens jelenleg egyáltalán nem különíthető el a Napból érkező, intenzívebb sugárzástól, az elektromágneses komponens viszont ma már elsősorban a csillagászok területének számít (röntgen-csillagászat).

A kozmikus sugárzás *fő részén* a mintegy 10^8 – 10^{12} eV-es protonokból és atommagokból álló sugárzást fogjuk érteni. E komponens adja a Földünkhöz érkező kozmikus sugárzás energia- és részecskesűrűségének túlnyomó részét. *Extrém nagy energiájúnak* fogjuk nevezni a 10^{17} eV-nál nagyobb energiájú részecskékből álló komponenst, tekintet nélkül arra, hogy milyen részecskékről van szó. E komponens mind energiasűrűség, mind részecskesűrűség szempontjából a kozmikus sugárzás elenyészően kis részét adja, döntő fontosságú azonban a gyorsítási és terjedési mechanizmusok megértéséhez.

A kozmikus sugárzás felfedezése óta eltelt több mint fél évszázad alatt sok spekuláció született e sugárzás keletkezésével és terjedésével kapcsolatban. E spekulációk csak az utolsó két évtizedben kezdtek többé-kevésbé kvantitatív hipotézisekké válni, elsősorban a csillagászat és asztrofizika rohamos fejlődése, az atmoszférán, sőt magnetoszférán kívüli megfigyelés lehetővé válása, a nagy kiterjedt légizápor-berendezések megjelenése, valamint a plazmafizika és magfizika fejlődése jóvoltából. A nagy fejlődés ellenére a legalapvetőbb kérdésekre (hol és mikor keletkezett a kozmikus sugárzás fő része és extrém nagy energiájú frakciója, milyen terjedési mechanizmus biztosítja az izotrópiát) egyelőre nem tudunk biztos választ adni. Elég erős határfeltételt adnak azonban ma már a mérések ahhoz, hogy a mérési eredményekkel minden szempontból összeegyeztethető modelleket igen nehéz legyen konstruálni.

A következőkben először röviden összefoglaljuk ismereteinket a kozmikus sugárzás keletkezésének és terjedésének valószínű színhelyeiről. Ezután a nap-

rendszerbe érkező sugárzás jellemzőivel, s az eredetre viszonylag közvetlenül nyervehető információkkal foglalkozunk. A keletkezés és terjedés alapfolyamatainak rövid áttekintése után a kozmikus sugárzás eredetének néhány modelljét ismertetjük.

Az eredettel kapcsolatos problémák legrészletesebb, de már bizonyos mértékig túlhaladott tárgyalása *Ginzburg és Syrovatsky* klasszikus munkájában [1] található. A témakör rövidebb, elsősorban az asztrofizikai vonatkozásokkal foglalkozó összefoglalását adja *P. Morrison* dolgozata [2]. Az asztrofizika újabb eredményeit is tartalmazza és tankönyvként jól használható *D. J. Martinov* könyve [3]. Elsősorban a nagy energiájú foton spektrum eredetét elemzi *K. Greisen* [4] és *Gould és Burbidge* [5] munkája. A primer sugárzás nukleáris komponensének összetételéről szerzett ismereteinket *Webber* [6] foglalta össze. A kozmikus teret kitöltő plazma fizikájáról *Rossi és Olbert* könyve [7] nyújt jó összefoglalót. Az újabb fejlemények áttekintésére a kozmikus sugárzási konferenciák összefoglaló jellegű előadásai ajánlhatók ([8]–[11]).

1. Kozmikus környezetünk

A Napból kifelé haladó napszél és a belefagyott mágneses terek a Nap bizonyos környezetében (*modulációs tartomány*, solar cavity) modulálják a kívülről érkező kozmikus sugárzást. A modulációs tartomány méreteire kapott becsléseink egyelőre elég bizonytalanok (2–100 asztromómiai egység), s e téren alapvető fejlődés csak a távoli bolygókhoz induló és a naprendszert elhagyó űrszondától várható (az első ilyen, kozmikus sugárzást mérő berendezésekkel is felszerelt űrszonda, a Pioneer 10, 1972. márciusában már elindult). A modulációs mechanizmus közelítő ismeretében 1 GeV felett már néhány százalék pontossággal meg tudjuk becsülni a Naprendszeren kívülről érkező sugárzás intenzitását. Kb. 100 GeV felett a moduláció hatása legtöbb szempontból elhanyagolható.

A naprendszerbe érkező kozmikus sugárzás legnagyobb része valószínűleg Galaxisunkban, a *Tejútrendszerben* keletkezett. A galaxisok egymástól méretüknél 1–2 nagyságrenddel nagyobb távolságra levő, jól elhatárolt csillagtársulások. A galaxisok társulásai a méretek növekedésével egyre kevésbé határolódnak el egymástól; a Tejútrendszert és mintegy 15–20 galaxist magába foglaló *Helyi Galaxiscsoport* még viszonylag jól különválnak környezetétől, a néhány ezer galaxisból álló *Helyi Szuperhalmaz* (vagy Virgo szuperhalmaz) önálló egységként kezelését azonban sokan már önkényesnek tartják. A Metagalaxisban mintegy 10^{11} galaxis van, s eloszlásuk a kis helyi csoportosulásoktól eltekintve lényegében homogén.

Az, hogy az észlelt kozmikus sugárzás főrésze valószínűleg elsősorban galaktikus eredetű, nem jelenti azt, hogy Tejútrendszerünkben az intenzitás sokkal nagyobb, mint más galaxisokban. Ellenkezőleg, rádió- és röntgencsillagászati mérésekből tudjuk, hogy vannak a miénknél sokkal aktívabb galaxisok is (rádiógalaxisok, Seyfert-galaxisok), melyekben a kozmikus sugárzás elektron-komponense, s feltehetően nukleáris komponense is nagyságrendekkel intenzívebb, mint nálunk. Mint azonban a továbbiakban látni fogjuk, a galaxisokat elválasztó nagy távolságok, a terjedés közben fellépő veszteségek és a galaxisok energiamérlegéről való ismereteink valószínűtlenné teszik, hogy a kozmikus sugárzás a Földnél mért intenzitással a Tejútrendszerből lényegesen nagyobb tartományokat tölthessen ki. Könnyen lehet viszont, hogy az észlelt extrém nagy energiájú, de kis energiasűrűségű komponens elsősorban extragalaktikus eredetű.

1.1. A Tejútrendszer

A Galaxisunkban levő mintegy 10^{11} nagyrészt Napunkhoz hasonló csillag nagy része egy lapos, lencse vagy diszkosz alakú tartományban (korong, disc) helyezkedik el. A csillagok közelítőleg körpályán keringenek a Galaxis középpontja körül. A körpályától való eltérések és a pálya síkjának a Galaxis síkjától való eltérései miatt az egymáshoz közeli csillagok kissé különböző sebességgel mozognak: a keringési sebességhez annál kb. egy nagyságrenddel kisebb *partikuláris mozgás* járul. A Nap keringési sebessége kb. 250 km/sec.

A korong átmérője 30 Kpc. (1 Kpc=1000 pc; 1 pc=3,26 fényév $\approx 3 \times 10^{18}$ cm az a távolság, amelyről a Nap—Föld távolság, azaz 1 asztronómiai egység 1 sec szög alatt látszik). A *csillagsűrűség* a Galaxis középsíkjától kifelé haladva gyorsan csökken — a csillagok nagy része a középsíktól 3—400 pc-nél kisebb távolságra van (a Nap távolsága a középsíktól mintegy 80 pc). Még erősebben a középsík környezetére koncentrálódik a *gáz- és porkomponens*. Csökken a csillagsűrűség és a por- és gázsűrűség a középpontból a sík mentén kifelé haladva is (a Nap távolsága a középponttól kb. 8 Kpc).

A gáz- és porkomponens galaxisbeli elhelyezkedését a középsíktól és középponttól való távolság mellett elsősorban a Galaxis *spirális felépítése* határozza meg. A középponttól kb. 3 Kpc-re kialakuló és kifelé a Galaxis határáig kinyúló *spirálkarokban* a gáz- és porsűrűség lényegesen nagyobb, mint a karok közti tartományban (a kozmikus sugárzás terjedése szempontjából fontosabb gázkomponens átlagos sűrűsége a karokban mintegy 3 H atom/cm³, a karok között ennél kb. egy nagyságrenddel kisebb). A karokban a *mágneses tér* valószínűleg a karok tengelyével párhuzamos (vagy esetleg a tengely körül spirálvonalat ír le), abszolút értéke (≈ 3 —10 μ gauss) pedig általában nagyobb, mint a karok közti véletlenszerű mágneses terek. Így a karok a nem túlságosan nagy energiájú részecskéket hossz tengelyük mentén „vezetni” tudják. A karokat alkotó csillagok általában más szögsebességgel keringenek a Galaxis centruma körül, mint maguk a karok. A karok kialakulására és a Galaxis fejlődésében betöltött szerepére nézve lásd pl. Lin és Shu dolgozatát [12].

A fenti, *síkbeli részrendszer* (I. populáció) mellett van a Galaxisnak egy térbeli, *gömbszimmetrikus, szférikus részrendszere* is (halo, II. populáció), amely főleg idősebb csillagokból áll. E részrendszer is egyre sűrűbb a centrum felé, s jelentős része belül van a centrum körüli 15 Kpc sugarú gömbön. A II. populációs csillagok sebességében nincsen kitüntetett szerepe a korong síkjával párhuzamos komponensnek, amely tulajdonságról még pillanatnyilag éppen a korongban tartózkodó II. populációs csillagok is jól felismerhetők.

A szférikus részrendszerben az interstelláris por és gáz sűrűsége sokkal kisebb, mint a korongban, s valószínűleg a mágneses térerősségek is lényegesen gyengébbek. Néhány éve sok vita volt arról, hogy az észlelt intenzitású kozmikus sugárzás csak a korongot tölti-e ki, vagy az egész halot is [1]. Jelenleg a legtöbb elméleti és kísérleti eredmény az első feltevést látszik igazolni.

Mind a kozmikus sugárzás keletkezése és terjedése, mind a Galaxisban lezajló egyéb keletkezési és pusztulási folyamatok vizsgálatánál lényeges az energiaviszonyok s a különböző energiaformák közötti csatolások áttekintése. A Tejútrendszer tömege kb. 10^{11} naptömeg, azaz 2×10^{44} g. Ez $mc^2 \approx 2 \times 10^{65}$ erg nyugalmi energiának felel meg, amit a korong kb. 10^{67} cm³-es térfogatával osztva 2×10^{-2} erg/cm³ $\approx 10^{10}$ eV/cm³ energiasűrűséget kapunk (1 eV = $1,6 \times 10^{-12}$ erg). A gázkomponens tömege, s így

nyugalmi energiasűrűsége ennél egy-két nagyságrenddel kisebb. A Galaxis forgásából eredő kinetikus energia sűrűsége 10^3 eV/cm^3 nagyságrendű, a galaktikus gáz turbulens mozgásának kinetikus energiája, a csillagfény és a kozmikus sugárzás energiája, valamint az intersztelláris mágneses térenergia pedig mind kb. 1 eV/cm^3 sűrűségű. Az utóbbi négy energiasűrűség nagyságrendi egyezése valószínűleg nem véletlen, hanem valamilyen egyensúlyt fejez ki e komponensek között. A nyugalmi energia egy része a csillagokban lezajló nukleoszintézis, valamint a gravitációs kontrakciókor létrejövő hőenergia és robbanások közvetítésével alakul át az elektromágneses és korpuszkuális sugárzás energiájává. A gravitációs kontrakció hatására felszabadulhat energia vagy egyes csillagokban (neutroncsillagok és fekete lyukak keletkezése), vagy galaktikus méretekben (galaxisok magjaiban). A Galaxis rotációja fedezheti a turbulensen áramló intersztelláris gáz és mágneses tér energiáját [12], amely szintén kozmikus sugárzási részecskék gyorsítására fordítható.

A fentiek szerint Galaxisunkban kozmikus sugárzás keletkezhet:

- a) különféle, többé-kevésbé folytonosan sugárzó *csillagokban* (így a Naphoz hasonló stabil, ún. fősorozatbeli csillagokban, a véletlenszerű kitöréseket mutató fler-csillagokban, az elfajult elektrongázt tartalmazó fehér törpékben és a ma már elég nagy biztonsággal neutroncsillagokkal azonosított pulzárokban);
- b) a csillagokat körülvevő, vagy robbanásukból visszamaradt *gázfelhőkben*;
- c) magukban a *csillag-robbanásokban* (novák, szupernovák);
- d) Galaxisunk *magjában*;
- e) az *intersztelláris térben*, a mágneses tereket magával vivő turbulens gázáramlatok hatására.

A kozmikus sugárzás galaxisbeli *terjedése* szempontjából a következő jellemzők lényegesek:

- a) az intersztelláris *gázsűrűség*;
- b) az intersztelláris mágneses terek nagysága, konfigurációja és változásai;
- c) az elektromágneses sugárzás energiasűrűsége (amely különösen az elektronkomponens energiavesztéseinél játszik nagy szerepet).

1.2. Galaxisunk környezete

A Helyi Galaxiscsoport kb. 1,5 Mpc átmérőjű, eléggé laza galaxis-társulás. Galaxisunkhoz, melynek átmérője 30 Kpc, igen közel (50 Kpc távolságban) helyezkedik el két szatellitje, a Nagy és Kis Magellán-felhő. Ezek a Tejútrendszernél mintegy egy nagyságrenddel kisebb, nem különösen aktív galaxisok. Tejútrendszerünkhöz hasonló tömegű és felépítésű a 600 Kpc távolságban levő M 31 galaxis (Andromeda-köd). Az egész, 15–20 galaxist tartalmazó Helyi Csoport tömege csak mintegy hatszorosa Galaxisunkénak, térfogata viszont a korong térfogatának több mint 10^5 -szerese. Az intergalaktikus gáz sűrűségéről és a mágneses terekről igen keveset tudunk. Valószínű, hogy a gáz sűrűsége 3–4, a mágneses térerőssége 1–2 nagyságrenddel kisebb, mint Galaxisunk korongjában.

Ismerünk a Helyi Csoportnál lényegesen kompaktabb és több galaxisból álló halmazokat is (Virgo halmaz, Perseus halmaz). A halmazok halmazai (másodrendű halmazok vagy szuperhalmazok) a halmazoknál kevésbé jól körülhatárolt, 10 Mpc

nagyságrendbe eső átmérőjű, néhány ezer vagy tízezer galaxist tartalmazó egységek; dinamikai összetartozásuk erősen vitatott.

Erősen aktív extragalaktikus objektumokat legközelebb néhány Mpc távolsággal találunk. A Centaurus A rádió- és röntgen-galaxis kb. 5 Mpc távolságra van, s elektromágneses sugárzása alapján a benne tárolt kozmikus sugárzási energiát 3–4 nagyságrenddel nagyobbra becslik, mint Galaxisunkban. A kb. 15 Mpc távolságra levő M 87 galaxis (Virgo A) igen intenzív forrás lehet. Hasonlóan intenzív források a többi rádió- és röntgen-galaxisok, a Seyfert-galaxisok, egyes galaxisok aktív magjai és a valószínűleg nagy távolságra (10^2 – 10^3 Mpc) levő kvázárok. Mindezek az objektumok a közönséges galaxisoknál sokkal ritkábban fordulnak elő, s jelenlegi nagy aktivitásukat 10^6 évnél lényegesen hosszabb ideig nem tudják megőrizni. Akkor, amikor egy-egy ilyen forrásból a kozmikus sugárzás hozzánk ér, a forrás általában már elvesztette aktivitását, s így nem ismerhető fel.

1.3. A Metagalaxis

A távoli objektumok spektrumvonalai a távolsággal arányos vörösetolódást mutatnak; az arányossági tényező az ún. Hubble-állandó, $h \approx 100$ km/sec Mpc. A Hubble-állandó értékét kb. egy kettes faktor erejéig ismerjük, s ez a bizonytalanság a távoli objektumok vörösetolódásból számított távolságát is bizonytalaná teszi. További hibaforrást jelent, hogy vehemens robbanásoknál a nagy sebességgel szétrepülő maradványok vörösetolódása már nem tőlünk mért távolságukat, csak távolodásukat jellemzi.

Az általános relativitáselmélet szerint a térbeli és időbeli távolságoknak csak adott koordinátarendszerben van pontos értelmük, így az Univerzum mérete és kora definiálatlan. Egy karakterisztikus méret és kor azonban megadható a Hubble-állandó segítségével: $R = ch^{-1} \approx 3 \times 10^3$ Mpc $\approx 10^{28}$ cm, $T = R/c = h^{-1} \approx 10^{10}$ év.

A big bang-elmélet szerint Metagalaxisunk egy kezdeti robbanásból, igen nagy nyomású, sűrűségű és hőmérsékletű állapotokból fejlődött ki. Az anyag ritkulásával a részecskékkal hőmérsékleti egyensúlyban levő fotonkomponens lecsatolódott, majd a vörösetolódás következtében lehűlt. Így jött létre az egész Metagalaxist kitöltő, jelenleg $2,7^\circ\text{K}$ -os univerzális háttérsugárzás. A háttérsugárzás energiasűrűsége $0,25 \text{ eV/cm}^3$, ami egy-két nagyságrenddel nagyobb, mint az intergalaktikus térben jelenlevő csillagfény és mágneses tér energiasűrűsége. A foton-sűrűség $400/\text{cm}^3$, a spektrum maximuma a mikrohullámú tartományban van. E sugárzás erősen korlátozza az intergalaktikus térben levő nagy energiájú elektronok és fotonok élet-tartamát.

Egyes mérések [13, 14] arra utaltak, hogy a mikrohullámú sugárzás mellett egy univerzális távoli infravörös ($8,3^\circ\text{K}$ -os) sugárzás is jelen lehet. E sugárzás nagy energiasűrűsége ($6,5 \text{ eV/cm}^3$) miatt igen erősen befolyásolná az elektronspektrumot, s nehezen lenne összeegyeztethető a kozmikus sugárzási mérésekkel. Valószínű, hogy a mért infravörös sugárzás lokális eredetű.

Valószínűleg részben kozmologikus eredetű a diffúz rádió-, röntgen- és γ -háttérsugárzás [4]. E sugárzások energiásűrűsége, s így a kozmikus sugárzás terjedésére való hatása nem jelentős, sok információt adhatnak azonban az Univerzum múltjáról s a kozmikus sugárzás egy esetleges metagalaktikus komponenséről.

2. A primer kozmikus sugárzásra vonatkozó empirikus ismereteink

A naprendszerbe érkező kozmikus sugárzás elvileg az összes részecsketípusok energiaspektrumával jellemezhető, a gyakorlatban azonban ennél sokkal kevesebbel is meg kell elégednünk. A töltött részecskék spektrumát a modulációs effektusok erősen eltorzítják; a torzítás elsősorban a merevségtől, másodsorban a kinetikus energiától függ. Lényeges torzítást jelent a Napból, a sugárzási övekből és az atmoszférából eredő háttér is. A háttéreffektusok a γ -intenzitás meghatározását is nehezítik. A neutrínó-komponens az atmoszférából és a Napból származó háttér, valamint a kis hatáskeresztmetszet miatt egyelőre nem detektálható. Nagyobb energiákon a mérések nem képesek jól szétválasztani a különböző részecskéket, csak valamilyen együttes energiaspektrumot adnak (ez különösen áll a kiterjedt légizápor-mérésekre).

Adott típusú részecskénél az energiaspektrum (a beérkező részecskék számának teljes energia szerinti differenciális vagy integrális eloszlása) könnyen átszámolható kinetikus energia, impulzus vagy merevség szerinti spektrummá. Magoknál szokásos a nukleononkénti energia szerinti eloszlás megadása is.

Néhány GeV felett mindegyik spektrum

$$I_v(E)dE = K_v E^{-\gamma_v(E)} dE$$

alakba írható, ahol $\gamma_v(E)$ lassan változó függvény (az ún. differenciális kitevő). A v -edik típusú részecske integrális spektruma ekkor jó közelítésben

$$J_v(>E) = \frac{K_v}{\gamma_v(E) - 1} E^{-\gamma_v(E)+1}.$$

Ebben a tartományban az intenzitás túlnyomó részét a protonok, α -részecskék és egyéb atommagok adják. Az elektron-komponens a teljes intenzitásnak csupán 1%-át adja, a foton-komponens valószínűleg ennél is kevesebbet. Így a teljes részecske-spektrum és a nukleáris spektrum gyakorlatilag azonos.

A teljes spektrumot jellemző $\gamma(E)$ differenciális kitevő értéke néhányszor 10^{14} eV-ig 2,6, majd fokozatosan 3,2-re nő. 10^{17} eV felett egyes mérések [15] szerint γ értéke ismét 2,6 lesz egészen kb. 10^{20} eV-ig (s így az extrém nagy energiájú spektrum a kis energiájú folytatása az extrapoláltnál mintegy 50-szer kisebb intenzitással), újabb mérések [16] szerint azonban valószínűleg extrém nagy energiákon is megmarad a 3,2-es kitevő.

2.1. A nukleáris komponens

Néhány GeV-től mintegy 10^3 GeV-ig a nukleáris komponens *összetétele* valószínűleg közel állandó [17, 18]. Az egyes elemek gyakoriságát ma már külön-külön is elég jól ismerjük kb. $Z=30$ -ig. Egyes, a természetben ritkán előforduló magokat (pl. Li, Be, B) az intersztelláris gáz atomjaival való ütközésben létrejött szekundernek feltételezve a hatáskeresztmetszetek ismeretében meghatározhatók egyrészt az *eredeti forrás-intenzitások*, másrészt az az *anyagvastagság*, amelyen a kozmikus sugárzás áthaladt. Mind az intenzitások, mind a hatáskeresztmetszetek általában 10–20%-ra bizonytalanok, így a kapott forrás-intenzitások hibája elég nagy. Az eljárás szukcesszív approximációval végezhető: feltételezett forrás-intenzitásokkal és anyagvastagsággal (ill. g/cm²-ben mért úthossz-eloszlással) kiszámítjuk a hozzánk érkező

intenzitásokat, majd a kiinduló feltevéseinket a számított és mért intenzitások eltérésének megfelelően korrigáljuk stb. A mért adatokra elvégzett számolás alapján elég nagy biztonsággal állíthatók a következők.

a) A forrásból kilépő kozmikus sugárzás adott nukleononkénti energia mellett protonból és α -részecskéből tartalmaz legtöbbször (protonból 1 nagyságrenddel többet, mint α -ból); A C, ill. O magok száma mintegy 1/25-öd része az α -részecskének; a Ne, Mg, Si, ill. Fe magok száma ötödrésze a C, ill. O magokénak [19]. A kozmikus sugárzás a könnyű magokhoz viszonyítva lényegesen több nehéz magot tartalmaz, mint a Naphoz hasonló csillagok fotoszférája.

b) A forrástól Földünkig a kozmikus sugárzás csupán $3\text{--}8\text{ g/cm}^2$ gázon halad át, ami a Galaxis korongjában való terjedést feltételezve (sűrűség kb. $0,5\text{--}1\text{ H-atom/cm}^3$) $(2\text{--}10) \times 10^{24}\text{ cm}$ -nek, azaz $2\text{--}10$ millió évnél felel meg. Az úthosszak eloszlására nem kapunk pontos információt, de az, hogy minden hozzánk érkező részecske közel azonos anyagvastagságon halad át, valószínűtlennek látszik [19].

Következtetéseinket alátámasztják az 1 GeV /nukleon kinetikus energia alatt végzett mérések is [20–22].

A 10^{12} eV fölötti tartományban az intenzitás és összetétel közvetlen mérése igen nehéz. A légkömbön felküldött fotoemulziós csomagok kiértékelésekor találtak ugyan néhány 10^{12} eV -nél nagyobb nukleononkénti energiájú atommagot, az energia-bebecslések bizonytalansága és a protonok kis detektálási hatásfoka miatt azonban az összetételre kapott becslések pontatlanok. A proton-műholdakon elhelyezett ionizációs kaloriméterek adatai [23] szerint 10^{12} eV fölött a protonok intenzitása erősen csökkenni kezd a többi magokhoz viszonyítva. Ezt az eredményt sem a Goddard Space Flight Center egyelőre csak légkömbön felbocsátott ionizációs kaloriméterének eredményei [17], sem a közvetett (γ -spektrum, μ -spektrum, kis légizápor) mérések nem támasztják alá.

10^{14} eV fölött az összetételről nagyon keveset tudunk. J. Trümper csoportja [24] szerint $3 \cdot 10^{15}\text{--}10^{16}\text{ eV}$ között az összetétel hasonló, mint kis energiákon, vagy tisztán protonokból áll. 10^{17} eV fölött a primer sugárzás valószínűleg főleg protonokból áll [15].

A közönséges, stabil atommagok mellett fontos információt nyújtana $10^6\text{--}10^7$ év nagyságrendű felezési idejű *radioaktív izotópok*, valamint *transzuránmagok* és *antimagok* detektálása. A Be/B arány pl. elég erősen függ attól, hogy a néhány száz 10^7 év felezési idejű Be^{10} izotóp jelentős része elbomlott-e. A mérések, bár elég bizonytalanul, arra utalnak, hogy a Be^{10} nagy része nem bomlott el, s így a kozmikus sugarak életkora nem lehet nagyobb $5 \cdot 10^7$ évnél [25]. Transzurán magok jelenléte a forrás távolságára és a benne uralkodó fizikai viszonyokra adna információt, a $Z \approx 114$ körül feltételezett „stabil sziget” magjainak megtalálása pedig magfizikai szempontból is igen fontos lenne. A Budapesti Konferencián [26] közölt $Z = 113$ rendszámú mag a nyom újramérése után sokkal kisebb töltésűnek ($Z = 76 + 4$) bizonyult [27]. Az antimagok közül az $\bar{\alpha}$ részecske detektálása tűnt legreményteljesebbnek [28], de az eredmény egyelőre negatív. Ez azt jelenti, hogy a Földön detektált kozmikus sugárzás forrásai általában közönséges, s nem antianyagból vannak.

A naprendszerbe érkező kozmikus sugárzás *izotrópiája* igen fontos határfeltétel az eredettel foglalkozó elméletek számára. Extrém nagy energiákon az izotrópia igen nehezen egyeztethető össze a galaktikus eredettel [29]. A Leeds-i csoport [30] mintegy $1,8 \cdot 10^5$ extrém nagy energiájú zápor adatait feldolgozva sem talál anizotrópiát, s erős korlátokat ad meg a lehetséges anizotrópiára. Hasonló eredményre

jut a Sydney-csoport [31] is. Kisebb energiákon van némi indikáció [32–33] az anizotrópiára, de nehéz a modulációs effektusok kizárása. Néhányszor 10^{11} eV energiára az észlelt anizotrópia olyan kicsi, hogy Elliot [37] szerint a galaktikus eredettel már ilyen kis energiákon is csak nehezen hozható összhangba.

2.2. Az elektron-komponens

Az elektron-komponens elnevezés a negatron- és pozitron-komponens együttes megjelölése. A primer komponens az intenzív szekunder háttér miatt nehezen detektálható, ezért annak ellenére, hogy létezését a galaktikus rádiósugárzás magyarázatára már 1950-ben feltételezték, detektálására csak 1961-ben került sor.

A mérések nehézségeivel magyarázható a különböző szerzők által közölt spektrumok jelentős eltérése. Greisen az 1969-nél korábbi méréseket összefoglalva [4], 3 és 300 GeV között a nukleáris spektrummal párhuzamos, de annál két nagyságrenddel kisebb spektrumot talál:

$$I_e(E)dE = 116E^{-2,6}dE \quad (\text{m}^2\text{s sr GeV})^{-1},$$

ahol E GeV-ekben értendő. Zatsepin újabb mérései [34] az 5–550 GeV-es intervallumban $\gamma = 2,7\text{--}2,8$ -at, P. Meyer mérései [35] $2,8 \pm 0,1$ értéket adnak. A Goddard Space Flight Center csoportja kaloriméteres mérésben [36] a 10–200 GeV-es intervallumra $\gamma = 3,1 \pm 0,2$ értéket kap.

A legújabb mérések alapján tehát valószínű, hogy az elektron-spektrum valamivel meredekebb a nukleonspektrumnál, de az nem világos, hogy mennyivel és milyen energiától kezdve.

Néhány 100 MeV és néhány GeV között a spektrum lényegesen laposabb ($\gamma \approx 1,6$), de ennek részben modulációs okai is lehetnek. 20 MeV és néhány száz MeV között a differenciális spektrum igen lapos, 20 MeV alatt viszont ismét meredekebbé válik, s még néhány MeV-en is valószínűleg elsősorban galaktikus eredetű [4].

A pozitronok aránya az összes elektronok (pozitronok és negatronok) számához 50 és 500 MeV között közel van a 0,5 értékhez [4], néhány GeV-es energiákon azonban lényegesen kisebb, 0,1 körüli értéket mértek. Mivel a számítások e hányadosra 0,7 körüli értéket adnak, azzal a feltevéssel, hogy a teljes elektron-komponens a primer nukleáris komponens intersztelláris gázon való kölcsönhatásaiból származó π^\pm -mezonok bomlásterméke, világos, hogy az elektronkomponensnek csak igen kis része keletkezhet így. Valószínű, hogy az észlelt elektron-intenzitás mintegy 90%-a „eredeti”, a forrásokban felgyorsult részecskékből áll.

2.3. Az elektromágneses komponens

Az 1 MeV-nél nagyobb energiájú diffúz elektromágneses sugárzást csak a 60-as évek végén sikerült kimutatni [37], s intenzitása még mindig elég bizonytalan. K. Greisen [4] szerint a diffúz foton-spektrum egészen 100 eV-től 100 MeV-ig jól közelíthető

$$I_f(E)dE = 33E^{-2,1}dE \quad \text{foton/cm}^2\text{s sr KeV}$$

alakban, ahol E KeV-ekben értendő. Sok mérés szerint azonban a spektrum távolról sem ilyen sima [38].

Az 1 GeV-nél nagyobb energiájú fotonok intenzitására csak felső korlátok ismertek. Az integrális spektrumra néhány GeV felett 10^{-4} , 10^3 GeV felett 10^{-7} , 10^6 GeV felett 10^{-13} (cm²s sr)⁻¹ nagyságrendű felső korlátok szerepelnek az irodalomban.

Az izotróp, extragalaktikus komponens mellett mind a rádió- [13], mind a γ -sugárzásnak [37, 39] van egy *galaktikus*, a Galaxis síkja és magja irányában lényegesen nagyobb intenzitást mutató komponense is.

3. A gyorsítás és terjedés alapfolyamatai

A Galaxisban levő atomoknak csak igen kis része (kb. minden 10^{10} -edik atom) tartozik a kozmikus sugárzáshoz. A részecskék kozmikus sugárzási energiákra való felgyorsítását tehát nyilvánvalóan valamilyen *szelekció* előzi meg. Az, hogy az egyes atomok mennyire alkalmasak a gyorsításra, függhet helyüktől (a környezetükben uralkodó viszonyoktól), energiájuktól, rendszámuktól, ionizációs állapotuktól stb. Legtöbb nagy energiák elérésére alkalmas gyorsítási mechanizmus csak már viszonylag jelentős energiával rendelkező részecskéket képes gyorsítani; a kiválasztott részecskék ilyen energiákra való gyorsítása az előgyorsítás vagy *injekció*. A tulajdonképpen *gyorsítás* után a nagy energiájú részecskék hosszú ideig vándorolnak a galaktikus vagy intergalaktikus térben, s közben szóródnak a mágneses tereken és elektromágneses hullámokon, elektromágneses és nukleáris kölcsönhatásba lépnek az intersztelláris gázzal. Ez a *terjedés* fázisa. A felsorolt fázisok közül egyesek elmaradhatnak vagy összefolyhatnak egymással.

Az elektron-komponens gyorsítása és terjedése valószínűleg nagyrészt szintén a fentihez hasonló minta szerint történik. A gyorsítás és terjedés közben fellépő *energiavesztések* azonban a nagy e/m arány miatt itt sokkal nagyobb szerepet játszanak, mint az atommagoknál. Az elektronok kisebb része a magok erős ($\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \rightarrow e^\pm$) vagy elektromágneses (direkt párkeltés, knock on) kölcsönhatásából, radioaktív β -bomlásból, vagy a γ -sugárzás által keltett záporokból jön létre.

Az elektromágneses komponens egy része nukleáris ütközésekből ($\pi^0 \rightarrow 2\gamma$), radioaktív γ -bomlásból, de legnagyobb része valószínűleg a forrásokban levő és az intersztelláris térben terjedő elektronok inverz Compton-szórásából és (kisebb energiákon) mágneses fékezési sugárzásából származik.

3.1. A szelekció és injekció

Az olyan mechanizmusokat, amelyek az adott helyen levő részecskék közül csak egy igen kis hányadot választanak ki, *szelektíveknek* nevezzük. Az adott helyen levő plazmát teljes egészében gyorsítják a *kumulatív* folyamatok. A kiválasztás és kezdeti gyorsítás utáni összetétel (adott sebesség, merevség, teljes vagy nukleononkénti energia mellett) szelektív kiválasztásnál általában egészen más lesz, mint a kezdeti összetétel, kumulatív mechanizmusnál azonban az *adott sebesség* mellett vett összetétel a kezdetivel megegyezik. A gyorsítás kezdeti szakasza (injekció) után más mechanizmusok folytathatják a gyorsítást, melyek a mechanizmustól függően közelítőleg megtartják az injekció végén kialakult adott sebesség, merevség, teljes vagy nukleononkénti energia mellett vett összetételt, vagy pl. az egész injektált anyagmennyiséget közelítőleg azonos merevségre gyorsítják, függetlenül az injekció

végén kialakult spektrumtól. A kozmikus sugárzásban észlelt összetétel tehát általában még kumulatív injekció esetén sem egyezik meg a kezdeti összetétellel (azaz *nem reprezentatív*).

A szelektív mechanizmusok jó példája a *termális injekció* (részletesen I. Ginzburg és Syrovatsky [1]). A mágneses tér növekedésekor az ionok gyorsulnak, energiájuk azonban általában ütközésekre és további atomok ionizációjára fordítódik. Adott tömegű és töltésű ionok számára van egy kritikus energia, amelyen túl az ionizációs veszteségek már kisebbek a térből felvett energiánál, így e részecskék a termálisnál jóval nagyobb energiákra tesznek szert. Az állandó injekciót a hőmozgás során a Maxwell-eloszlás „farkába” kerülő részecskék biztosítják. Ha a mágneses tér igen gyorsan nő, előfordulhat, hogy egyes ionokra a térből felvett energia mindig (energiájuktól függetlenül) nagyobb az ionizációs veszteségeknél — ekkor *injekció nélküli gyorsításról* beszélünk.

A kumulatív injekció és gyorsítás jó példáival találkozunk a Napon. A plazmába befagyott mágneses térben a Nap differenciális rotációja során feszültségek alakulnak ki, s e feszültségek egyes aktív zónákban a mágneses tér hirtelen megváltozásait eredményezik. A nagy sebességgel felfelé haladó mágneses erővonalak a fotoszféra plazmáját is magukkal ragadják, majd részben ki is dobják az interplanetáris térbe. A Földnél észlelt szoláris kozmikus sugárzás összetétele átlagosan hasonló a fotoszférához, időbeli változásai azonban jelentősek. Az összetétel változását részben gyorsítási, részben terjedési effektusok okozhatják.

A galaktikus kozmikus sugárzás adott nukleononkénti kinetikus energia mellett lényegesen több nehéz elemet tartalmaz, mint a Nap és általában a legtöbb csillag fotoszférája. Ha feltesszük, hogy az injekció és gyorsítás a Naphoz hasonlóan kumulatív, akkor ez a sugárzás sok nehéz elemet tartalmazó csillagokban (pl. szupernovákban) való keletkezésére utal. Nem zárható ki azonban az a feltevés, hogy a nehéz elemek feldúsulása az injekció és gyorsítás során történt.

3.2. A gyorsítás

A csillagokban és a csillagközi térben levő plazma elektromos vezetőképessége igen nagy [7], így sztatikus elektromos terek csak nagyon ritkán (pl. ellentétes irányú mágneses erővonalak közötti semleges rétegben) alakulhatnak ki. Sztatikus mágneses terek a részecskéket nem gyorsíthatják, hiszen a Lorentz-erő mindig merőleges a sebességre. Okozhatnak viszont gyorsulást a „mozgó” és az időben változó mágneses terek, ill. pontosabban az ezek által indukált elektromos terek. A „mozgó” terek Fermi eredeti elképzelése szerint néhányszor 10 km/sec sebességű, a Galaxisban rendszertelenül mozgó plazmafelhők, amelyek magukkal viszik befagyott mágneses területet. A környező csillagokhoz rögzített nyugalmi rendszerben nézve e terek természetesen időben változnak, még ha saját rendszerükben közel sztatikusak is. Időben erősen változó terek jöhetnek létre csillagok, különösen szupernovák és pulzárak közelében. A gyorsításhoz itt a kvázisztatikus terek mellett kis (néhány Hz—néhány kHz) frekvenciájú *elektromágneses hullámok*, valamint *plazmarezgések* is hozzájárulhatnak. A szupernova-robbanásokban létrejött relativisztikus hidrodinamikai *lökéshullámok* [40] is fontos szerepet játszhatnak a részecskegyorsításban.

A Fermi-féle mechanizmusnál egy v sebességű, E energiájú részecske v_0 sebességű mágneses felhővel ütközik, s arról visszaverődik, feltéve, hogy a felhő mérete lényegesen nagyobb a Larmor-sugárnál. A részecske energiája $v_0 \ll v$ esetén egy

ütközésben

$$\Delta E = -2E \frac{(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v})}{c^2}$$

értékkel változik. Szembe ütközésnél a részecske energiája nő, hátulról ütközésnél csökken.

A Fermi-gyorsítás három különböző módon történhet. *Egymással szembe haladó felhők között* ΔE mindig pozitív, s az energia gyorsan nő mindaddig, míg a részecske ki nem szóródik a felhők közül, vagy át nem hatol valamelyiken. E gyorsítás a felhők közé zárt iongáz adiabatikus melegítéseként is felfogható [1]. *Véletlenül* összevissza mozgó felhőkkel ütközve a részecske hol nyer, hol veszít energiát. *Átlagosan* azonban nyer, hiszen a szembe-ütközés a hátulról ütközésnél gyakoribb. Az átlagos energianyereség relativisztikus részecskékre ütközésenként

$$\overline{\Delta E} = \alpha E \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 = \alpha E \beta_0^2,$$

ahol α a felhők geometriájától függő, egységnyi nagyságrendű szám. Ha az E_0 kezdeti energiájú részecske átlagosan t_1 időnként ütközik egy-egy felhővel, energiája t idő múlva átlagosan $E_0 \exp(\alpha \beta_0^2 t / t_1)$ lesz. Ha a részecskék t_2 időállandóval elnyelődnek vagy kilépnek a rendszerből, akkor adott energiájú részecskék időben állandó injektálása esetén a rendszerben hatvány-spektrum alakul ki $\alpha t_1 / \beta_0^2 t_2$ integrális kitevővel [4]. Végül amiatt is gyorsulhatnak a rendszertelenül mozgó felhőkkel ütköző részecskék, mert véletlenül az *átlagosnál gyakrabban* vesznek részt szembe-ütközésben. Így a részecskék egy kis hányada az átlagosnál lényegesen nagyobb energiára tehet szert.

A részecskék Larmor-sugarának megfelelő méreteken homogénnek tekinthető, időben lassan változó mágneses térerősség esetén a p_\perp^2 / B adiabatikus invariáns időben gyakorlatilag nem változik (itt B a mágneses térerősség, p_\perp pedig a részecske impulzusának a térre merőleges komponense). Így a térerősség növekedése az energia növekedéséhez vezet. Ez a *betatron-gyorsítás*. Könnyen látható, hogy a részecskék pályája úgy húzódik össze, hogy a pályán belül haladó fluxus állandó maradjon. Ha az adiabatikus feltételek megsérülnek (pl. a mágneses tér valahol a Larmor-sugárnál kisebb távolságokon erősen lecsökken), a nagy energiájú részecskék *ki tudnak lépni* a mágneses térből; ellenkező esetben a térerősség csökkenésével energiájukat is elvesztik.

Az eddig tárgyalt mechanizmusoknál a gyorsított részecskék gyorsító térre való visszahatását elhanyagoltuk. Ha az összes részecskék kinetikus energiája azonos nagyságrendű a térenergiával, akkor ez az elhanyagolás már nem indokolt — ilyenkor *plazmafizikai* mechanizmusokról beszélünk. Ezen a téren a számítások bonyolultsága miatt egyelőre csak meglehetősen kvalitatív elméletek vannak.

A szupernova-robbanásakor létrejövő *relativisztikus lökéshullámok* [40] a plazma adiabatikus melegítése és kollektív gyorsítása útján hozhatnak létre nagy energiájú részecskéket. Valószínű, hogy a részecskék nukleáris kölcsönhatásai miatt e gyorsításnál nem kapnánk nehéz magokat, s ha a kozmikus sugárzás jelentős része így jönne létre, akkor az elektromágneses sugárzás a megfigyeltnél intenzívebb lenne [1].

A külsőleg gerjesztett és a belső instabilitásokból származó plazma-rezgések szupernovákban valószínűleg szintén hatásos gyorsítást adnak, s itt extrém nagy energiájú részecskéket is produkálhatnak. Az intersztelláris térben szerepük a kozmikus sugárzás izotrópiájának biztosításánál lehet fontos.

Az ellentétes irányú mágneses terek között kialakuló *semleges rétegben* az erővonalak befagyása megszűnik (részletes irodalomért l. [41]). Ekkor erős sztatikus elektromos terek és plazmaáramok alakulhatnak ki. Az áramok körül kialakuló turbulens tartományban Fermi-típusú gyorsítás jöhet létre, az áramok hirtelen megszakadásakor létrejövő indukált elektromos tér pedig betatron-folyamattal gyorsíthat. Valószínű, hogy e mechanizmus nagy szerephez jut a napfoltokban és a Föld csővájában.

A fenti gyorsítási folyamatok különböző kombinációkban is előfordulhatnak. Laboratóriumi, geofizikai és napfizikai tapasztalatok alapján úgy tűnik, hogy a részecskék kis hányadának nagy energiára való felgyorsulása ritka plazmákban nem kivételes eset, hanem az *energiadisszipáció általános módja* [8].

3.3. A terjedés

Akár galaktikus, akár extragalaktikus eredetű a kozmikus sugárzás, a forrásokból kikerülő részecskék igen hosszú időt töltenek a források közötti térben, ahol kölcsönhatásba lépnek a reguláris és turbulens mágneses terekkel, a különböző frekvenciájú sugárzási terekkel és az intersztelláris, ill. intergalaktikus gázzal. A kölcsönhatások során változik spektrumuk, összetételük és anizotrópiájuk.

Liouville tétele szerint a sztatikus mágneses terekkel való kölcsönhatás nem befolyásolja az energiaspektrumot és nem szünteti meg az izotrópiát, feltéve, hogy egyrészt elhanyagolhatók a sugárzási veszteségek, másrészt a részecskék bárholnan bárhová eljuthatnak, vagyis nincsenek „tiltott tartományok”. Megnő azonban az adott forrásból hozzánk érő részecske terjedési ideje (azaz úthossza), és elvész a forrás iránya és a beérkező részecskék iránya közötti kapcsolat (hacsak nem ismerjük nagyon pontosan a mágneses teret, vagy nem extrém nagy energiájúak az észlelt részecskék).

Relativisztikus részecskékre a Larmor-sugár

$$R = \frac{E [\text{eV}]}{300B [\text{gauss}]} \text{ cm} \approx \frac{E [10^{15} \text{ eV}]}{B [\mu \text{ gauss}]} \text{ parsec}.$$

A Galaxis néhány μ gauss-os mágneses tereit, Kpc nagyságrendű méreteit és alakját figyelembe véve a 10^{20} eV alatti energiájú részecskék valószínűleg nem juthatnak el bárholnan bárhová [29]. Így még sztatikus terek és izotróp extragalaktikus sugárzás esetén is várhatunk anizotrópiát a Földnél észlelt sugárzásban.

A mágneses fékezési sugárzási veszteség a részecske tömegének negyedik hatványával fordítva arányos, így protonokra és magokra elhanyagolható, míg elektronokra

$$\frac{dE}{dt} = -10^{-16} u E^2 \text{ GeV/sec},$$

ahol E az elektron energiája GeV-ekben és $u = B^2/8\pi$, a mágneses tér energiasűrűsége eV/cm³ egységekben. Érdekes, hogy ugyanezzel a képlettel fejezhető ki az elektronok

inverz Compton-szórásakor fellépő energiaveszteség is azzal a különbséggel, hogy u ott a sugárzási tér energiasűrűségét jelenti. A létrejött elektromágneses sugárzás karakterisztikus frekvenciája mágneses fékezési sugárzásnál $\gamma^2 v_c$, inverz Compton-szórásnál $\gamma^2 v_0$, ahol γ az elektron Lorentz-faktora, $v_c = Be/2\pi mc$ a ciklotron-frekvencia (elektronra $2,8 \text{ Hz}/\mu\text{gauss}$), v_0 pedig annak a sugárzásnak a frekvenciája, amelyen az elektron inverz Compton-szórást szenvedett (az univerzális feketetest-sugárzásra $v_0 \approx 10^{11} \text{ Hz}$, a csillagfényre $v_0 \approx 3 \times 10^{14} \text{ Hz}$). Az inverz Compton-szórásnál tehát mintegy 10 nagyságrenddel nagyobb energiájú fotonokat kapunk, mint a fékezési sugárzásnál.

Véletlenszerűen változó, *turbulens mágneses terekben* a kozmikus sugárzás „keveredhet”, azaz homogénebbé és izotrópabbá válhat, s az ismert módon Fermi-gyorsulást is szenvedhet. Azt, hogy mi dominál, e „keveredés” és gyorsulás, vagy a sztatikus tereknél megismert anizotrópia és energiaveszteség, a turbulencia mértékétől és a vizsgált részecskék tulajdonságaitól függ.

A galaktikus *nukleáris komponens* energiaveszteségeiben kis energián az ionizációs és „knock on” folyamatoknak, néhány 100 MeV -től kezdve a nukleáris kölcsönhatásoknak van legnagyobb szerepe. A extragalaktikus térben a gázsűrűség igen kicsi, ezért ott bizonyos energiatartományokban az elektromágneses sugárzáson (elsősorban a feketetest-sugárzáson) való szóródás válik dominánssá. A 10^{16} – 10^{19} eV /nukleon tartományban a nehéz magok mag-fotoeffektusa, 10^{18} eV /nukleon felett a párkeltés, $3 \times 10^{19} \text{ eV}$ feletti protonokra pedig a háttér-fotonokon való π -keltés járul hozzá az abszorpcióhoz. Különösen fontos az utóbbi folyamat, mivel az a számítások szerint az extragalaktikus protonspektrum elég gyors levágásához vezet.

Az *elektromágneses komponens* (γ -sugárzás) elsősorban π^0 -bomlásból, inverz Compton-szórásból és fékezési sugárzásból ered, s energiáját Compton-szórás és e^+e^- párkeltés útján veszti el. Néhányszor 10^{11} eV -ig a Compton-szórás dominál, de a kis intersztelláris és intergalaktikus elektronsűrűség miatt az abszorpció olyan kicsi, hogy az egész Univerzum átlátszónak tekinthető. 10^{12} eV körül a csillagfényen való párkeltés ($\gamma + \gamma \rightarrow e^+e^-$) az Univerzumot már átlátszatlanná teszi (a szabad úthossz mintegy 10^{27} cm [4]), s e folyamat 10^{13} eV -ig még jelentős. 10^{13} – 10^{14} eV -ig az Univerzum valószínűleg ismét átlátszó, majd 10^{14} eV felett a nagy fotsűrűségű feketetest-sugárzáson való párkeltés igen erős elnyelést biztosít (10^{15} eV -on a szabad úthossz $2 \times 10^{22} \text{ cm}$, vagyis kisebb a galaktikus korong sugaránál). A feketetest-sugárzás hosszan elnyúló spektruma és a párkeltés lassan változó hatáskeresztmetszete biztosítja az Univerzum átlátszatlanságát, 10^{19} eV felett azonban esetleg ismét van egy „elektromágneses ablak”.

4. A keletkezés és terjedés modelljei

Ma még nem tudjuk pontosan, hogy az észlelt kozmikus sugárzás különböző komponensei milyen részben származnak galaktikus, ill. extragalaktikus forrásokból. *Galaktikus* modellről beszélünk, ha valamennyi komponens galaktikus forrásokból próbáljuk származtatni. *Vegyes* modelleknél bizonyos komponensek nagyrészt extragalaktikus, sőt esetleg kozmologikus eredetűek. Valamennyi komponens extragalaktikus eredete ma már igen valószínűtlennek tűnik, így ilyen modellekkel nem foglalkozunk.

A modellek magyarázatot igyekeznek adni a kozmikus sugárzás több-kevesebb megfigyelt jellemzőjére, nevezetesen

- a) a lokális energiasűrűsége;
- b) a nagyfokú izotrópiára;
- c) a nukleáris spektrum kitevőjének és összetételének állandóságára a 10^9 – 10^{14} eV intervallumban;
- d) a nukleáris spektrum kitevőjének 10^{15} eV körüli megváltozására;
- e) a 10^{20} eV-nél nagyobb energiájú részecskék jelenlétére;
- f) az elektron-spektrumra;
- g) az elektromágneses spektrumra.

Emellett összhangban kell lenniük csillagászati ismereteinkkel. A következőkben áttekintjük, hogy a különböző modellek mennyire tesznek eleget e feltételeknek.

4.1. Galaktikus modellek

Mivel elég jól ismerjük a w lokális energiasűrűséget, a Galaxisban jelenlevő gáz M tömegét és a kozmikus sugárzás fő részébe tartozó magok g/cm^2 -ben kifejezett S úthosszát, a kozmikus sugárzás generálásához szükséges teljesítmény a következő egyszerű számítással kapható:

$$U = \frac{wV}{T} = \frac{wVqc}{Tqc} = \frac{wMc}{S},$$

ahol V a Galaxis kozmikus sugárzás által kitöltött térfogata, q e tartomány átlagos gázsűrűsége, és T a részecskék által a Galaxisban töltött átlagos idő. Az egyedüli lényeges feltevés az, hogy a lokálisan észlelt $w \approx 10^{-12} \text{ erg cm}^{-3}$ energiasűrűségű kozmikus sugárzás időben nem változik és közel egyenletesen tölti ki a Galaxisnak azt a részét, ahol a gázsűrűség jelentős. Az $M \approx 4 \times 10^{12} \text{ g}$, $S \approx 4 \text{ g cm}^{-2}$ értékeket beírva $U = 3 \times 10^{40} \text{ erg/sec}$ adódik, vagy a bemenő adatok bizonytalanságát figyelembe véve:

$$U = 10^{40} - 10^{41} \text{ erg/sec.}$$

A kozmikus sugárzás fő részének nagyfokú izotrópiája valószínűvé teszi, hogy a sugárzás legalábbis a Galaxisban levő gáz nagy részét tartalmazó korongot valóban elég egyenletesen tölti ki, s időbeli változásai sem jelentősek. Így fenti becslésünk érvényes attól függetlenül, hogy mekkora a T karakterisztikus idő és a V karakterisztikus térfogat. U és w értékét ismerve T és V között a következő összefüggést kapjuk:

$$T = \frac{w}{U} V = (10^{-53} - 10^{-52}) V,$$

ahol T sec-ban, $V \text{ cm}^3$ -ben értendő. Ha a kozmikus sugárzás csak a korongot tölti ki ($V = 3 \times 10^{66} - 10^{67} \text{ cm}^3$), akkor $T = (1 - 30) \times 10^6$ év, ha a *halot* is, akkor néhányszor 10^8 év nagyságrendű.

A korong- és halo-modellek között tehát dönthetnénk, ha ismernénk a hozzánk érkező részecskék átlagos „életkorát”. A nukleáris komponens a galaktikus mágneses és sugárzási tereken való szóródása során gyakorlatilag nem veszít energiájából, így az életkor meghatározásának egyetlen közvetlen módja a *radióaktív izotópok*

vizsgálata. A jelenlegi, elég pontatlan mérések a korong-modellt teszik valószínűbbé [25]. Mivel az elektron-komponens a mágneses és sugárzási tereken az energiával erősen növekvő veszteséget szenved ($-\frac{dE}{dt} \approx 10^{-16} E^2 u$, ahol u a mágneses és sugárzási terek együttes energiasűrűsége), az elektron-spektrum alakja is felhasználható T becslésére. Ha a forrás-spektrum kitevője és a Galaxisból való szökés karakterisztikus ideje nem függ az energiától, akkor az észlelt spektrum γ hatványkitevője az $E_0 = -T \frac{dE}{dt}$ energia közelében egységnyiivel megnő (hogyan menynyire fokozatosan, az a terjedési mechanizmustól függ [9]). Innen a T karakterisztikus időt kifejezve:

$$T = \frac{10^{16} \text{ sec}}{u E_0} = \frac{3 \times 10^8 \text{ év}}{u E_0},$$

ahol u eV/cm³-ben, E_0 GeV-ben értendő. A 2,7 °K hőmérsékletű háttérsugárzásra $u \approx 0,3$ eV/cm³, így $T \approx 10^9/E_0$ év. A halo-modellben tehát néhány GeV-en, a korong-modellben (ahol $u \approx 1$ eV/cm³) 10 és 300 GeV között várnánk a kitevő növekedését. A kísérletileg kapott spektrum néhány GeV fölött valóban meredekebbé válik, ennek oka azonban valószínűleg a forrás-spektrum megváltozása és nem a terjedés közben elszenvedett energiavesztés. Ellenkező esetben ugyanis a néhány GeV fölött észlelt $\gamma \approx 2,6$ kitevőjű spektrum igen kemény, $\gamma \approx 1,6$ differenciális kitevőjű forrás-spektrumból jönne létre, ami a megfigyeltnél lényegesen intenzívebb elektromágneses háttérsugárzásra vezetne. Így 50 GeV-ig a kitevő nem nő lényegesen, ami a halo-modelleket kizárja. Nagyobb energiákon a mérések elég pontatlanok, s egyelőre a korong-modellekkel nincs éles ellentmondás, a pontosabb mérések azonban ezek közül is sokat kizárhatnak.

Vizsgáljuk meg, milyen források biztosíthatják a kozmikus sugárzásba injektált 10^{40} – 10^{41} erg/sec teljesítményt. A Napon kívül egyik forrásból sem észlelünk közvetlenül töltött kozmikus sugárzást, így az elektromágneses sugárzás megfigyelésére és elméleti meggondolásokra vagyunk utalva.

A Naphoz hasonló főszorozatbeli csillagok nagy számuk ($\approx 10^{11}$) ellenére is csak igen kis járulékot adnak, s energiaspektrumuk is jóval meredekebb a megfigyeltnél. A Nap átlagosan 10^{25} erg/sec teljesítményt fordít kozmikus sugárzás generálására [4], vagyis az összes hasonló csillag mintegy 10^{36} erg/sec-ot. Ez 4–5 nagyságrenddel kisebb a szükségesnél, így e csillagok legfeljebb a néhány MeV-es tartományban adhatnak észrevehető járulékot a galaktikus sugárzáshoz. A Napnál erősebb flertevékenységet mutató fler-csillagok keményebb sugárzást generálnak, de 10^{36} erg/sec-nál lényegesen nagyobb teljesítményt valószínűleg nem tudnak adni [42]. Jelentősebb lehet a fehér törpék szerepe, melyek megagauss nagyságrendű mágneses terük és gyors (10^{-3} – 10^{-1} Hz) forgásuk miatt néhányszor 10^{12} eV-ig igen hatékonyan gyorsíthatnak. Cowsik [43] szerint elképzelhető, hogy a kozmikus sugárzás főrészt, s így gyakorlatilag a teljes 10^{40} – 10^{41} erg/sec teljesítményt e csillagok adják.

A kozmikus sugárzás elég széles spektrumtartományát generálhatják a szupernovák, pulzárok és a szupernova-robbanásokból visszamaradt gázfelhők. A szupernova-robbanások gyakorisága Galaxisunkban kb. 10^{-2} /év, s robbanásonként 10^{51} – 10^{53} erg energia szabadul fel. A másodpercenként átlagosan felszabaduló energia így 3×10^{41} – 3×10^{43} erg, ami hatékony gyorsítási mechanizmus esetén

elég lehet a 10^{40} – 10^{41} erg/sec energiájú kozmikus sugárzás generálására. A robbanásokból visszamaradt gázfelhők önmagukban valószínűleg nem képesek hosszabb ideig jelentős aktivitásra, a bennük levő pulzárok által kisugárzott energiát azonban részben kozmikus sugárzás generálására fordíthatják. A pulzárok legalább 10^5 év nagyságrendű ideig aktívak, s képesek lehetnek a kozmikus sugárzás teljes energia-szükségletének fedezésére.

A szupernova-robbanásban létrejövő relativisztikus lökeshullámot és az általa keltett plazmarezgéseket tekinti a kozmikus sugárzás forrásának *Colgate modellje* [40]. A számítások szerint a lökeshullám 10^{16} eV-ig, a plazmarezgések esetleg 10^{19} eV-ig is képesek gyorsítani. E modell a relativisztikus hidrodinamika és plazmafizika bonyolultsága és a kiinduló empirikus adatok bizonytalansága miatt csak kvalitatív értékű.

A *pulzár-modellek* [44–47] feltételezik, hogy a pulzációk egy a mágneses dipólussal szöget bezáró tengely körüli forgásból származnak. A neutroncsillag forgási energiája először igen kis (a forgási frekvenciának megfelelő) frekvenciájú elektromágneses hullámmá alakul, majd ez kölcsönhat a csillagtól bizonyos távolságra elhelyezkedő plazmával, s ott alakul ki az általunk észlelt, lényegesen nagyobb frekvenciájú elektromágneses sugárzás. A belső kisfrekvenciás sugárzással kitöltött tartomány igen kevés gázt tartalmaz, s a neutron-csillagból megfelelő fázisban bekerülő részecskéket igen magas, esetleg $\approx 10^{20}$ eV energiáig is képes gyorsítani [45]. A 10^{12} eV-nél kisebb energiájú sugárzás valószínűleg elsősorban a pulzárt körülvevő gázfelhőben jön létre a kifelé haladó intenzív elektromágneses sugárzás és plazmahullámok hatására.

A pulzár-mechanizmus jól vizsgálható a pulzárok környezetéből hozzánk érkező *fékezési sugárzás* segítségével. A legjobban tanulmányozott *Rák-pulzár* és az azt körülvevő Rák-köd 10^{38} erg/sec fékezési sugárzást bocsát ki, vagy a teljes élettartamra integrálva mintegy 10^{49} erg-et [4]. Ez nagyságrendileg valószínűleg megegyezik a Rák-pulzár által felgyorsított elektronok össz-energiájával. Feltéve, hogy a nukleáris komponens energiája ennél az észlelt kozmikus sugárzáshoz hasonlóan két nagyságrenddel nagyobb, 10^{51} erg-et kapunk, amit az összes szupernova-maradványra tipikusnak tekintve a teljes galaktikus kozmikus sugárzás pulzárokból származtatható.

A pulzárok által gyorsított részecskék maximális energiája a periódus növekedése és a mágneses térerősség csökkenése miatt időben csökken. A kezdeti szakaszban viszont hiába keletkeznek extrém nagy energiájú részecskék, mivel ezeket a szupernova által levetett, egyre táguló héj még elnyeli. *Barrowes* [48] szerint ezért a pulzárokat körülvevő felhőből nem léphetnek ki 10^{17} eV-nál nagyobb energiájú részecskék, sőt esetleg már az észlelt kozmikus sugárzás spektrumában néhányszor 10^{15} eV-nál bekövetkező „törés” is innen származik.

Teljesen nyitott kérdés, hogy a Rák-köd mennyire tipikus szupernova-maradvány, s hogy a benne gyorsított részecskék milyen része tud végül kilépni az interstelláris térbe. Így az is előfordulhat, hogy a szupernova-maradványok az észlelt kozmikus sugárzásnak csak igen kis hányadát adják.

Igen keveset tudunk *Galaxisunk magjáról*. Lehet, hogy a kozmikus sugárzás nagy része itt keletkezik és innen a spirálkarok mentén kifelé haladva ér el hozzánk, a kozmikus sugárzás észlelt izotrópiája azonban ezt valószínűtlenné teszi.

Az adott forrásokból kilépő kozmikus sugárzás *terjedése* elsősorban attól függ, hogy milyen a mágneses tér konfigurációja a kozmikus sugárzással kitöltött tarto-

mány belsejében és határán. Korábban már említettük, hogy a kozmikus sugárzás a Földnél észlelt sűrűséggel valószínűleg csak a galaktikus korongot tölti ki. A korongból kilépő részecskék már nem térnek többé vissza, vagyis a korongban levő sugárzás szempontjából „*abszorbeálódnak*”. Egyes modellek szerint a részecskék egy része a határról visszaverődik (*reflektálódik*). A mágneses tér előállítható térben lassan változó *reguláris* és kis távolságokon is erősen változó *irreguláris* terek szuperpozíciójaként. A kis energiájú kozmikus sugárzás terjedése reguláris terekben az erővonalak menti *vezetéssel*, irreguláris terekben *diffúzióval* írható le. Ha az irreguláris terek erősek, de kis tartományokra korlátozódnak, akkor a terjedés a reguláris tér erővonalai mentén, *egydimenziós diffúzió* útján megy végbe. Ha a reguláris terek szerepe az irregulárisak mellett elhanyagolható, *háromdimenziós diffúzióról* beszélünk. Közbeneső eset az összetett diffúzió (compound diffusion [49]), melynél a részecske a gyors egydimenziós diffúzió mellett a reguláris tér erővonalai között is lassú bolyongást végez. Ha a Larmor-sugár már nem sokkal kisebb annál a távolságnál, amelyen a reguláris tér jelentősen megváltozik, a diffúziós és vezetési tárgyalás rossz közelítés. Ilyen nagy energiákon az egyes részecskék pontos pályáját érdemes kiszámítani [29, 50, 51].

A Ginzburg és Syrovatsky által javasolt háromdimenziós diffúzió a korongban csak akkor tudja biztosítani az észlelt izotrópiát, ha a részecskék szabad úthossza igen kicsi ($\ll 1$ pc). Az irreguláris mágneses teret a kozmikus sugárzással való kölcsönhatása miatt nem sztatikus térnek, hanem plazmarezgések szuperpozíciójának képzelhetjük. Jokipii megmutatta [52], hogy az észlelt izotrópiához szükséges plazmarezgések erős Fermi-gyorsulást eredményeznének, s emiatt gyorsan csillapodnának. A plazmarezgések energiájának állandó pótlását nehéz elképzelni. Maga a kozmikus sugárzás is kelthet plazmarezgéseket, ezek azonban a 100 GeV-nál nagyobb energiájú részecskéket már nem képesek együtt tartani [52]. Ezért Jokipii valószínűbbnek tartja a „*szivárgó doboz*” modellt, amely szerint a részecskék a reguláris tér erővonalai mentén szinte akadálytalanul haladnak a falig, ahol nagy valószínűséggel visszaverődnek.

Általában akár egy- akár háromdimenziós diffúziós modellel dolgozunk, az adott anizotrópiához szükséges szabad úthossz abszorbeáló falaknál lényegesen kisebb, mint részben reflektáló falaknál. Nem világos azonban, hogyan realizálódhatnak reflektáló falak a galaktikus korong határán. Egyik kvalitatív elképzelés a korong erővonalrendszerét *egy tál makarónihoz* hasonlítja, ahol az egyes csövek a tál méreténél sokkal hosszabbak, s így a bennük haladó részecskék sokszor kerülnek közel a tál széléhez, mielőtt a csövek végén kidiffundálnának. A csövek esetleg véletlenszerűen mozoghatnak is. Egy másik lehetőség Parker „*mágneses buborék*” modellje: a tartomány határánál a plazmában instabilitás léphet fel, s a kozmikus sugárzás egy része mágneses erővonalakkal határolt „*buborékban*” kiléphet a külső térbe.

Az anizotrópiát a terjedés mellett a *források eloszlása* is befolyásolja. Jones [53] és Lingelfelter [54] a forrásokat szupernova-maradványokkal azonosították. Jones a fluktuációk átlagos jellemzőit, Lingelfelter pedig az ismert pulzárok és szupernova-maradványok alapján várható fluktuációkat vizsgálta. A kozmikus sugárzás fő részére mindketten a mérésekkel összeférhető eredményt kaptak.

A kozmikus sugárzás összetételének és a spektrum kitevőjének 10^9 – 10^{14} eV-ig megfigyelt állandósága arra utal, hogy ebben az energiatartományban a részecskék Galaxisban töltött élettartama és általában a terjedési mechanizmus nem változik.

Néhányszor 10^{15} eV felett a spektrum meredekebbé válik, amit feltehetően a *Galaxis-ból való kiszivárgás* erősödése okoz. A Larmor-sugár ekkor 1 pc nagyságrendű. Valószínű tehát, hogy az 1 pc-nél sokkal kisebb irregularitások a diffúzióhoz csak kis járulékot adnak.

Extrém nagy energiájú részecskék terjedését vizsgálta *Osborne és csoportja* [29]. Három különböző galaktikus forrás-eloszlásra és a mágneses tér három reguláris modelljére számították ki a Földnél különböző energiákon várható irányeloszlást. A kapott anizotrópia nem függ erősen a modelltől, s a maximumok és minimumok iránya az energiával csak gyengén változik. A számítások eredményét a kísérleti adatokkal összehasonlítva arra a következtetésre jutnak, hogy az extrém nagy energiájú komponens *nem származhat galaktikus forrásokból*.

4.2. Vegyes modellek

A vegyes modellek az intergalaktikus térről való ismereteink hiányos volta miatt erősen kvalitatív jellegűek. Az extrém nagy energiájú komponens valószínűleg extragalaktikus forrásokból származik. A részecskék 10^{20} eV-nál nagyobb energiákra is könnyen gyorsulhatnak a rendkívül aktív forrásokban (kvazárok, Seyfert-galaxisok, Galaxis-magok). A gyorsítást a pulzárokhoz hasonlóan itt is alacsony frekvenciás elektromágneses hullámok biztosíthatják [55]. Kérdés, eljuthatnak-e hozzánk ilyen nagy energiájú töltött részecskék. A $2,7^\circ\text{K}$ -os háttérsugárzáson való π -keltés 10^{20} eV felett erősen csökkenti az intergalaktikus tér átlátszóságát, s így a protonspektrum levágásához vezet. Az eddigi mérések nem utalnak ilyen levágásra, de még nem is zárják ki azt. Ha a spektrum 10^{21} eV-nél nagyobb energiákig az eddigi kitevővel folytatódik, akkor vagy a háttérsugárzás nem univerzális, vagy az észlelt záporokeltő részecskék nem protonok (lehetnek esetleg neutrínók, kvarkok vagy valamilyen ismeretlen részecskék).

Egyes szerzők valószínűnek tartják, hogy a *kisebb energiájú* kozmikus sugárzás jelentős része is extragalaktikus eredetű. Így *Brecher és Burbridge* [11] az egyes komponensek eredetére a következő feltevéseket látja legvalószínűbbnek. Tisztán galaktikusak a $0,5$ GeV-nál nagyobb energiájú elektronok. Elsősorban galaktikusok a $0,5$ GeV-nél kisebb energiájú elektronok, a könnyű (Li, Be, B) és szupernehéz ($Z \geq 92$) magok. Elsősorban a Virgo szuperhalmazból származnak a 10^9 – 10^{15} eV energiájú protonok és a legtöbb mag. Végül 10^{15} – 10^{16} eV felett a protonok az egész Univerzumot közel egyenletesen töltik ki. E modellel sokkal könnyebben érthető a nagyfokú izotrópia és kevésbé problematikus az extrém nagy energiájú komponens keletkezése. A szuperhalmaz-méretű tartományok 10^{-12} erg/cm³ energiasűrűségű kozmikus sugárzással való kitöltése viszont sokkal hatékonyabb gyorsítási mechanizmusok feltételezését követeli meg, mint a galaktikus modelleknél. Az is kérdéses, hogy elég ritka-e az intergalaktikus gáz ahhoz, hogy az intenzív proton-komponens által a gázon keltett π^0 -mezonok bomlásából ne kapjunk az észleltnél lényegesen intenzívebb γ -hátteret.

Az utóbbi években végbement gyors fejlődés alapján valószínű, hogy néhány év múlva már sokkal pontosabb elképzeléseink lesznek a kozmikus sugárzás keletkezéséről és terjedéséről.

IRODALOM

1. *B. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский*: Происхождение космических лучей (Изд. АН. СССР, Москва), 1963.
2. *P. Morrison*, The Origin of Cosmic Rays; *Encycl. of Physics Vol. XLVI/1*, Springer Verlag, Berlin, 1961.
3. *Д. Я. Мартынов*: Курс общей астрофизики. Изд. Наука, Москва, 1961.
4. *K. Greisen*, Cosmic X-Ray, γ -Ray and Particle Sources; *Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics 1968*, Vol. 2., Gordon and Breach Science Publishers, New York—London—Paris. 1970.
5. *R. J. Gould, G. R. Burbidge*, High Energy Photons and Neutrinos from Cosmic Sources; *Encycl. of Physics Vol. XLVI/2*. Springer Verlag, Berlin, 1970.
6. *W. R. Webber*, The Spectrum and Charge Composition of Primary Cosmic Radiation, *Encycl. of Physics*, Vol. XLVI/2 Spinger Verlag, Berlin, 1967.
7. *B. Rossi, S. Olbert* 1970, Introduction to the Physics of Space, McGraw Hill, New York, 1970.
8. *S. I. Syrovatsky*, Origin and Acceleration Mechanisms; 11. ICCR, Invited Papers and Rapporteur Talks 233., 1969.
9. *Yash Pal*, Electron-Photon Component of Cosmic Rays; 11. ICCR, Invited Papers and Rapporteur Talks 241. 1969.
10. *W. R. Webber*, Protons and Nuclei in the Galactic Radiation, Charge Composition and Energy Spectra; 11. ICCR, Invited Papers and Rapporteur Talks 275, 1969.
11. *K. Brecher, G. R. Burbidge*, 12* ICCR, 1. 362. 1971.
12. *C. C. Lin, F. H.-S. Shu*: 1970, Density Wave Theory of Spiral Structure; *Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics 1968*, Vol. 2. Gordon and Breach Science Publishers, New York—London—Paris. 1970.
13. *K. Shivanandan et al.*, *Phys. Rev. Letters*, 21, 1460, 1968.
14. *J. L. Pipher et al.*, *Nature* 231, 375, 1971.
15. *J. Linsley*, *Phys. Rev. Letters* 9, 126, 1962.
16. *D. Andrews et al.*, 12. ICCR, 3, 995, 1971.
17. *M. J. Ryan et al.*, 12. ICCR, 1, 173, 1971.
18. *J. F. Ormes et al.*, 12. ICCR, 1, 178, 1971.
19. *M. M. Shapiro et al.*, 12. ICCR, 1, 221, 1971.
20. *M. Garcia-Munoz et al.*, 12. ICCR, 1, 209, 1971.
21. *B. G. Cartwright et al.*, 12. ICCR, 1, 215, 1971.
22. *W. R. Webber et al.*, 12. ICCR, 1, 229, 1971.
23. *N. L. Grigorov et al.*, *Acta Phys. Hung.*, 29, Suppl. 1, 518, 1970.
24. *M. Samorski et al.*, 12. ICCR, 3, 959, 1971.
25. *F. W. O'Dell et al.*, 12. ICCR, 1, 197, 1971.
26. *G. E. Blanford et al.*, *Acta Phys. Hung.*, 29, Suppl. 1, 423, 1970.
27. *G. E. Blanford et al.*, 12. ICCR, 1, 269, 1971.
28. *P. Evenson, P. Meyer*, 12. ICCR, 1, 138, 1971.
29. *S. Karakula et al.*, 12. ICCR, 1, 310, 1971.
30. *J. Lapikens et al.*, 12. ICCR, 1, 316, 1971.
31. *C. J. Bell et al.*, 12. ICCR, 1, 321, 1971.
32. *E. M. Carriera, C. L. Cowen*, 12. ICCR, 1, 309, 1971.
33. *H. Elliot et al.*, *Acta Phys. Hung.* 29, Suppl. 1, 491, 1970.
34. *V. I. Zatsepin*, 12. ICCR, 1, 116, 1971.
35. *P. Meyer, D. Müller*, 12. ICCR, 1, 117, 1971.
36. *R. F. Silverberg et al.*, 12. ICCR, 1, 122, 1971.
37. *G. W. Clark et al.*, *Astrophys. J. Letters* 153, L 203, 1988.
38. *S. V. Damle et al.*, 12. ICCR, 1, 84, 1971.
39. *G. W. Clark et al.*, 12. ICCR, 1, 91, 1971.
40. *S. A. Colgate, R. M. White*, *Astrophys. J.* 143, 626, 1964.
41. *S. I. Syrovatsky*, *Acta Phys. Hung.*, 29, Suppl. 1, 17, 1970.
42. *P. J. Edwards, M. McQueen*, 12. ICCR, 1, 323, 1971.
43. *R. Cowsik*, 12. ICCR, 1, 329, 1971.

* A „12. ICCR” rövidítés jelentése: Conference Papers of the 12th International Conference on Cosmic Rays, Hobart, August 16—25, 1971.

44. *J. E. Gunn, J. P. Ostriker*, *Nature* 221, 454, 1969.
45. *J. E. Gunn, J. P. Ostriker*, *Phys. Rev. Letters* 22, 728, 1969.
46. *J. P. Ostriker*, *Acta Phys. Hung.*, 29, Suppl. 1, 69, 1970.
47. *I. Lerche*, 12. ICCR, 1, 354, 1971.
48. *S. Barrowes*, 12, ICCR, 1, 429, 1971.
49. *R. E. Lingenfelter, R. Ramaty*, 12. ICCR, 1, 377.
50. *K. O. Thielheim, W. Langhoff*, *Acta Phys. Hung.*, 29, Suppl. 1, 549, 1970.
51. *J. L. Osborne, E. Roberts*, 12. ICCR, 1, 340, 1971.
52. *J. R. Jokipii*, 12. ICCR, 1, 401, 1971.
53. *F. C. Jones*, *Acta Phys. Hung.*, 29, Suppl. 1, 24, 1970.
54. *R. E. Lingenfelter*, *Acta Phys. Hung.*, 29, Suppl. 1, 557., 1970.
55. *M. J. Rees*, *Nature* 229, 312, 1971.

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADEMIA
KÖNYVTÁRA

Technikai szerkesztő: Turchányi György

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Helle Mária

A kézirat beérkezett: 1972. nov. 11. — Terjedelem: 11,9 (A/5) ív


73-5175 — Szegedi Nyomda

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI



Matematikai, fizikai, csillagászati dolgozatokat, referátumokat, könyvismertetéseket, a Tudományos Minősítő Bizottságnak a III. Osztályra vonatkozó híreit s a III. Osztály híreit közli. Évenként egy kötet (kb. 40 ív) jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).



A Közlemények előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 60 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488, külföldi megrendelések a „Kultúra”

Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,
1011 Budapest I., Fő utca 32.

Pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990 útján eszközölhetők.

Ára: 10,— Ft
Előfizetés kötetenként: 48,— Ft

INDEX: 26 491

TARTALOMJEGYZÉK

Kozmikus Sugárzási Téli Iskola	177
<i>Marik Miklós</i> : A Nap mágneses tere	179
<i>Kóta József</i> : A kozmikus sugárzás terjedése a Naprendszerben	191
<i>Válas György</i> : A galaktikus kozmikus sugárzás modulációja a Naprendszerben	221
<i>Szemerédy Pál</i> : A Föld magnetoszférája	245
<i>Gombosi Tamás</i> : Bevezetés a sugárzási övezetek dipólus-elméletébe	261
<i>Király Péter</i> : A kozmikus sugárzás eredete	291

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

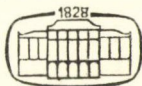
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR,
PÁL LÉNÁRD ÉS SZALAY SÁNDOR
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI
JÁNOSSY LAJOS

XXI. KÖTET

4. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST 1973

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klaszszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10–10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóiratból évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Jánossy Lajos akadémikus
1121 Budapest XII. Konkoly Thege út
Központi Fizikai Kutató Intézet

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 48 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, 1011 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmi ismertetőt írjanak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közöljék. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írjanak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.

A FEHÉRJÉK FLUORESZCENCIÁJÁNAK NÉHÁNY KÉRDÉSÉRŐL*

VÁRKONYI ZOLTÁN

József Attila Tudományegyetem, Biofizikai Tanszék, Szeged

A dolgozat kritikai áttekintést nyújt a fehérjék szerkezete és működése tanulmányozásának fluoreszcenciás módszereiről és felhívja a figyelmet a jelenlegi módszerek néhány hiányosságára. Fehérjék külső fluoreszcenciáját a fluoreszcencia reabszorpciója, ill. bizonyos esetekben a szekunder fluoreszcencia tekintetbevételével lehet pontosan megállapítani.

Bevezetés

Az élő szervezetben végbemenő szinte valamennyi folyamat speciális, az előre jellemző fehérje katalizátorok, enzimek hatása alatt folyik. Így igen jelentős a molekuláris biológiai kutatások területén a fehérjék struktúrájának, funkciójának és e kettő kapcsolatának a felderítése. Erre több módszer ismeretes, az egyik legalkalmasabb és legelterjedtebb a röntgenkristallográfiai módszer. E módszerrel nyert eredmények részletesek, jó betekintést adnak az enzim szerkezetébe, de bizonyos tekintetben korlátozottak. A *röntgenkristallográfiával nyert kép sztatikus*, rögzít egy állapotot, azonkívül nem minden biológiai fontos anyag kristályosítható, továbbá a fehérje működése során a szerkezete meg is változhat. Hasznos kiegészítést, ill. más oldalú megközelítést adhat a fluoreszcenciás vizsgálati módszer [1]. *Vladimirov* [2] szerint a fehérjék fluoreszcenciás vizsgálata nemcsak olyan módszer, amely lehetővé teszi a fotokémiai termékek „megtalálását” vagy azonosítását, hanem a *fluoreszcenciával nyert kép dinamikus*, jó felvilágosítást képes adni a fehérjék bioszintéziséről és egyéb biokémiai reakciók lefolyásáról is.

Az enzimek körében *Stryer* [1] szerint *háromféle típusú fluoreszcencia* és ennek megfelelően kromofor van, mégpedig *belső, önálló (intrinsic) fluoreszcenciával rendelkező kromoforok, fluoreszkáló kofaktorok és külső (extrinsic) fluoreszcenciával rendelkező kromoforok*.

A fehérjéket felépítő húsz aromás aminosav közül háromnak — a fenilalaninnak, a triozinnak és a triptofánnak — van önálló fluoreszcenciája, ez eredményezi a fehérjék belső fluoreszcenciáját. Az enzimek egy része tartalmaz olyan kofaktorokat (NAD, FAD, piridoxálfoszfat stb.), amelyek szintén fluoreszkálnak és így ezek fluoreszcenciás vizsgálata is fontos információt szolgáltathat számos enzim szerkezetéről és kölcsönhatásáról [3]. Számos esetben azért, hogy a fehérje szerkezetét lumineszcenciás módszerrel vizsgálhassuk, kívülről kell bevinni a megfelelő lumineszkáló kromofort (festéket) a fehérjébe, ezzel mintegy megjelölve a fehérjét. A szerkezetkutatásba ezt a külső fluoreszcencián alapuló módszert *Weber* [4] vezette be.

* Érkezett 1972. febr. 23.

Chen [5] összefoglaló munkájában a fehérjékben fellépő fluoreszcenciát a fenti hármass csoportosítással ellentétben csupán két csoportra osztja, a fehérjékben előforduló fluoreszkáló aromás aminosavak *belső fluoreszcenciájára* és a fehérjék más fluoreszkáló molekulákkal képzett komplexekben fellépő *külső fluoreszcenciára*¹. Mindkét fluoreszcenciatípust az jellemzi, hogy függ a protein struktúrájától és nem írható le csupán maguknak a fluoroforoknak a részletezésével. Enzimek esetén véleményünk szerint a *Stryer*-féle felosztás indokoltabb és pontosabb, ugyanis a *Chen*-féle felosztás nem tartalmazza az enzimek körében előforduló koenzim kromoforokat, amelyek meglétére számos példa utal [3]. Első pillanatra úgy tűnik, hogy a koenzimek fluoreszcenciája besorolható a külső fluoreszcencia jelenségeinek csoportjába, azonban itt minőségileg másfajta *fluoreszcenciáról* van szó, ugyanis az enzimre kötődő fluoreszkáló festék nem szükségképpen befolyásolja az enzim aktivitását, míg koenzimek esetén az enzim csak akkor mutat aktivitást, ha rendelkezik a megfelelő számú és meghatározott kofaktorral, amelyek a szerkezet megfelelő *helyeire épülnek be* és a ferment csak úgy lesz reakcióra képes. Szükség esetén a koenzim maga is megjelölhető lumineszkáló festékkel, és akkor ennek külső fluoreszcenciája tanulmányozható. Vizsgálatainkban két fő területtel (belső és a külső fluoreszcenciával) foglalkozunk részletesebben.

A belső fluoreszcencia

A fehérjék belső fluoreszcenciájának tanulmányozása az 1950-es évek második felétől kezdődik számottevően. Azt a tényt, hogy a fehérjéknek önálló fluoreszcenciája van, gyakorlatilag egy időben három egymástól független kutatócsoport fedezte fel: *Duggan* és *Udenfriend* [7], *Shore* és *Pardee* 1956-ban [8], *Vladimirov* és *Konev* 1957-ben [9]. A fehérjék fluoreszcenciájának tanulmányozása során a következő kérdések vetődtek fel:

- a) mely aminosavak fluoreszkálnak,
- b) van-e a fehérjéknek a maguk egészében önálló fluoreszcenciájuk,
- c) változik-e és hogyan az aminosavak fluoreszcenciája, ha azok a fehérjékbe kötődve vannak.

1. A fenilalanin, a tirozin és a triptofán fluoreszcenciája

Egyes szerzők (pl. *Szent-Györgyi* [10]) korábban a fehérjék ultraibolya fluoreszcenciáját az egész proteinmolekula tulajdonságának tekintették. Később kiderült, hogy ez a felfogás helytelen és bebizonyosodott — mint ezt már említettük is —, hogy a fehérjék belső fluoreszcenciája a bennük levő három aromás aminosav lumineszcenciájától származik. Megállapították továbbá azt is, hogy csupán ennek a három aminosavnak van észlelhető fluoreszcenciája, így a fehérjék belső fluoreszcenciáját csupán ezek okozzák. A három lumineszkáló aromás¹ aminosav lumineszcencia jellemzőit *Teale* és *Weber* [11] adta meg. Vizes oldatokban az abszorpció és a fluoreszcencia főbb adatait az 1. táblázat tartalmazza.

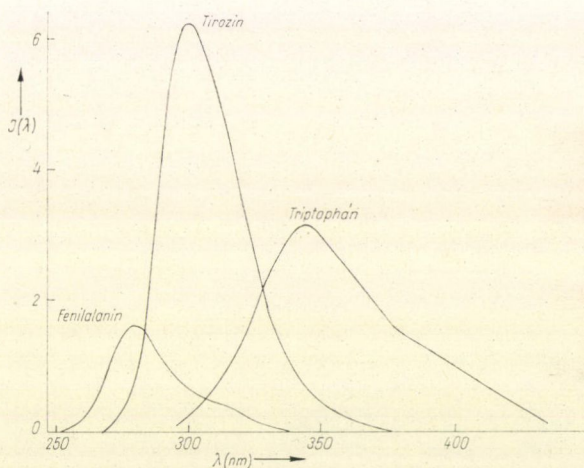
¹ Nem tévesztendő össze a lumineszcencia irodalmában használatos *belső* vagy *valódi* fluoreszcencia és a *külső*, a *mérésekkel közvetlenül meghatározott*, sem reabszorpcióra, sem szekunder lumineszcenciára nem korrigált *külső fluoreszcencia* kifejezésekkel [6].

1. TÁBLÁZAT

Lumineszkáló aromás aminosavak főbb abszorpciós és fluoreszcenciás adatai

Aminosav	Absz. max. (nm)	Fluor. max. (nm)	Kvantum hatásfok
Fenilalanin	258	282	0,04
Tirozin	275	303	0,20
Triptofán	280	348	0,21

Az aromás aminosavak fluoreszcencia spektrumait az 1. ábra mutatja. A függőleges tengelyre a fluoreszcencia intenzitását mérték fel (tetszőleges) energiaegységekben. E spektrumokat, továbbá ezek függését különböző fizikai és kémiai paramétereiktől (hőmérséklettől, koncentrációtól, pH-tól, az oldószer minőségétől stb.) azóta többen vizsgálták. E vizsgálatok módját és eredményeit [3] és [5] részletesen tartalmazza.



1. ábra

2. Kapcsolat az aminosavak abszorpciós és fluoreszcencia színekpei között

Az aromás aminosavak fluoreszcencia- és abszorpciós spektrumaira a Stokes-törvény érvényes, azaz az emissziós színekép súlypontja az abszorpciós színekép súlypontjához képest mindig a vörös felé tolódik el [12]. Példaként bemutatjuk a triptofánnak foszfát pufferben (pH=7) szobahőmérsékleten mért abszorpciós és fluoreszcencia spektrumait (2. ábra). A rövidhullámú ($\lambda_{\max} \approx 220$ nm-nél levő) abszorpciós sávnak megfelelő sáv (amelyet ábránk nem mutat) nem jelenik meg a fluoreszcenciában, mert a távolabbi UV fény a magasabb szingulett gerjesztett állapotba viszi a molekulát és innen az első szingulett gerjesztett állapotba, valamint az alapállapotba való átmenet rendkívül gyors és ezek az átmenetek fotonkibocsátás nélkül mennek végbe, a megfelelő energia hő alakjában elvész.

Vladimirov és Li-Csin-go [13] szerint a proteinek abszorpciós és emissziós spektrumai követik a Ljovsin-féle [12] *tükörszimmetria szabályt*, azaz a rezgésszám

függvényében ábrázolt $\varepsilon(v)$ abszorpciós, és $f_q(v)$ emissziós színeképek a metszéspontjukban a frekvenciategelyre bocsátott merőlegesre vonatkozóan tükrörszimmetrikusak. Matematikai alakban:

$$f_q(v) = \text{konst.} \cdot \varepsilon(2v_0 - v) \quad (1)$$

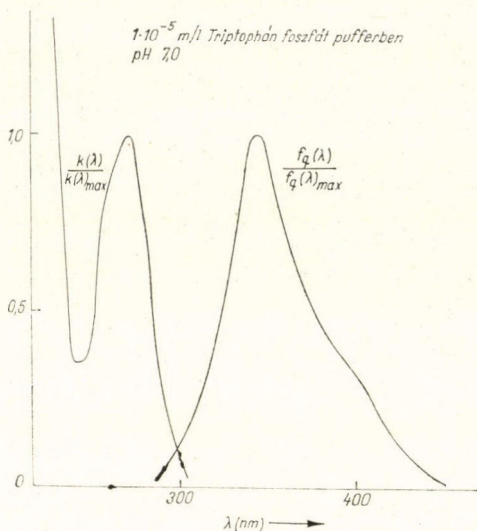
ahol v_0 az ún. tükrörfrekvenciát (egyúttal tiszta elektronátmeneti frekvenciát) jelenti.

Példaként [13]-ban a szerzők a fenilalanin vizes oldatának 77 °K-on mért, hullámhossz függésben bemutatott spektrumait említik, de csak kvalitatív megállapítást tesznek és a spektrumokat frekvenciafüggésben be sem mutatják. Ha a szimmetria teljesülésének vizsgálatához $(v_a - v_f)$ -et a v_a függvényeként felvesszük (v_a és v_f az abszorpciós és a fluoreszcencia színekép összetartozó azonos intenzitásának megfelelő frekvenciák), az (1) egyenlet szerint egyenest kell kapnunk, amelynek iránytangense kettővel egyenlő.

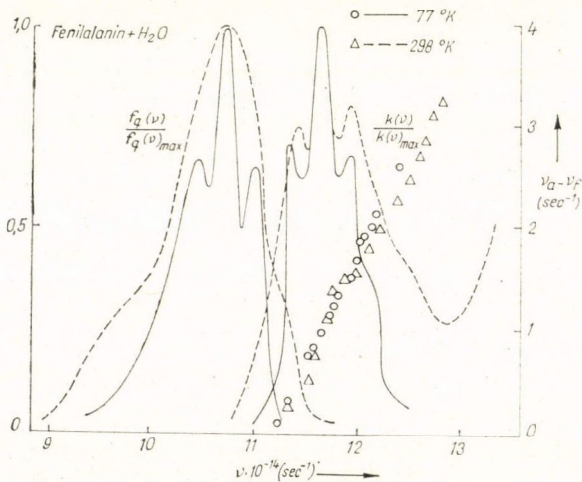
Blohincev [14] a tükrörszimmetriát elvileg helyesebben a következő alakban adja meg:

$$\frac{f_q(v)}{v^3} = \text{konst.} \cdot \frac{\varepsilon(2v_0 - v)}{2v_0 - v}. \quad (2)$$

Ha (13) adatait frekvenciára számítjuk át és úgy vizsgáljuk meg a Ljovsin-féle szimmetriát, akkor a 3. ábrán bemutatott képet nyerjük. Ugyanezen az ábrán mu-

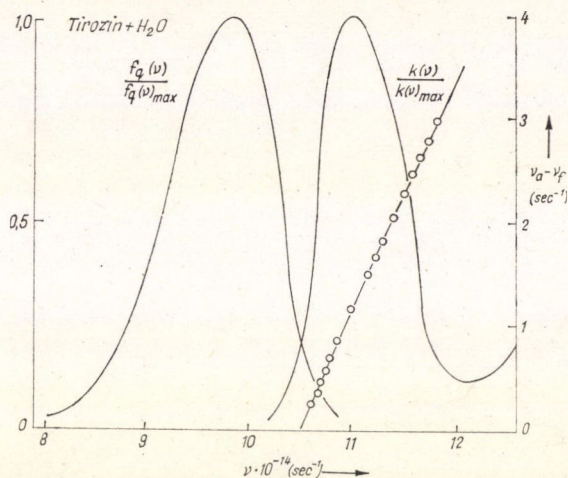


2. ábra



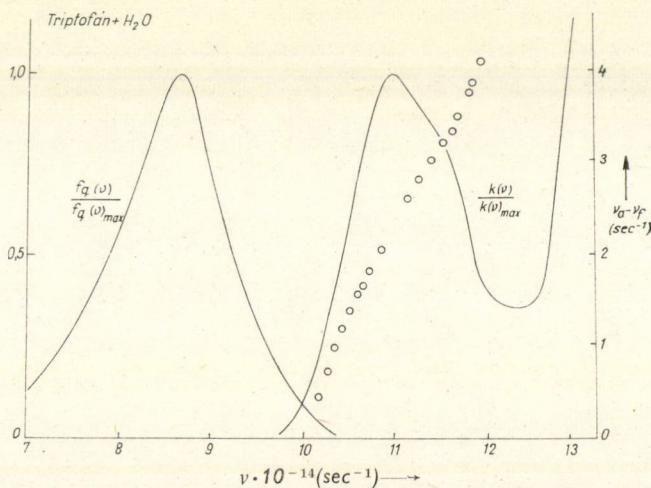
3. ábra

tatjuk be a fenilalanin spektrumait szobahőmérsékleten. Az ábráról látható, hogy a szimmetria mindkét spektrum esetén közelítőleg teljesül. A fenti módon meghatározott és a legkisebb négyzetek elvével számított egyenesek iránytangense 2,15 és 1,98, az elméletileg várt 2-vel szemben, és egyes pontok eléggé szórnak. Lényegében ugyanazt az eredményt kapjuk a Blohincev-féle szimmetriaszámításokból. A 4. ábrán



4. ábra

tirozin strukturálatlan abszorpciós és emissziós színeképeit, valamint a nyert Ljovsin-egyeneseket mutatjuk be. Ez esetben sem áll fenn a szimmetria: a pontok ugyan egy egyenesen fekszenek, viszont az egyenes iránytangense (2,23) viszonylag erősen eltér a kettőtől. A triptofán esetén az (1) egyenlet szerinti ábrázolásban (lásd 5. ábra) a pontok eléggé jól kifejezett „S”-görbén helyezkednek el, ha ezt mégis egyenesnek



5. ábra

tekinténénk, iránytangense 1,90 lenne. Tehát egyik fluoreszkáló aromás aminosav esetén sem áll fenn az abszorpciós és a fluoreszcencia színeképek tükörszimmetriája, de a szimmetriától való eltérés nem nagyon nagy.

Lumineszkáló festékek esetén a szimmetriától való eltérést részben a lumineszkáló részecske és a környezete közötti kölcsönhatással [15], részben a rezgési szintek közötti átmenetek gyakoriságával hozzák kapcsolatba. E feltételek fluoreszkáló aromás aminosavak esetén is, legalábbis részben, úgy látszik, fennállnak.

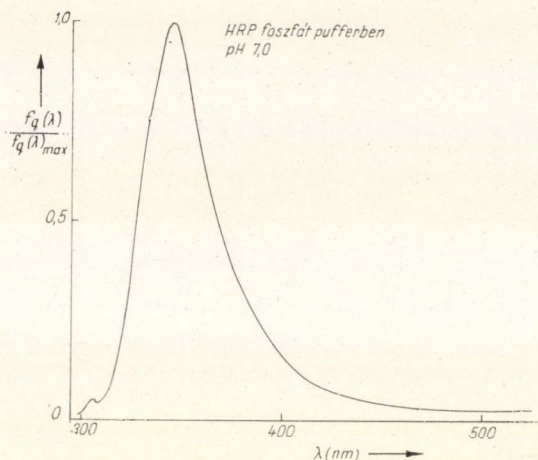
3. A fehérjékbe épült aminosavak fluoreszcenciája

A fehérje molekulának mint egésznek a fluoreszcenciája esetén a szimmetria már csak azért sem állhat fenn, mert Konev [3] szerint a triptofán abszorpciós spektruma strukturált, míg az emissziós spektruma nem az. Ennek a kérdésnek (azon túlmenően, hogy válasz nyerhető arra, milyen mértékben teljesül egy fizikai törvényszerűség a belső fluoreszcenciával rendelkező kromoforok esetén) azért is jelentősége van, mert a tükörszimmetria az energiavándorlási gyakoriságot megadó Förster-féle [16] kifejezésben is hasznosítható lenne, és így a gerjesztési energiának a fehérjemolekulában való vándorlása egyszerűbb számítási eljárást nyitna meg. Az eltérés az egyszerűsítés korlátját jelzi.

Fontos kérdés az is, hogy a belső fluoreszcenciával rendelkező aromás aminosavak megőrzik-e fluoreszcencia sajátosságait, amikor beépülnek a bonyolult fehérjemolekulába. Az erre vonatkozó vizsgálatok szerint erre a kérdésre nem lehet egyértelmű választ adni. Teale [17] szerint a tirozin fluoreszcenciája csak azokban a fehérjékben mutatható ki, amelyek csupán tirozint tartalmaznak, de triptofánt nem. E csoportot *A-osztályú fehérjéknek* nevezi. Ezeknél vizes oldatban a fluoreszcenciaszínkép maximuma 304 nm-nél van, lényegében ott, ahol a szabad tirozin emissziós maximuma, a fluoreszcencia kvantumhatásfoka azonban fehérjében jelentős mértékben lecsökkent a szabad tirozinéhoz képest. A *B-osztályú fehérjék* tirozint és triptofánt, esetleg fenilanalint is tartalmaznak. Ezen fehérjék fluoreszcencia spektrumaiiban csak a triptofán maximumának helyén található maximum, de a maximumhely néhány nm-rel a rövidebb hullámhosszak felé tolódott el a szabad triptofánéhoz képest [18], [19]. Ezek az adatok részben ellentétben vannak Konev [20] eredményeivel, aki megtalálta a tirozin fluoreszcenciájának megfelelő csúcsot számos olyan proteinben, amely triptofánt is tartalmazott. Weber [21], [22] az emberi szérum albumin tanulmányozásakor a triptofán mellett megkapta a tirozin maximumának megfelelő csúcsot is. Igaz, hogy ez a protein molekulánként 17–18 tirozint és csak egy triptofánt tartalmaz. Később még számos esetben kimutatták a triptofán fluoreszcenciája mellett a tirozin fluoreszcenciáját is, bár a tirozinhez tartozó csúcsok csak gyenge vállként jelentkeztek a teljes fehérjemolekula fluoreszcencia spektrumában ([5], 485. old.). Ennek az is oka, hogy a triptofán fluoreszcenciájának hatásfoka a proteinmolekulában gyakorlatilag nem változott a szabad triptofánéhoz képest. A triptofán emissziós maximuma 332 nm és 342 nm között változott, aszerint, hogy milyen fehérje fluoreszcencia színeképeiben tanulmányozták [17]. Azt a tényt, hogy a triptofán fluoreszcenciája mellett fellép a tirozin fluoreszcenciája is, a tormagyöke peroxidáz (horse radish peroxidase, [HRP]) esetén kapott eredmények is igazolni látszanak (6. ábra).

Az előzőekben, ha vázlatosan is, érintettük a fehérjék belső fluoreszcenciájának legalapvetőbb problémáit. E problémák részben azért jelentkeztek, mert a fluo-

reszcenciás módszer alkalmazása a proteineknel viszonylag nem régi, másrészt a jól ismert klasszikus lumineszcencia vizsgálati módszerek [12], [16], [6] közvetlenül nem alkalmazhatók fehérjék esetén a kicsiny intenzitás, az ultraibolya gerjesztés és észlelés stb. miatt.



6. ábra

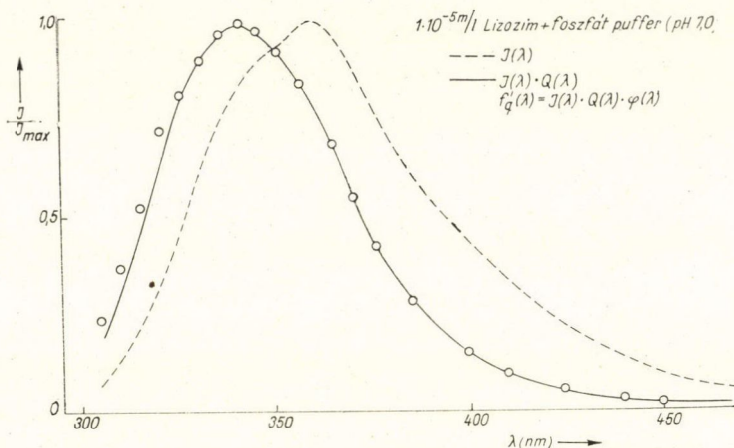
4. A fehérjék belső fluoreszcenciájával kapcsolatos főbb problémák

A fehérjék tanulmányozásának a problémáit a belső fluoreszcencia vonatkozásában a következőkben lehet összefoglalni.

a) A legtöbb fluoreszcencia színeképet ez ideig csupán a korrigálatlan, közvetlenül mért színekép formájában közölték, vagy relatív intenzitás értékeként. Nem vették tekintetbe a fluoreszcencia reabszorpcióját, amely minden olyan esetben fellép, amikor az abszorpciós és emissziós színekép átfedi egymást, és bizonyos kísérleti feltételek be nem tartása esetén az általánosan elfogadott mérési hibánál nagyobb hibára vezet. E korrekció az abszorpciós koefficiensen, az oldat rétegvastagságán kívül függ a megfigyelés geometriai viszonyaitól is. A legtöbb esetben, amikor jelentős a reabszorpció, a szekunder fluoreszcenciát is figyelembe kell venni [6]. E korrekciók figyelembevétele azért is fontos, mert csupán a valódi fluoreszcencia spektrumok adnak hű információt a fluoreszcencia jellemzőkről. Így pl. a valódi spektrum maximuma másutt lehet, mint a korrigálatlan, mért spektrumé. Különösen nagy eltérés várható a fluoreszcencia kvantumhatásfokában. A 7. ábrán példaképpen bemutatjuk az általunk vizsgált 1.10^{-5} m/l koncentrációjú lizozimnek foszfát pufferben (pH=7,1) szobahőmérsékleten meghatározott fluoreszcencia spektrumait; a közvetlenül mért $I(\lambda)$, a mérőberendezés spektrális érzékenysége figyelembe vételével adódó $I(\lambda)$, $Q(\lambda)$ és a reabszorpcióra korrigált $f'_q(\lambda) = I(\lambda)Q(\lambda)\varphi(\lambda)$ spektrumokat. Az $I(\lambda)$ spektrumot a JATE Biofizikai Tanszéken összeállított UV-spektrofotométerrel vettük fel, 285 nm-es gerjesztésnél, 1 cm-es rétegvastagságnál, mérőleges megfigyelést alkalmazva.

Az ábráról látható, hogy a reabszorpciós korrekció lizozim esetén nem jelentős, ennek az az oka, hogy az abszorpciós és emissziós spektrum csak igen kis mértékben fedt át egymást, és ott ahol a két spektrum nem fedt át egymást, nincs reabszorpció.

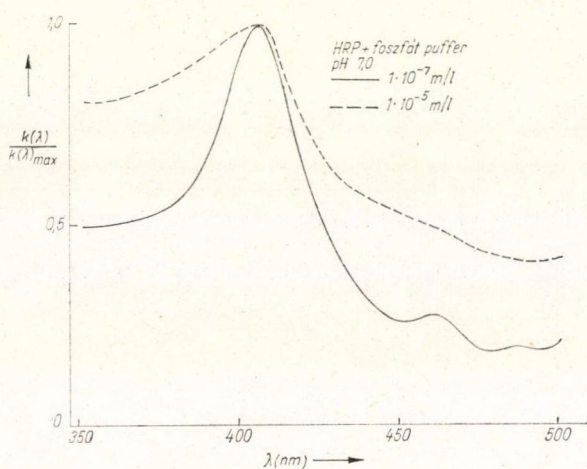
Azon esetekben, amikor a két spektrum jobban átfedi egymást, az emisszió maximumánál pedig van abszorpció, a maximumhely szempontjából is fontos a korrekció, mint ezt a külső fluoreszcenciánál látni is fogjuk.



7. ábra

b) A kísérleti körülményeket az irodalomban általában nem ismertetik pontosan. Kevés az olyan közlemény, ahol megadják a koncentrációt, a hőmérsékletet, a rétegvastagságot, előfordul, hogy még az oldószer minőségét sem közlik, nem is említve az alkalmazott spektrális sáv szélességet. A gerjesztő fény hullámhosszát általában megadják, a gerjesztés geometriai viszonyait azonban már kevésbé. A triptofán mellett levő tirozin fluoreszcenciájának megállapításához például nagyon fontos tényező a spektrofotométerben alkalmazott sáv szélesség. Az általunk végzett mérésnél a spektrális félértékszélesség 0,4 nm volt, azaz kisebb, mint a [2]-ben megadott 1—2 nm. Valószínűleg erre is vezethető vissza, amint a 6. ábrán bemutattuk, hogy megtaláltuk a peroxidáz fluoreszcencia színekében a tirozinhoz tartozó csúcsot.

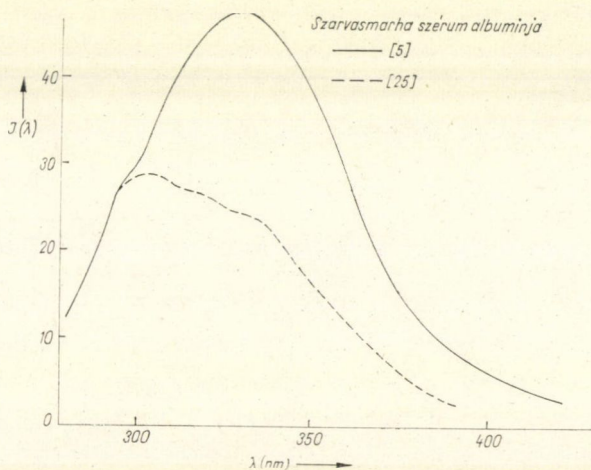
c) Szorosabb értelemben az *abszorpciós spektrum* nem tartozik a lumineszcencia-jellemzők körébe, azonban különböző számításokhoz, így pl. a reabszorpciós és fluoreszcencia spektrummal kapcsolatos szekunderfluoreszcenciás korrekcióhoz szükséges az abszorpciós színek pontos meghatározása is [23]. Mivel a fehérjék nagy molekulájú vegyületek, már viszonylag kicsiny koncentrációnál jelentős *fényszórás* lép fel (az oldat opálossá válik), amelyet az abszorpció és az emisszió mérésénél egyaránt figyelembe kell venni. Éppen ezért az abszorpció és emissziós méréseket célszerű *igen kicsiny koncentrációjú* oldatokon végezni, és ez új mérés technikát követel meg [24], [45]. Erre példaként bemutatjuk a peroxidáz enzim-foszfát pufferes (pH=7) $1 \cdot 10^{-7}$ m/l koncentrációjú oldatának az abszorpciós



8. ábra

spektrumát a hagyományos spektrofotométerrel és technikával és a [45]-ben leírt módon mértet (8. ábra).

d) Igen lényeges a fehérje *oldatok tisztasága*, ill. szennyezettségének ismerete, ugyanis a szennyezések a fluoreszcencia kioltóiként szerepelhetnek. Tekintettel kell lenni arra is, hogy fényérzékeny proteinek az ultraibolya mérőfény, ill. gerjesztőfény hatására elbomolhatnak, és így fluoreszcenciájuk megváltozhat. A jól meghatározott kísérleti körülmények fontosságát mutatja a 9. ábra is, amely az emberi szérum albumin fluoreszcencia spektrumát mutatja be két különböző szerző [5], [25] mérései alapján. Mint látható, a spektrumok teljesen eltérnek egymástól.



9. ábra

A külső fluoreszcencia

Sok esetben a fluoreszcenciás módszert csak úgy tudjuk alkalmazni, ha kromofort viszünk a proteinbe. Ennek a módszernek az előnyei a következők:

1. A fehérjékben levő aromás aminosavak fluoreszcencia hatásfoka viszonylag kicsiny, míg a bevitt festéké általában nagy és így a fluoreszcencia kísérletileg könnyebben tanulmányozható.

2. A fehérjébe való beépüléskor a festék fluoreszcenciájának változását vizsgáljuk. A festékek fluoreszcenciája a látható színek tartományába esik, ezért a hagyományos és jól kidolgozott módszerekkel tanulmányozhatók a fluoreszcenciában bekövetkezett változások.

Mivel nem minden festék kötődik megfelelően mindegyik fehérjéhez, ezért gondosan ügyelnünk kell arra, hogy a kiválasztandó festék a következő követelményeknek tegyen eleget:

a) kovalens módon kötődjék a fehérjéhez,

b) a fehérjék saját emissziós (általában UV) sávjával lehetőleg nem egybeeső intenzív fluoreszcenciával rendelkezék,

c) fluoreszcencia-jellemzői a molekula strukturális változásait kellőképpen tükrözzék, kellő érzékenyek legyenek a környezet struktúrája iránt (pl. az iránt, hogy poláris vagy nem poláris környezetben van-e, közel vagy távol van-e a másik kromofortól),

d) kötődés során a lehető legkisebb szerkezetdeformálódást okozza.

Kedvező esetben a festék speciális (pl. aktív) helyen kötődik, ekkor mutat a fluoreszcencia a legtöbbet az enzim működéséről, ill. szerkezetéről.

A külső fluoreszcenciás módszerrel történő fehérjevizsgálatoknál az alapvető fluoreszcenciaparaméterek (emissziós spektrum, abszolút kvantumhatásfok, polarizációs fok, csillapodási idő, valamint abszorpciós spektrum) változásaiból vonják le a következtetéseket. Ezekre mutatunk be néhány példát a következőkben.

1. *A fluoreszcencia polarizációs foka.* Ennek tanulmányozása azért fontos, mert a polarizációs foknak az emissziós színekkel, a hatásfokkal és a csillapodási idővel való összefüggéséből értékes molekulaszervezeti következtetéseket lehet levonni, ill. felvilágosítást lehet nyerni az abszorpciós és emissziós átmenetek jellegéről, az elektrongerjesztési energiának részecskéről részecskére való átjutásáról stb. [31]. A módszer alkalmazásánál elsősorban a depolarizációra vezető tényezők és a szerkezet közötti kapcsolatok látszanak fontosnak. Weber [4] a fluoreszkáló molekula, ill. ion forgómozgására visszavezethető rotációs depolarizációs módszert vezette be a proteinkémiai kutatásokba. E módszer azon alapszik, hogy a kovalensen kötött festékfehérje komplex lineárisan polarizált fénnel való gerjesztéskor parciálisan poláros fluoreszcencia fényt bocsát ki, és a fluoreszcencia polarizációs foka függ a Brown-féle rotációs mozgástól. Ez más szavakkal azt jelenti, hogy információt nyújt a makromolekula szerkezetéről és alakjáról. Gömb alakú részecskéktől származó fluoreszcencia rotációs depolarizációjára Perrin [32], [33], és Ljovsin [34] állította fel a következő egyenletet:

$$\frac{1}{P} - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{RT\tau}{V\eta_v} \right), \quad (3)$$

ahol P_0 az ún. határpolarizáció, V a fluoreszkáló részecskének a szolvátburokkal al-

kotott együttes molterfogata, τ a fluoreszcencia-csillapodási idő, T az oldat abszolút hőmérséklete. *Ellipszoid* alakú fluoreszkáló részecskék fluoreszcenciájánál a rotációs depolarizáció kvantitatív leírásával foglalkozott többek között *Perrin* [35] és *Memming* [36], de az általános érvényű törvények sok paramétert tartalmaznak és a kísérletekkel gyakorlatilag nem hozzáférhetők. *Weber* [4] a (3) egyenletet átrendezte és a rendezetlenül elhelyezkedő merev ellipszoid molekulákból álló fluoreszkáló rendszer (oldat) rotációs depolarizációjára a következő összefüggést adta:

$$\frac{1}{P} - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{3\tau}{\varrho_h} \right), \quad (4)$$

ahol P_0 a rotáció távollétében mutatkozó polarizációs fok, ϱ_h az ellipszoid három tengelyének megfelelő ϱ_1 , ϱ_2 és ϱ_3 rotációs relaxációs idők harmonikus középértéke, vagyis

$$\frac{1}{\varrho_h} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} \right). \quad (5)$$

Gömb alakú molekuláknál $\varrho_h = \varrho_0$. A (32) és (44) szerint

$$\varrho_0 = \frac{3\eta_v V}{RT}, \quad (6)$$

így a (4) általános egyenlet ebben az esetben átmegy a speciális Perrin—Ljovsin-féle (3) egyenletbe.

A rotációs depolarizációs vizsgálatokkal kapcsolatban érdemesnek látszik néhány eredményt felidézni, hogy ezek alapján a módszernek a fehérjeszerkezet vizsgálatában elfoglalt helyét megítélhessük.

a) A ϱ_h rotációs relaxációs idő kísérletileg meghatározható úgy, hogy mérjük a P polarizációs fokot a T hőmérséklet és az η_v viszkozitás függésében, majd meghatározzuk az $1/P$ -t a T/η_v függvényében. Ennek a függvénynek a (4) egyenlet alapján egyenest kell adnia, amelynek tengelyhelyzete a határpolarizáció reciprokát adja, míg iránytangenséből és a τ fluoreszcencia-élettartam ismeretéből a ϱ_h számítható ki.

A relaxációs idő azért jelentős, mert összefügg a protein alakjával és méretarányaival. *Steiner* és *McAlister* [40] állandó ϱ_h értéket kaptak különböző proteinekre, jelölő festékként 1-dimetilamino-naftalin-5-szulfanilt (DNS—C1) és antracén-szulfonamidot (ANS) használtak. A ϱ_h -t függetlennek találták a konjugáció fokától és a gerjesztő hullámhossztól; ebből azt a következtetést vonták le, hogy a jelölés véletlenszerű volt.

A későbbi kísérleti eredmények ezt a feltételezést nem támasztották alá. A polarizációs mérésekből a ϱ_h általában igen alacsonynak adódik (pl. a szarvasmarha γ -globulinnál 90 nsec [38], [37], míg a szedimentációs és a diffúziós mérésekből négy-öttször akkora. Ebből arra lehetett következtetni, hogy a fehérje nem merev ellipszoid és a hajlékony szegmentumok fellépése a nagy fehérjemolekulákban gyakori.

Több esetben azt tapasztalták, hogy ϱ_h -ra más érték adódik, ha a mérés során a hőmérsékletet vagy a viszkozitást tartják állandó értéken [39]. Ebből az észlelet-

ből azt a következtetést vonták le, hogy a fehérjemolekulák merevségének különböző hatóanyagok által való megváltoztatását lehet ezzel a módszerrel kimutatni, és így bizonyos anyagoknak a rendszerbe vitele, a pH megváltoztatása vagy a melegítés által okozott szerkezetváltozások jól követhetők. Egyes szerzők (l. pl. [41]) a q_h -t a gerjesztő fény hullámhosszától is függőnek találták.

Mindezek a következtetések véleményünk szerint az alábbi érvek alapján távolról sem tekinthetők teljesen megalapozottnak, és nem is teljesek. Állandó hőmérsékleten a viszkozitás változtatásához két különböző viszkozitású komponensből álló oldószerben a komponensek arányát kell változtatni, és ez erőteljes specifikus oldószerhatást is okozhat, a fehérje-festék komplex fluoreszcencia sajátságai jelentősen megváltozhatnak anélkül, hogy a komplex szerkezetében mélyreható változások következnenek be. Állandó viszkozitás mellett a hőmérséklet változtatásához ugyanilyen eljárást kell alkalmazni, mert különben a hőmérséklet változásával a viszkozitás változása járna együtt. Ezért az előbb említett jelenségek a következtetések megbízhatóságát ebben az utóbbi esetben is zavarják. A q_h -nak a gerjesztő hullámhossztól való függése pedig arra mutat, hogy a vizsgáló eszköz (a fény) a vizsgált tárgyat (a fehérje-festék komplexet) mélyrehatóan megváltoztatja, tehát q_h az érintetlen komplexre közvetlenül semmiképpen sem határozható meg. Világos, hogy olyan molekuláris jellemzőnek, mint a rotációs relaxációs idő, nem lenne szabad a mérőeszköztől függnie. Erre a kérdésre a későbbiekben még visszatérünk.

b) Gyakran használják a q_h/q_0 hányadost arra, hogy a proteinmolekula alakjának a gömbtől való eltéréséről kapjanak képet. Ha ugyanis a $q_h/q_0 = 1$, a proteinmolekula gömb alakú. Ettől az alaktól való eltérés során az arány 1-től eltér. Ha a V/M specifikus térfogatot 0,74-nek tételezzük fel, akkor

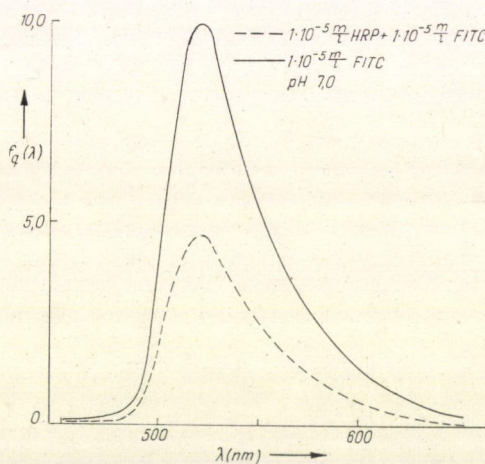
$$q_0 = \frac{M \cdot 10^{-3}}{1,23}. \quad (7)$$

Az így kiszámított q_0 -al lehet a q_h/q_0 -at kiszámítani. Számos proteinnél (pl. nyúl γ -globulinjánál, leguminnál stb.) $q_h/q_0 < 1$, ami arra vezethető vissza, hogy nem helyes a merev struktúra feltételezése.

Azokban a cikkekben, amelyekben a szerzők a fluoreszcencia polarizációs fokából vonták le következtetéseiket, ritkán találhatók olyan kísérleti adatok, amelyekből kitűnnék, hogy a reabszorpció és a szekunder fluoreszcencia által okozott szisztematikus hiba fennállhatott-e, ill. sehol sem utalnak arra, hogy a valódi (a reabszorpció és a szekunder fluoreszcencia figyelembevételével korrigált) polarizációs fokot használták volna fel. Ez azért jelentős, mert csak a valódi polarizációs fok ismeretében lehetséges a molekulaszervezeti kérdésekre egzakt választ adni. A mért és a valódi polarizációs fok között Budó és Ketskeméty [42] adnak összefüggést, ill. Gáti és Szalay [43] egy egyszerűbb formulát. Az utóbbi, három különböző rétegvastagságnál meghatározott polarizációs fokokból adja meg a valódi polarizációs fokot. Az elmondottak szerint a fehérjékre vonatkozólag az irodalomban közölt polarizációs adatoknak bizonyára jelentős része nem megbízható, s mivel a szerzők általában nem tüntetik fel a mérésnél használt rétegvastagságot, a gerjesztés és megfigyelés pontos geometriai adatait, ezért a valódi polarizációs fok utólag nem is határozható meg.

2. A fluoreszcencia spektrum és a kvantumhatásfok. E tényezők vizsgálata során

azt a módszert alkalmazzák, hogy meghatározzák a festék, majd a festék-fehérje komplex fluoreszcencia spektrumát és kvantumhatásfokát. A festéknek a fehérjéhez való kötődésekor jelentős eltérés várható a fluoreszcencia kvantumhatásfokban, a fluoreszcencia spektrális eloszlásában és a fluoreszcencia spektrum maximumának helyzetében. Ilyen jellegű vizsgálatok során *Weber és Laurence* [26] azt tapasztalták, hogy a 8-anilin-naftalin-1-szulfát (ANS) és 2-p-toluidinilnaftalin-6-szulfát (TNS) vizes oldatban nem, vagy csak egészen kis mértékben fluoreszkál, de szarvasmarha szérumalbuminhoz vagy denaturált proteinhez kötődve erősen fluoreszkál. Más szerzők (pl. [27]) viszont éppen a fluoreszcencia intenzitásának csökkenését tapasztalták denaturált szérum albuminnak ANS-sel képzett komplexe esetén. Ugyanakkor *Gally és Edelman* [28] azt tapasztalta, hogy a Bence Jones-fehérje denaturáció után növeli az ANS fluoreszcenciájának intenzitását. A fluoreszcencia intenzitásának a csökkenését tapasztaltuk a torna peroxidáznak fluorescein-izotiocianáttal (FITC) alkotott komplexe esetén, a FITC kromofornak foszfát pufferben (pH=7) kapott fluoreszcenciájához képest. A 10. ábrán bemutatjuk ezt a csökkenést, folytonos

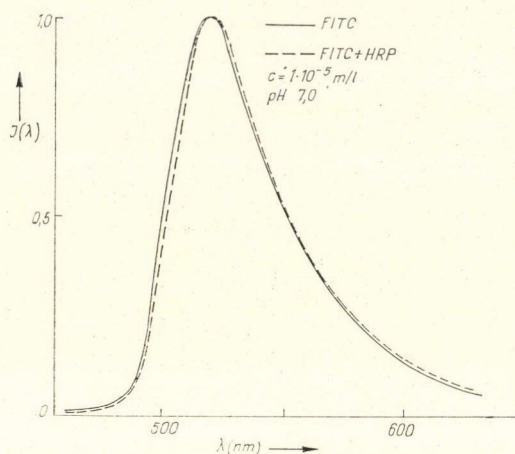


10. ábra

vonallal a FITC, szaggatottal a komplex reabszorpcióra korrigált emissziós spektrumát tüntettük fel. Méréseinket [46]-ban leírt UV-spektrofluoriméterrel végeztük. A gerjesztő hullámhossz 436 nm, az alkalmazott rétegvastagság 1 cm volt, és merőleges megfigyelést alkalmaztunk.

Ha a kapott görbék spektrális eloszlását vizsgáljuk (11. ábra), láthatjuk, hogy a maximumhely a kötődés következtében mintegy 2,5 nm-rel tolódott el.

Fontos, hogy a reabszorpciót figyelembe vegyük az emissziós spektrumok meghatározásához. Részben azért, mert az abszorpciós és emissziós spektrum meglehetősen nagy területen fedti át egymást, továbbá csak így nyerhetünk megbízható adatot a spektrumok esetleges eltolódására. Ennek bizonyítására bemutatjuk táblázatosan (2. táblázat), hogyan változik meg az emissziós spektrum maximumhelye korrekcióval és anélkül, az előző festék-fehérje komplex esetén.



11. ábra

2. TÁBLÁZAT

	$I(\lambda) \times Q(\lambda)$	$I(\lambda) \times Q(\lambda) \times \varphi = f'_q(\lambda)$	$\Delta\lambda$
FITC	521,5 nm	518 nm	3,5 nm
FITC+HRP	522,5 nm	520,5 nm	2,0 nm
$\Delta\lambda$	1,0 nm	2,5 nm	—

Látjuk, hogy reabszorpciós korrekció nélkül az eltérés (1 nm), amelyből a kötődésre kell következtetni, igen kicsiny, és közel van a mérési hibához, tehát a kötődés bizonyossággal nem állítható, míg a reabszorpció figyelembevételével bizonyosan állítható, hogy a maximum helyében eltérés következett be, amely a kötődésre utal.

Stryer [1] az ANS fluoreszcenciájának kvantumhatásfokára vízben 0,004-et, szérum-albuminhoz kötődve 0,75-öt, és apomioglobinban (mioglobin-hem) 0,98-at kapott, amelyből látható, hogy a festéknek a fehérjéhez való kötődése ebben az esetben a fluoreszcencia kvantumhatásfokának növekedéséhez vezet. Hasonló tapasztalatok adódtak az 1-dimetil-aminonafthalin-5-szulfonátkloridnak (DNS-klorid) fehérjével képzett komplexének hatásfokára. Más esetekben a DNS-aminosavak fluoreszcencia spektrumában a maximumhelynek a rövidhullámok felé való eltolódását figyelték meg, ha az fehérjéhez kötődött. A felsoroltakhoz hasonló számos kísérleti eredmény ismert.

Mindezek alapján ezen módszerrel történő vizsgálatokból a következő általánosabb jellegű konklúziót lehet levonni:

a) Mivel nem minden fluoreszkáló festék alkot a fehérjével komplexet, azt a következtetést lehet leszűrni az eddigi vizsgálatok alapján, hogy ha a festék a fehérjével komplexet alkot, a festék *fluoreszcencia intenzitása* megváltozik (növekedhet vagy csökkenhet). Megjegyezzük, hogy ezen vizsgálatok zömében a festék szérum-

albuminhoz való kötődését vizsgálták. A szérumalbuminhoz szinte minden festék kötődik, ezért más fehérjék esetén a megfelelő festék megválasztásának is nagy szerepe van.

b) Az intenzitásban bekövetkező változásoknál jelentősebb az energetikai viszonyokkal összefüggő változás: a fluoreszcencia spektrum maximumhelyének eltolódása a komplex képződésének következményeképpen. Az eddigi vizsgálatok alapján nem lehet általános érvényű törvényszerűséget levonni arra vonatkozóan, hogy milyen feltételek mellett és milyen jellegű eltolódás következik be.

c) A festék fluoreszcencia-hatásfokának változása a fehérje-festék komplex kialakulása esetén szintén nem egyértelmű; a hatásfok növekedhet vagy csökkenhet, de rendszerint változik.

d) Egyes festékek (mint pl. az ANS) érzékenyen reagálnak a környezet polaritására, amely a festék körül a szolvátburoknak a gerjesztéskor való újraképződésével, ill. újraorientációjával magyarázható.

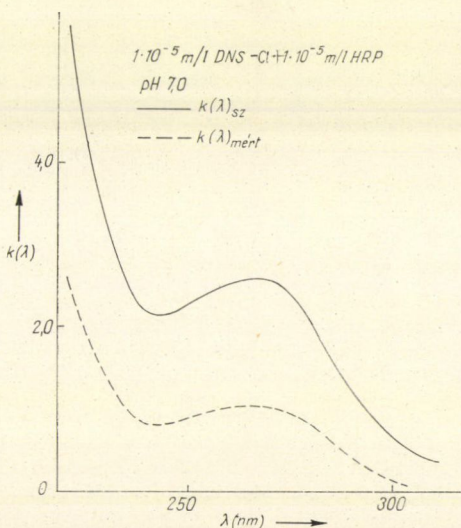
3. Abszorpciós spektrum. A fluoreszkáló festéknek a fehérjéhez való kötődése az abszorpciós spektrum változásával is figyelemmel kísérhető. Ismeretes ugyanis ([29], [30]), hogy kétkomponensű keverékoldatok esetén, ha a komponensek nem lépnek egymással kémiai kapcsolatba, akkor a keverékoldat $k(\lambda)$ abszorpciós spektruma megegyezik a komponensek $k_1(\lambda)$ és $k_2(\lambda)$ összegével, azaz

$$k(\lambda) = k_1(\lambda) + k_2(\lambda). \quad (8)$$

Ha tehát a festék és a fehérje komplexet alkot, akkor az előbbi összefüggés szerint a komponensekből számított spektrum eltér és általában nagyobb a komplex abszorpciós spektrumánál. Példaként (a 12. ábrán) bemutatjuk a DNS—Cl és a HRP $1 \cdot 10^{-5}$ m/l ekvimoláris keverék oldatai esetén, vizes oldatban (pH=7) kapott mérési eredményünket. A szaggatott vonal a komplex, míg a folytonos vonal a komponensek abszorpciós spektruma összegét jelenti. A külső fluoreszcenciás vizsgálatok körében említést érdemel Chen-nek [5] és másoknak [26—28], [47] az a tapasztalata, hogy egyes esetekben, ha a festék nem is kötődik kovalens módon a proteinhez, hanem többé-kevésbé laza kölcsönhatás van a két molekula között, vagy éppen csak keverékoldatot képez a rendszer, a fluoreszcencia mégis függ a fehérje konformációjától.

A fehérje-komplex fluoreszcenciájából következtetést lehet levonni az elektron-gerjesztési energiának a fehérjelánc mentén való vándorlásáról is (l. pl. [1]). Ezen vizsgálatoknak a jelentőségét fokozza, hogy ezekből a fluoreszkáló csoportok távolságára is lehet következtetni. Ezzel a kérdéssel a közlemény keretén belül nem foglalkozunk.

4. A fehérjék külső fluoreszcenciájával kapcsolatos főbb problémák. A külső



12. ábra

fluoreszcenciának a fehérje-szerkezet tanulmányozásában való sikeres alkalmazása napjainkban a következő problémákat veti fel.

a) A rendszertelenül „megjelölt” fehérjemolekulák, ill. ilyen megjelölés útján létrejött festék-fehérje komplexek alkalmasak arra, hogy olyan kérdésekre, mint a gömb alaktól való eltérés, a rotációs relaxációs idő, ill. a fehérjelánc mozgékony-sága, megbízható választ adjon polarizációs mérésekből, továbbá olyan kérdésekre is, mint a környezet polaritása, a festék-fehérje komplex kötődési viszonyai. Mindezekhez azonban arra van szükség, hogy a kísérleti adatok a *fluoreszcencia reabszorpciójából és a szekunder fluoreszcenciából eredő hibától mentesek legyenek*. Ezt a feltételt az eddigi adatok többsége biztosan nem teljesíti, és hogy ez mekkora hibát jelent, azt minden esetben külön-külön lehet csak megállapítani.

b) A polarizációs foknak a gerjesztő hullámhossztól való függésére vonatkozó tapasztalat arra figyelmeztet, hogy a gerjesztési energia-többlet (amely szemléletesen kifejezve abból adódik, hogy az abszorbeált foton energiája mindig nagyobb, mint az emittált fotoné) a fehérjelánc mozgékonyágának termikus úton való megnövelésére vezethet a környezeténél mintegy magasabb helyi hőmérséklet létrehozása útján. Erre a lehetőségre a festékek fluoreszcenciájának tanulmányozása kapcsán az utóbbi évtizedben sok esetben rámutattak [48], ezért érdekes lenne a kérdésnek a festék-fehérje komplexnél való szerepét is tanulmányozni.

c) A festék-fehérje komplex „rendezetten” való megjelölésének a megvalósítása nagyon kívánatos célként jelölhető meg. Ehhez arra lenne szükség, hogy a fehérjemolekula bizonyos részeihez specifikusan kötődő festéket találjunk, és így eme részekben bekövetkező változásokat tudnánk a festék fluoreszcenciájának észlelése alapján megállapítani.

A szerző köszönetét fejezi ki dr. Szalay László egyetemi tanárnak a vizsgálatok lefolytatásakor és a dolgozat megírásakor nyújtott támogatásáért.

IRODALOM

1. L. Stryer, Science, 162, 526, 1968.
2. Ю. А. Владимиров, Фотохимия и люминесценция белков. „Наука” Москва, 1965.
3. С. В. Конев, Электронно-возбужденные состояния биополимеров. „Наука и техника”, Минск, 1965.
4. G. Weber Biochem. J. 51, 155, 1952.
5. R. F. Chen, Fluorescence Ed. by G. G. Guilbault. p. 443, Marcel Dekker, New York, 1967.
6. Budó Á, Magyar Fizikai Folyóirat 9, 269, 1961.
7. D. Dugan and S. Udenfriend, J. Biol. Chem. 223, 313, 1956.
8. V. G. Shore and A. B. Pardee, Arch. Biochem. Biophys. 60, 100, 1956.
9. Ю. А. Владимиров, С. В. Конев, Биофизика, 2, 3, 1957.
10. A. Szent-Györgyi, Biochem. Biophys. Acta 16, 167, 1955.
11. F. W. J. Teale, G. Weber, Biochem. J. 65, 476, 1957.
12. V. L. Ljovsin, Folyékony és szilárd anyagok fotolumineszcenciája, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.
13. Ю. А. Владимиров, Ли-Чинь-го, Биофизика, 7, 3, 270, 1962.
14. D. J. Blohincev, Phys. SZSZSZR 1, 127, 1959.
15. A. Kowski, B. Polaska, Z. Naturf. 17a, 352, 1962.
16. Th. Förster, Fluoreszenz Organischer Verbindungen Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1951.
17. F. W. J. Teale, Biochem. J. 76, 381, 1960.
18. R. H. Steele, A. Szent-Györgyi, Studies on the excited states of proteins. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 44, 6, 540, 1958.
19. Ю. А. Владимиров, Изв. Акад. Наук. СССР, серия физ. 23, 1, 86, 1959.

20. C. B. Konev, Докл. Акад. Наук. СССР. 116, 594, 1957.
21. G. Weber, Biochem. J. 79, 29 P, 1961.
22. G. Weber, Nature, 1970, 27, 1961.
23. I. Ketskeméty, J. Dombi, R. Horvai, J. Hevesi, L. Kozma, Acta Phys. et Chem. Szeged, 7, 17, 1961.
24. I. Ketskeméty, L. Kozma, É. Farkas, Zh. Priklad. Spekt. USSR (megjelenés alatt).
25. Ю. А. Владимиров., Г. М. Зими́на, Биохимия 30, 1105, 1965.
26. G. Weber and D. J. R. Laurence, Biochem. J., 51, XXI. 1954.
27. P. Callangham and N. H. Martin, Biochem. J. 83, 144, 1962.
28. J. A. Gally and G. M. Edelman, Biochem. Biophys. Acta 94, 175, 1966.
29. Ketskeméty I., Az oldatok fluoreszcenciájának fizikai alapjai, különös tekintettel a fluoreszcencia jellemzők meghatározására és az ezek közötti kapcsolatokra. Doktori értekezés, Szeged, 1963.
30. Dombi J., Lumineszkáló keverékoldatokban lejátszódó energiaátadási folyamatokról. Kandidátusi értekezés, Szeged, 1967.
31. Szalay L., Oldatok fluoreszcenciájának polárosságáról. MTESZ Évkönyv, Szeged, 1964, 111—131. old.
32. F. Perrin, J. Phys. 7, 390, 1926.
33. F. Perrin, Ann. Phys. 12, 169, 1929.
34. V. L. Levshin, Z. Physik 26, 276, 1924.
35. F. Perrin, J. Phys. Rad. 5, 497, 1934.
36. R. Memming, Z. Phys. Chem. 28, 168, 1961.
37. F. H. Chodhury and P. Johnson, Biochem. Biophys. Acta 66, 218, 1963.
38. R. F. Steiner and Edelhoch, J. Am. Chem. Soc. 84, 2139, 1962.
39. N. M. Green, Biochem. J. 92, 160, 1964.
40. R. F. Steiner and A. Mc Alister, J. Polymer Sci. 24, 105, 1957.
41. M. Winkler, Biochim. Biophys. Acta 102, 459, 1965.
42. A. Budó, I. Ketskeméty, Acta Phys. Hung. 14, 167, 1962.
43. L. Gáti, L. Szalay, Acta Phys. et Chem. Szeged, 4, 90, 1958.
44. A. Jabłoński, On luminescence of organic and inorganic materials, H. P. Kallman and G. M. Spruch EOS. Wiley, New York 1962. pp. 110—114.
45. I. Ketskeméty, L. Kozma, Acta Phys. Acad. Sci. Hung. 29, 4, 331, 1970.
46. Z. Várkonyi, K. Kovács, Acta Biochem. et Biophys 7, 89, 1972.
47. W. D. Mc Clure and Edelman, Biochemistry 5, 1908, 1965.
48. L. Kozma, L. Szalay, I. Hevesi, Acta Phys. et Chem. Szeged, 10, 67, 1964.

MEGJEGYZÉSEK A JELENKORI HULLÁMMECHANIKÁHOZ*

HAAS ANDRÁS

Méréstechnikai Központi Kutató Laboratórium, Budapest

1. A jelenkori hullámmechanika problémái

A jelenkori hullámmechanika és a ψ hullám valószínűségi értelmezése olyan kiváló fizikusok, mint *Einstein* és *de Broglie* kritikáit és kétkedését vonták maguk után [1].

A kritika nem a leírás valószínűségi jellegére vonatkozik, melyről a kritizálók is elismerték, hogy teljesítőképességén belül jól ad számot a jelenségekről, hanem arra a körülményre, hogy ez a célravezető leírás inkább eltakarja, mint megvilágítja magukat a kétségkívül összetett jelenségeket, melyeket épp úgy nem lehet a leírásukkal azonosítani, mint egy személyt és a benne zajló fizikai folyamatokat a személyről készült precíz fényképpel.

Neumann János is kétségkívül igen nagy matematikai precizitással megmutatta, hogy a ψ hullám valószínűségi értelmezésén kívül nincs más lehetőség és hogy a ψ hullámnak leírására rejtett paraméterek nincsenek.

A ψ hullámban haladó feltételezett szingularitás hullám-csomaggal történő leírása sem kielégítő a hullám-csomag szétesése miatt. *De Broglie* pályája második szakaszában megkísérelt visszatérni egy nem lineáris elmélet keretében egy olyan hullámcsomaghoz, melyet nem a lineáris elmélet ψ hulláma, hanem egy további u hullám ír le [1, 2].

Így a ψ hullám Schrödinger-egyenlete mellé egy nem lineáris u hullámegyenlet kerül, mely a ψ hullámban haladó szingularitást hivatott leírni. Az u hullám által determinisztikusan leírt hullámcsomag nem esik szét, mert a leíró egyenlet nem lineáris és erre, mint ezt *de Broglie* is kifejti, [1] *Neumann* megfontolásai sem vonatkoznak. *De Broglie* u hullámmal kapcsolatos nehézségei az u és ψ hullám közti kapcsolat értelmezéséből és a féligáteresztő tükrökön való áteresztett és reflektált hullámrészekben terjedő u hullám szinguláris részének pl. fény esetén a foton lokalizálásából adódtak [1, 2].

Ha ugyanis az u hullám szingularitása pl. egy foton a féligáteresztő tükrön átment, akkor a reflektált hullámban ez a foton nem lehet bent. Feltételezve, hogy a fény annyira le van gyengítve, hogy egy véges időtartam alatt csak egy foton lép kölcsönhatásba a tükrökkel, úgy a tükrökkel kettéosztott fény u hullám tartalmának és interferencia tulajdonságának meg kellene változni, holott a tapasztalat szerint a kettéosztott fényt újra összehozva a fény interferenciaképes marad. Ez azt jelenti, hogy a kettéosztott fény tulajdonságai nem változnak meg, vagy hogy az u hullám valahogy rejtélyesen regenerálódik.

* Érkezett 1972. jún. 6.

Ez óvja meg attól, hogy több tükrön áthaladás után „előregedjék”. Amennyiben helyt adunk annak a nézetnek, hogy a precíz valószínűségi leírás nem azonos a fizikai jelenséggel, amely a leírásnál sokkal gazdagabb fizikai tartalommal rendelkezik, úgy meg kell kísérelni annak vizsgálatát, hogy mi ez a tartalom és hogy ez miért maradt rejtve.

De Broglie, Hamilton [3] munkája nyomán a de Broglie-hullámhosszt $\lambda = h/p_k$; $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ alapján állapította meg, ahol $L = T - U$ Lagrange-függényt elsősorban mechanikai analóg megfontolásokból határozták meg, ill. bővítették ki elektrosztatikus és kvantumpotenciál tagokkal [2, 6].

2. A mechanikai analógia elégtelensége

Kérdezhető, hogy jogos-e elvárni a mechanikai analógiáktól, hogy olyan bonyolult jelenségekről, mint amilyenek a fény- és anyaghullámok teljes leírást nyújtsanak. A mechanika és még az elektrosztatikával és dinamikával kibővített térelmélet nem az a legszélesebb keret, amibe a fizika jelenségei maradék nélkül beférnek, mert pl. az energiaátalakulásoknál keletkező hőről és irreverzibilitásokról semmit vagy túl keveset mondanak.

A hullámmechanika szemléleti nehézségei mindig a hullám-anyag-kölcsönhatásnál lépnek fel. A kölcsönhatás az anyaggal azonban irreverzibilis kölcsönhatással és végső fokon hő keletkezésével is jár. Ha ad abszurdum pl. sósavban oldódó mozgó elektromosan töltött kondenzátorról van szó, akkor az ott lefolyó jelenségek lefolyása a mechanika és elektrosztatika körében legfeljebb valószínűségi változók bevezetésével volna lehetséges. E jelenség kazuális tárgyaláshoz az impulzus kifejezéséhez azonban irreverzibilis termodinamika szükséges.

A termodinamika energiamérleg-egyenletében a kinetikus és potenciális energia összege *nem* marad meg [4]. Az impulzus kifejezése is más lesz, mint a mechanikában.

3. Általánosított impulzus és az abból adódó hullámhossz

A termodinamikus Lagrange-függvények és a belőlük levezethető általánosított impulzus is összetettebb és hőtani változásokat is tartalmaz. Ha a termodinamikai Lagrange-sűrűségből [5] indulunk ki

$$\mathcal{L} = \rho \dot{s} - \frac{1}{2} \sum_i \sum_k L_{ik} X_i X_k \left[\frac{1}{\text{m}^3} \frac{\text{cal}}{^\circ\text{C}} \right]$$

és mivel az általános termodinamikai impulzussűrűség

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_k} \quad \pi_i = -j_i$$

azaz az általános áramsűrűséggel egyenlő [5].

Az általánosított impulzus és áramsűrűség dimenzió szempontjából a mechanikai impulzussűrűségtől különbözik.

Ha az általánosított λ'_i de Broglie-féle hullámhosszat Lagrange-sűrűségből számított

$$L = \int_{(V)} \mathcal{L} dV$$

Lagrange-függvényből

$$\lambda'_i = \frac{h}{\int_{(V)} \pi_i dV} = \frac{h}{\frac{\partial}{\partial X_k} \left(\int_{(V)} \mathcal{L} dV \right)} = \frac{h}{\int_{(V)} -j_i dV} = \frac{h}{J_i}$$

összefüggést bevezetjük, akkor az általánosított fázissebesség abszolút értéke

$$v'_i = \lambda'_i v = \frac{h v}{J_i}$$

Mivel λ'_i dimenziója nem hosszúság, azért v'_i dimenziója sem lesz m/sec, hanem az általános áramféleségtől függő dimenziójú.

λ'_i helyett λ_i -t úgy kell normálni, hogy λ_i dimenziója (m) legyen. Ezt

$$\lambda_i = h \sqrt{\frac{2}{mh} \frac{\int J_i d\tau}{J_i}} \left[\sqrt{\frac{\text{m}^2 \text{kg sec}}{\text{sec kg}}} \right]$$

biztosítja.

A J_i áramhoz tartozó fázissebesség.

$$v_i = \lambda_i v_i$$

A v_i indexelését a $\frac{dv_i}{d\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)}$ azonos csoportsebesség követeli meg.

Mikrorészecskékénél, ha csak részecske és energia transzportot feltételeznek:

$$J_1 = L_{11} X_1 + L_{12} X_2 \text{ legyen a részecskeáram}$$

$$J_2 = L_{21} X_1 + L_{22} X_2 \text{ legyen az energiaáram}$$

Itt részecskefajtánként kellene a transzportált extenzív jellegű mennyiségek fajtáit rögzíteni és ezekre áramokat felírni.

4. A hullámegyenlet általánosítása

Az általánosított hullámegyenlet

$$\Delta \psi_i = \frac{1}{v_i^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \tau^2}$$

Bevezetve $\psi_i = u_i(x, y, z) e^{-j2\pi \gamma_i \tau}$ hullám-függvényt az általánosított Schrödinger-egyenlet

$$\Delta u_i + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \frac{h J_i}{2 \int J_i d\tau} u_i = 0$$

Például két jellemző transzportmennyiség esetében $i = 1, 2$

Ha $i=n$ független extenzív mennyiség van, ugyanannyi független áram van. Fenntartva ψ valószínűségi értelmezését, úgy $i=n$ független áramhoz i független ψ_i tartozik, melyek egyidejű bekövetkezését $\psi = \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \psi_3 \dots \psi_i \dots \psi_n$ -vel jellemezhetjük.

Az 1-es indexű egyenlet a részecskék mozgását leíró hullámegyenlet, mely szerepét tekintve megfelel a de Broglie-féle u hullámnak.* A 2-es indexű egyenlet az energiatranszport térbeli eloszlását leíró egyenlet, mely szerepét tekintve megfelel a de Broglie-féle kiterjedt ψ hullámnak.

A következőkben a fotonról leegyszerűsítve feltételezzük, hogy csak energia- és részecske-transzporttal jellemezhető. (A valószínűségi transzportban részecskefajtától függően többféle mennyiség is szerepelne, ami J_1 és J_2 mellett további általánosított áramok és általánosított erők bevezetését igényelné.) Akkor a fotonáramot a foton-foton termodinamikai önindukált kölcsönhatásnál fellépő X_1 és a foton-energia kölcsönhatásnál fellépő X_2 erő együttesen hozza létre.

Az energiaáram is az energia-foton kölcsönhatásnál, valamint az energia-energia kölcsönhatásnál fellépő X_1 és X_2 erők hatására keletkezik.

Általánosítva: tehát az anyag- és energiaáramok, valamint a hullámok duális hatás révén keletkeznek. Részecskék energiaáramokat és hullámokat, energiaáramok és hullámok részecskéket indukálnak. Így a dualizmus új, az irreverzibilis termodinamikában gyökeredző megvilágításba kerül.

5. A de Broglie féle tükörkísérlet magyarázata

Az áteresztő tükör és rés kísérleteket termodinamikai transzporteffektusok [7] mintájára kíséreljük magyarázni. Félig áteresztő tükrön átbocsátva az energia és fotonáram átmenő és reflektált része is tartalmaz általában X_1 -től és X_2 erőktől származó áramrészeket. A de Broglie által említett tükörkísérletnél egy foton esetében, ha a foton a tükrön pl. reflektálódik, a tükör után a J_1 fotonáram önindukált része nulla. Bár a fenomenologikus leírás csak nagyszámú részecskére van mennyiségileg értelmezve, olybá vesszük, hogy $L_{11}=0$, hogy egy fotonra a helyzetet minőségileg megmutassuk, amikor is az áteresztő tükrökre való beesés előtt

$$(J_1)_1 = L_{11}X_1 + L_{12}X_2 \text{ fotonáram}$$

$$(J_2)_1 = L_{21}X_1 + L_{22}X_2 \text{ energiaáram}$$

Az áteresztő tükrön átment rész

$$(J_1)_2 = 0 + L_{12}X_2$$

$$(J_2)_2 = t(J_2)_1$$

Az áteresztő tükrön reflektálódott rész

$$(J_1)_3 = L_{11}X_1 + 0$$

$$(J_2)_3 = r(J_2)_1$$

* Megjegyzés: nem tévesztendő u_i -vel, ψ_i modulusával.

Ha a reflektálódott és átment részt az átment résznek át nem eresztő ideális tükrön való reflektálása segítségével újból összehozzuk, úgy

$$(J_1)_2 + (J_1)_3 = L_{11}X_1 + L_{12}X_2 = (J_1)_1$$

$$(J_2)_2 + (J_2)_3 = t(J_2)_1 + r(J_2)_1 = (t+r)(J_2)_1 = (J_2)_1$$

feltételezhetjük, hogy a félig áteresztő tükrök ideális, azaz nem abszorbeál, az $a=0$, vagyis $a+r+t=1$ összefüggésből $r+t=1$.

Tehát azt kapjuk, hogy az összehozott sugarak foton- és energiaáram-összetevői ugyanazok, mint az áteresztő tükrökre való beesés előtt. Az abszorpció a valóságos tükrönél a jelenséget minőségileg nem érinti, csak gyengítőleg hat.

Az áteresztő tükrök után az átment és reflektált rész interferenciaképessége a koherencián belül változatlan.

A kétréses fénytani kísérletek, valamint hullám- és fotonkísérletek is hasonlóképpen magyarázhatók a kereszteffektusokkal. A kétréses kísérletnél keletkező interferenciakép akkor is bekövetkezik, ha csak egy foton van jelen [8].

A foton, bár az egyik résen megy át, a másik résen áthaladó energiaáram kereszteffektusképpen ugyanott fotonáramot indukál ugyanakkor, mikor ennek az áramnak a foton-foton kölcsönhatási része nulla.

Így mindkét résen úgy fotonáram, mint energiaáram is halad át, és az interferencia egy foton esetén is létrejön.

6. Összefoglalás

A fentiekben kísérlet történt a hullámmechanika klasszikus térelméleti alapjainak az általánosabb termodinamikai térelmélettel való helyettesítésére.

A termodinamikai Lagrange-sűrűségből általánosított impulzusok, ill. áramok és ezekhez tartozó fázissebességek, ill. általánosított hullámhosszak vezethetők be.

Az általános áramok és hullámhosszak és hullámegyenletek száma megegyezik a transzportált jellemző extenzív mennyiségek számával. Hogy melyek ezek, az részecskefajtánként külön megfontolást fog igényelni.

A mikrojelenségek részecske-hullám dualitását a részecske-hullám kereszt-effektus szimmetriája magyarázza. Mikrorészecskék által előidézett makroszkopikus jelenségek, mint pl. a fény fenomenológus áramok segítségével jellemezhetők. A makroszkopikus áramok termodinamikai fenomenológiai értelmezése önmagától szükségtelenné teszi, hogy makroszkopikus jelenségeknél, mint pl. rés-kísérleteknél egyetlen mikrorészecske helyzetét és impulzusát mennyiségileg kelljen értelmezni statisztikai vagy valószínűségi elvek alapján.

Az áteresztő tükrös és a kettős rés interferencia jelenségek szemléleti csődjének rejtélye valószínűségi sűrűségek interferenciájának bevezetése nélkül is feloldódik.

IRODALOM

1. *L. de Broglie*: Válogatott tanulmányok, Gondolat, Budapest, 1968.
2. *L. de Broglie*: Non Linear Wave Mechanics. Elsevier Pub. Comp. Amsterdam, 1960.
3. *L. Brillouin*: Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité Masson Paris 1938.
4. *S. R. De Groot*: Non Equilibrium Thermodynamics. North Holland Pub. Comp. Amsterdam 1969.

5. *I. Gyarmati*: Nemegyensúlyi termodinamika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1967.
6. *E. Persico*: Fondamenti della Meccanica atomica, N. Zanichelli 1945 Bologna.
7. *I. Fényes*: Termosztatika és termodinamika. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
8. *L. Jánossy*: Die physikalische Problematik des Teilchen-Wellen-Problems der Quantenmechanik, Annalen d. Physik, *11*, 323, 1953.
9. *I. Kirschner*: Termodinamikai állapotok stabilitása, Magyar Fizikai Folyóirat *17*, 71, 1969.

MODERN NUKLEÁRIS MÉRŐMÓDSZEREK A BIOLÓGIÁBAN*

KESZTHELYI LAJOS

MTA, Központi Fizikai Kutató Intézet, Budapest

A biológiai molekulák sajátosságait hosszú idő óta tanulmányozzák magfizikai módszerekkel. Ezek közül első helyen kell említeni a radioaktív izotópok módszerét, amelynek fontossága ma már teljesen világos. Az izotópos kísérletek lényegében *van—nincs* válaszokat adnak, vagyis arra felelnek, hogy valamilyen típusú atom valamilyen biológiai anyagban, folyamatban megjelenik-e vagy sem.

A magfizika módszereinek a fejlődése oda vezetett, hogy ehhez az egyszerű — jóllehet sokszor perdöntő — válaszhoz képest további új adatokat is tud szolgáltatni a biológiai molekulák szerkezetére, a biológiai folyamatok mechanizmusára vonatkozóan.

Hogy a tárgyalni kívánt módszereket helyükre tudjuk tenni, áttekintjük a molekulák energiaértékeit.

Atomok kötési energiája molekulán belül	kovalens kötés	2—4 eV vagy 50—110 kcal/mól
	hidrogénkötés	0,1—0,3 eV 3—7 kcal/mól
Gerjesztési energiák	van der Waals kötés	0,04—0,08 eV 1—2 kcal/mól
	elektronátmenet	1 eV 25 kcal/mól
	rotáció	0,01—0,1 eV 0,25—2,5 kcal/mól
	vibráció	0,001—0,01 eV 0,025—0,25 kcal/mól
	Összehasonlításul a hőmozgás energiája	0,025 eV 0,5 kcal/mól.

Ezek az energiaszintek, amelyek — kötések szempontjából — a legkülső elektronhéjakban jelentkeznek (a rotáció és a vibráció az atomok egymás közti mozgásában jelenik meg), jellemzik a molekulákat. Több módszer ismeretes meghatározásukra, mégis távol vagyunk teljes ismeretüktől.

A külső elektronok szerkezete — kötésben való részvételük — a legbelső elektronhéjakon és az atommagok sajátágaiban is mérhető változásokat okoz. A belső elektronhéjak energiája 10^{-3} — 10^{-4} résszel megváltozhat. Ezeknek az értékeknek a meghatározására szolgál az ESCA (Electron Spectroscopy for Chemical Analysis) módszer. A módszer lényege az, hogy röntgensugarak kilökik a belső

* Érkezett 1972. aug. 25. Az Akadémiai nagyhétén (1972) elhangzott előadás.

héjakon levő elektronokat, amelyek energiáját a magfizikai mérésekhez kidolgozott nagy precizitású elektronspektrométerrel mérjük.

A külső héjak elektronszerkezete az atommagok alapállapotának és gerjesztett állapotainak az energiáját is megváltoztatja. Három különböző kölcsönhatás okozza a változásokat: *a*) a kötés megváltoztatja a külső elektronok töltésének az értékét az atommag helyén, továbbá az elektronok által keltett *b*) mágneses tér és *c*) elektromos térgradiens hat az atommagok mágneses dipól- és elektromos kvadrupól-nyomatékára (hiperfinom kölcsönhatás). Az energiaváltozás értéke nagyságrendben 10^{-7} — 10^{-10} eV, mérésükre a régen ismert és használt magmágneses és kvadrupól rezonancia módszer mellett (amely csak a *b*) és *c*) effektusokat méri) bizonyos esetekben a Mössbauer-effektus módszere alkalmazható (*a*, *b*, *c* effektusok egyaránt jelentkeznek).

A legújabb idők fejlődése alapján a DNS és a fehérjék félvezető tulajdonságairól; a molekulák sávszerkezetéről szerzünk ismereteket. A sávszerkezet-energia-értékei elektronvolt nagyságrendűek. Természetesnek tűnik a sávszerkezet-vizsgálatokban a pozitron-annihiláció módszerét alkalmazni, amely a szilárdtestfizikában már igen hasznosnak bizonyult. Ilyen jellegű vizsgálatot biológiai anyagon — ismereteink szerint — a Központi Fizikai Kutató Intézetben végeztünk először.

A dolgozat célja a fenti három módszer — ESCA, Mössbauer-effektus, pozitron-annihiláció — rövid ismertetése, néhány irodalomból ismert jellegzetes példa bemutatása, valamint a hazai vizsgálatok kezdeti eredményeinek az ismertetése.

ESCA

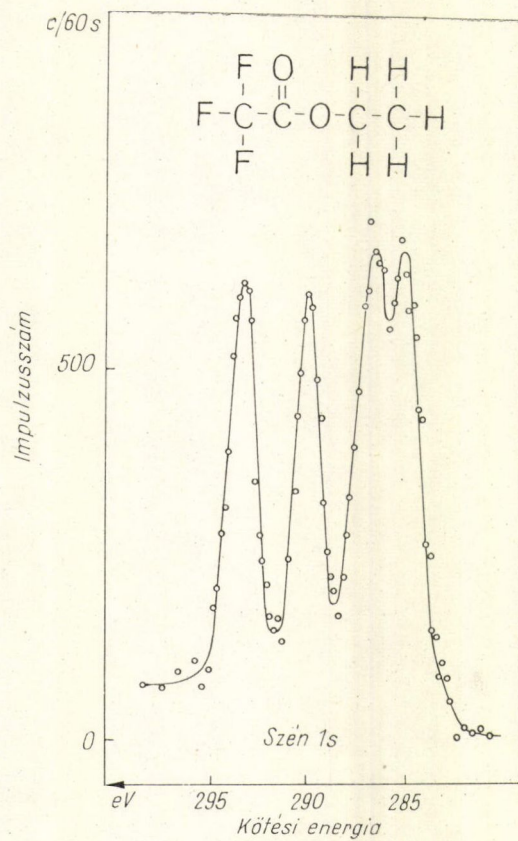
Az ESCA módszer

Az ESCA módszert *Siegbahn* és munkatársai [1] fejlesztették ki az 1966—67. években. A módszer az atommagokból és atomhéjakból kilépő belső konverziós elektronok tanulmányozására kifejlesztett precíziós β -spektrométerek újszerű alkalmazását jelenti. Az elektronspektrumok tanulmányozására kidolgozott spektrométerek nagy energiafelbontó képessége ($\Delta E/E \sim 5 \cdot 10^{-4}$) és energiamérésre való relatív pontossága ($\sim 10^{-5}$) [2] és jó áteresztőképessége (a berendezésbe belépő részecskének mintegy 10^{-3} — 10^{-4} -ed része ad hasznos információt) lehetővé tette, hogy a különböző kémiai kötésekben részt vevő atomok elektronszerkezetének nagyon kicsi megváltozása is könnyen mérhetővé váljék.

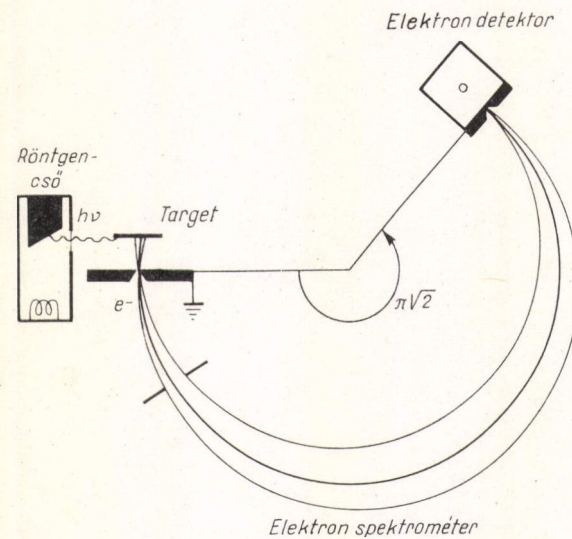
Az elektronok kötési energiájának a tanulmányozása a fotoeffektuson alapul. Röntgenberendezéssel különböző antikatódokból (pl. Mg) karakterisztikus röntgensugárzást keltünk, amely a vizsgálandó mintából

$$E = h\nu - W \quad (1)$$

energiájú elektronokat vált ki. Itt $h\nu$ a karakterisztikus röntgensugárzás energiája, W pedig az elektron kötési energiája. A minta felülete közeléből kilépő elektronok lényegében nem veszítenek energiát, ezért energiaszórásuk a kiváltó röntgensugárzás energiaszórásával összemérhető. (Pl. a Mg K_{α} röntgensugárzás energiája 1251 eV, energiaszórása 0,80 eV.) A precíziós elektronspektrométer E -t méri. A mérőberendezés vázlata az 1. ábrán látható. A 2. ábrán bemutatjuk a szénatomok *1s*-héjból kiváltott elektronjainak az energiaspektrumát etiltrifluoracetát esetén. A molekula



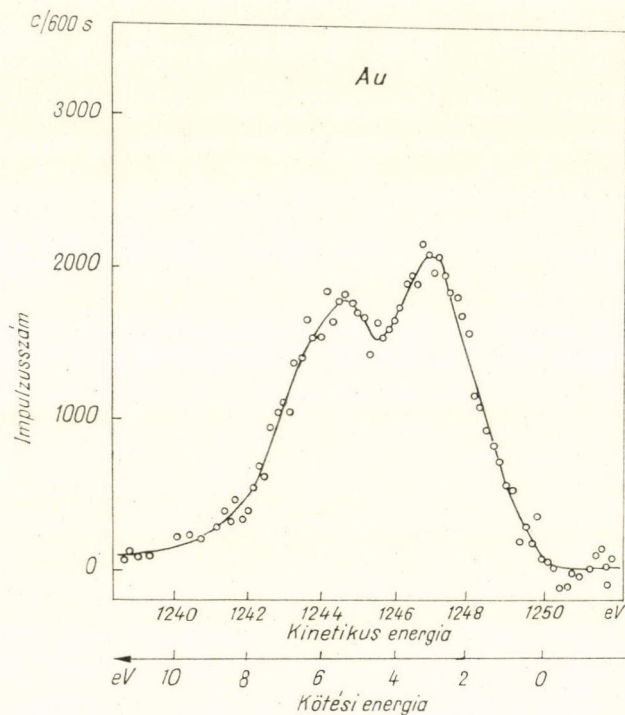
2. ábra. Szénatomok energiaspektruma etiltrifluoracetátban



1. ábra. ESCA berendezés vázlata röntgensugárzás által kiváltott fotoelektronok energiájának a mérésére

4 szénatomja a szerkezeti képlettel összhangban 4 különböző kötési energiát mutat. A C atomok a különböző helyeken különböző valenciaállapotban vannak.

Az ESCA felbontása lehetővé teszi szilárdtestek sávszerkezetének tanulmányozását is. A 3. ábrán bemutatjuk az Au-ból kiváltott nagy energiájú, tehát kis kötési energiájú elektronok energiaspektrumát.

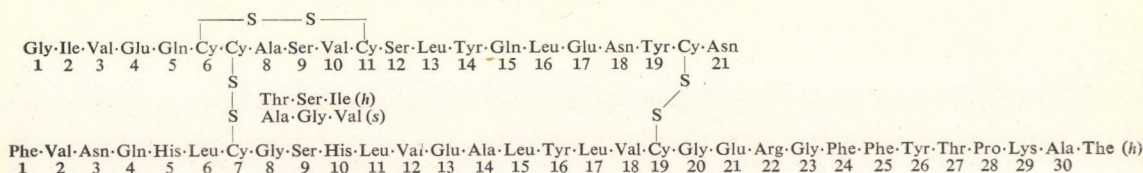


3. ábra. Au vezetési elektronsávjának a spektruma

ESCA alkalmazása a biológiában

A nagy felbontóképesség, a jó érzékenység és az univerzalitás — a periódusos rendszer csaknem minden eleme tanulmányozható segítségével — az ESCA módszert kiválóan alkalmassá teszi biológiai anyagok tanulmányozására. Ez három különböző irányban történhet:

1. A különböző szerkezeti helyeken elhelyezkedő atomok valenciaállapotának meghatározása (valószínűleg csak kisebb molekulák esetén ad felvilágosítást).
2. Speciális funkciót ellátó atomok elektronspektrumának tanulmányozása a funkció különböző fázisában.
3. A biológiai molekulák félvezető szerkezetéről alkotott elképzelések — a sáv-szerkezet — ellenőrzése és mérése.



4. ábra. Az inzulin szerkezeti képlete

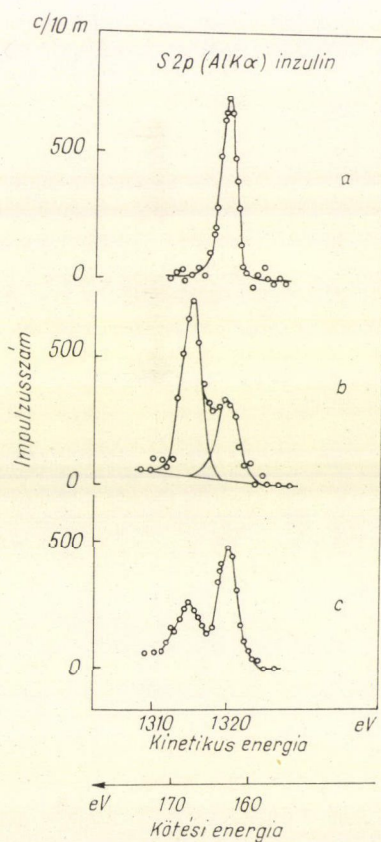
Egy példa a 2. pontra [3]: Az inzulinmolekula 51 aminosavból áll (4. ábra), amelyben 3 diszulfid híd van az ábra szerinti elhelyezésben. A hidak cistein molekulákat kötnék össze. A kén $2p$ elektronjainak energiaspektruma (Al K_{α} sugárzásával kiváltva) az 5. ábrán látható az inzulin nem oxidált, oxidált és részlegesen oxidált állapotában. Látható, hogy nem oxidált állapotban egy keskeny csúcs van, összhangban azzal, hogy a 3 diszulfidlánc karaktere azonos. Oxidált állapotban 2 csúcsot találunk 2:1 intenzitásban, amely azt mutatja, hogy a kén oxidációja szelektív, a láncok közti kénatomok oxidálódnak, az A láncban levő kénatom nem.

Az ESCA módszer alkalmazása még nem terjedt el széles körben biológiailag aktív molekulák tanulmányozására. Ez az oka annak, hogy az 1. és 3. pontban vázolt alkalmazásra nem található példa az irodalomban.

A Mössbauer-effektus alkalmazása

A Mössbauer-effektus

Egyes atommagok alacsonyan fekvő gerjesztett állapotainak a természetes energiabizonytalansága nagyon kicsi, pl. a ^{57}Fe mag $14,4 \text{ keV}$ energiájú nívója esetén ez $\sim 4 \cdot 10^{-9} \text{ eV}$. A Mössbauer-effektusnak köszönhető, hogy γ -sugaraknak az atommagokban való rezonancia abszorpciója révén az atommagállapotok energiájának ilyen rendkívül kis megváltozását ($\sim 10^{-13}$ -ad részét) meg lehet mérni. A rezonanciába való beletalálás legegyszerűbb módja azt a sugárzást felhasználni egy magnívó gerjesztésére, amelyet a mag ugyanarról a nívóról bocsát ki. A γ -sugarak rezonancia abszorpcióját azonban két ok miatt nehéz megmérni: az egyik az impulzusmegmaradás tétele, amely szerint a γ -sugár a magból való kilépésekor és belépésekor visszalöki az atommagot, ezzel energiát veszít, amely lényegesen nagyobb ($2 \times 10^{-3} \text{ eV}$

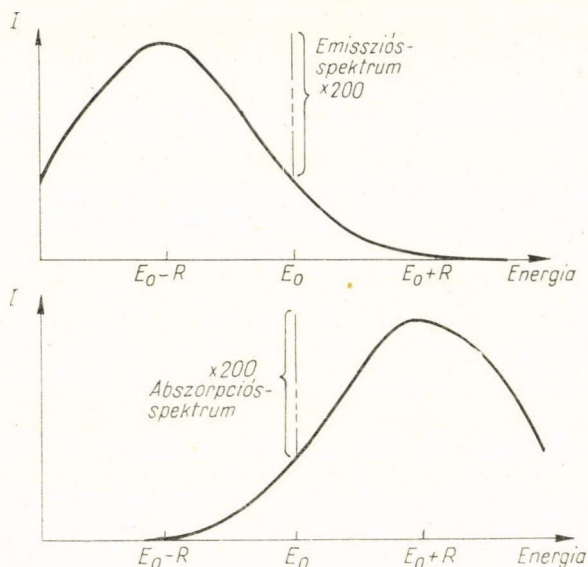


5. ábra. A kén $2p$ elektronjainak az energiaspektruma a) nem oxidált, b) oxidált és c) részben oxidált inzulinban

^{57}Fe esetén), mint a természetes vonalszélesség. A másik a hőmozgás, amely a nívó energiáját szétkeni (6. ábra). Mössbauer felfedezésének a lényege az volt (1958), hogy szilárd testekben a visszalökést az atomhoz kapcsolt egész anyag veszi át, amelynek energiát már nem lehet átadni és véges valószínűsége van annak, hogy a hőmozgás sem változtatja meg a γ -sugárzás energiáját. A Mössbauer-effektus bekövetkezésének véges valószínűsége van

$$f = e^{-\langle x^2 \rangle / \lambda^2} \quad (2)$$

ahol $\langle x^2 \rangle$ az atomok hőmérsékleti elmozdulásai négyzetének az átlaga, λ a γ -sugárzás hullámhossza/ 2π . Ebből látható, hogy a Mössbauer-effektust alacsony hőmérsék-



6. ábra. Emissziós és abszorpció nívók γ -sugarak atommagokon való rezonancia szórása esetén.

leten ($\langle x^2 \rangle$ kicsi) és kis γ -energián (λ nagy) előnyös végezni. Biológiai anyagok esetében praktikusán csak a ^{57}Fe Mössbauer-mag jön számításba, ezért a továbbiakban tárgyalásunkat a ^{57}Fe esetre korlátozzuk.

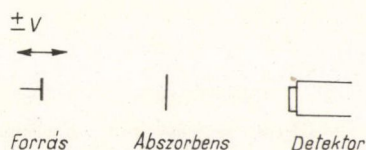
Mössbauer-effektus mérése

A Mössbauer-effektus mérése viszonylag egyszerű. Az ^{57}Fe esetében ^{57}Co radioaktív forrás elektronbefogással ^{57}Fe -vé alakul át, amely a 14,4 keV-es γ -sugárzást kibocsátja. Alkalmas anyagba (pl. krómba) diffundáltatott ^{57}Co esetén $f \approx 0,7-0,8$ szobahőmérsékleten, a kibocsátott γ -sugárzás vonalszélessége általában a természetes vonalszélességgel egyezik meg és mágneses, elektromos kölcsönhatás nem lép fel. A vizsgálandó anyagot abszorbensként használjuk. A 14,4 keV nívó az abszorbensben a mag környezetének hatására felhasadhat több vonalra, amelyek energiában $\sim 10^{-8}$ eV-ra vannak egymástól. A vonalak száma, egymáshoz viszonyított távolsága, szélessége és intenzitása — együttesen a Mössbauer-spektrum — tar-

talmazza azt az információt, amelyet ez a mérőmódszernyújt a Fe atomok környezetének megismerésére.

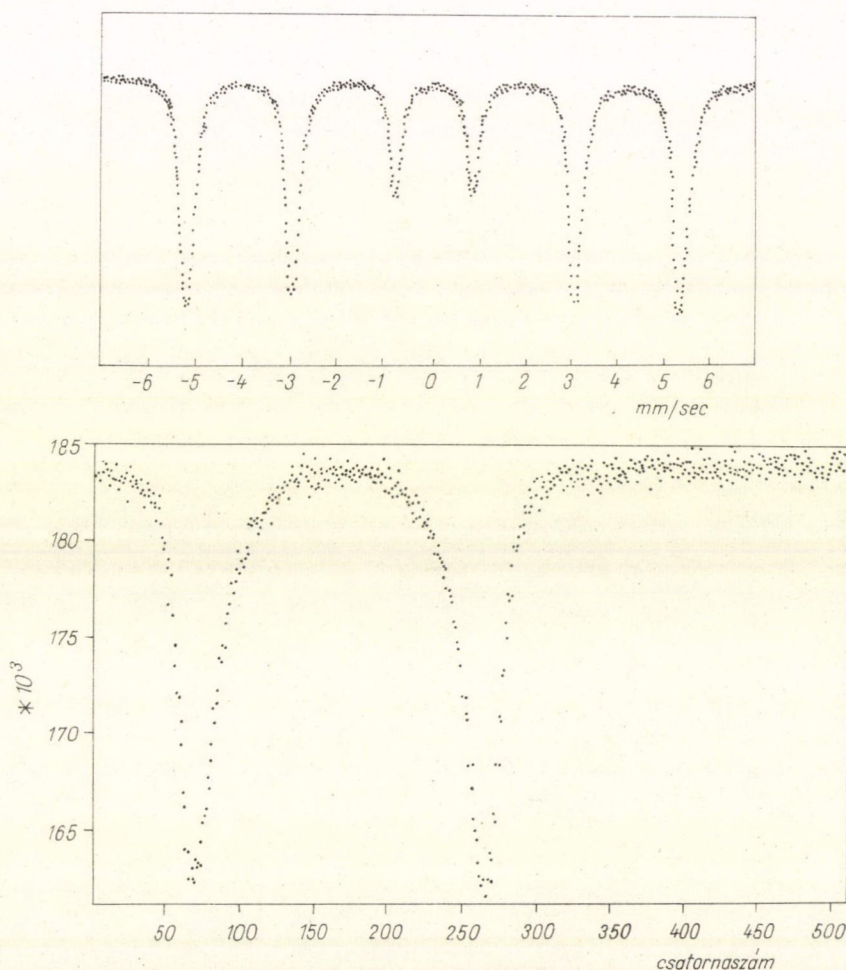
A spektrum tanulmányozása céljából a forrás energiáját a Doppler-effektus segítségével változtatjuk. A Doppler-effektus képlete

$$h\nu = h\nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right), \quad (3)$$



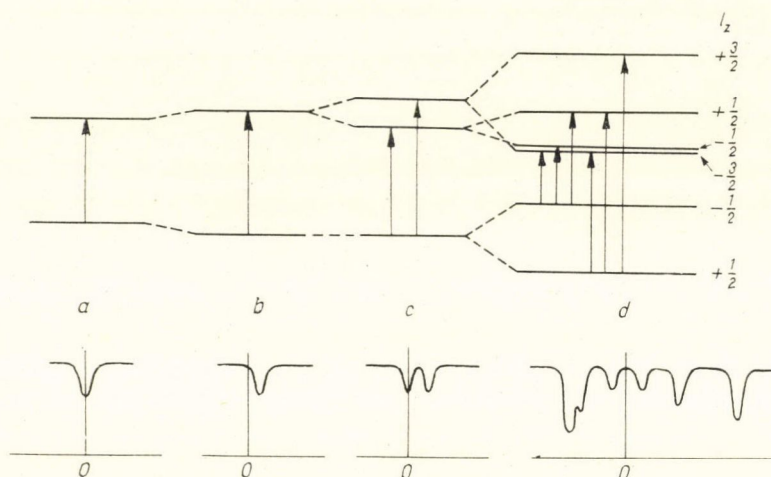
7. ábra. Mössbauer-effektus mérésére szolgáló berendezés vázlata

ahol $h\nu_0$ a γ -sugárzás eredeti energiája, v a forrás és abszorber közötti relatív sebesség, c a fénysebesség. A forrás v sebességét változtatva, mérjük az abszorberben átjutó γ -intenzitást (7. ábra). A 8. ábrán bemutatjuk egy egyszerű mágneses és



8. ábra. Mágneses felhasadás és quadrupol felhasadás Mössbauer-spektruma

kvadrupol felhasadást mutató anyag Mössbauer-spektrumát. v a forrás sebessége, látható, hogy 7—8 mm/sec sebesség elegendő az egész spektrum átfogásához. A ma használatos mérőberendezések a spektrumokat teljesen automatikusan mérik.



9. ábra. Egyszerű Mössbauer-spektrumok értelmezése a) ^{57}Fe emissziós képe Cr-ba diffundált forrás esetében, b) egyvonalas abszorbens (pl. rozsdamentes acél), csak izomér eltolódás van, c) izomér eltolódás és kvadrupol felhasadás együttes hatása, d) izomér eltolódás és koaxiális mágneses és kvadrupol felhasadás együttes hatása. A nyilak a lehetséges γ -átmeneteket jelzik

Izomér eltolódás

Az ^{57}Fe atommag alap- és gerjesztett állapota energiájának különböző okokból való megváltozását a 9. ábra mutatja be. Az *izomér eltolódást* a következőképpen érthetjük meg: az atomi elektronok (az s elektronok, amelyeknek véges sűrűsége van az atommag helyén) ($|\psi_s(0)|^2 \neq 0$) az atommag nívóival kölcsönhatva azok energiáját megváltoztatják. A változás $\Delta E \approx R^2 |\psi_s(0)|^2$ -tel, ahol R a magállapot sugara. Minthogy a 14,4 keV-os gerjesztett állapotban levő mag sugara mintegy 0,1%-kal kisebb, mint az alapállapoté, a nívók nem egyenlő mértékben tolódnak el és az átmenet energiája is megváltozik (9b ábra). A forrás és az abszorbens anyagában, ha azok különbözők, a legkülső elektronok különbözőképpen vesznek részt az atomok és molekulák közötti kötésben, tehát $|\psi_s(0)|^2$ -ben különbségek lesznek. Az izomér eltolódás

$$\delta \approx (R_{\text{gerj}}^2 - R_{\text{alap}}^2) [|\psi_s(0)|_{\text{abs}}^2 - |\psi_s(0)|_{\text{forr}}^2] \quad (4)$$

kifejezéssel arányos. Adott forrás esetén különböző abszorbensnek elektronsűrűsége, vagyis a kötések jellegére következtethetünk az izomér eltolódás értékéből. Általános szabályként mondhatjuk el, hogy az ionos ferro-vegyületekben $6d$ elektron van, ezek árnyékolják az s elektronok hatását a mag helyén, vagyis csökkentik az s elektronok sűrűségét a mag helyén. Az ionos ferri vegyületekben $5d$ elektron van, a csökkentés jóval kisebb. Ebből következik, hogy a ferro-vegyületek esetében

az izomér eltolódás pozitívabb (kb. 0,8–1,5 mm/sec), mint ferri esetben (0–0,5 mm/sec). Ezen az alapon könnyen elválaszthatók a ferro és ferri komponensek. Kötések, különösen erősen kovalens kötések keletkezése azzal jár, hogy a 4s elektronok hullámfüggvénye az alacsonyabban fekvő elfoglalt nívók közé keveredik, és így direkt módon hozzájárulást, növelést jelent az elektronsűrűségben a mag helyén. A részben üres 3d pályák keverednek a ligand pályákkal, ennek következményeképpen nő a 3d elektronok sűrűsége, amely — árnyékolás révén — csökkenti a 4s elektronok sűrűségét. A két ellentétes hatás közül az első dominál, az izomér eltolódás csökken növekvő kovalenciával. Ferro és ferri típusú kovalens vegyületek izomér eltolása azonban tartományba esik (–0,2–+0,5 mm/sec). A nagy különbség eltűnik és ezt annak tulajdoníthatjuk, hogy a ferro-ion 3d elektronjait részben átadja a ligand üres pályáira.

Elektromos kölcsönhatás

Az elektromos kvadrupól kölcsönhatás csak a 14,4 keV energiájú gerjesztett állapotban hat, mert az alapállapotnak nincs kvadrupól nyomatéka. A kvadrupól kölcsönhatás a 3/2 spinű gerjesztett állapotot 2 állapotra hasítja szét (7c ábra), amelyek között az energiakülönbség

$$\Delta E_a = \frac{QV_{zz}}{2} (1 + \eta/3)^{\pm}. \quad (5)$$

Itt Q a gerjesztett állapot kvadrupól nyomatéka, V_{zz} az elektromos térgradiens z irányú komponense, $\eta = \frac{V_{xx} - V_{yy}}{V_{zz}}$ az elektromos térgradiens térbeli aszimmetriáját fejezi ki. Tengelyszimmetrikus térgradiens esetén $\eta = 0$.

V_{zz} értéke, annak hőmérsékletfüggése, η értéke, amelyek a Mössbauer-spektrumokból meghatározhatók, nagyon sok információt tartalmaz a vas és környezete elektronszerkezetére vonatkozóan. Általában két részből tevődik össze: a vasionok környezetében elhelyezkedő töltések aszimmetriája hozhat létre térgradienst az atommag helyén, ez az ún. rács kölcsönhatás. Az okozott ΔE_Q felhasadás általában kicsi (0,2–0,4 mm/sec). A vasion körüli aszimmetrikus töltéeloszlás azonban a vas saját elektronjainak a töltéeloszlását is aszimmetrikussá teheti, amelyek — minthogy az atommaghoz közelebb vannak — lényegesen nagyobb térgradienst hoznak létre. Az ún. valenciajárulék a felhasadáshoz ΔE_Q , 2–3 mm/sec is lehet.

A valencia kölcsönhatás ferri-ionok esetében — ahol a 3d héjban 5 elektron van gömbszimmetrikus elhelyezésben — elhanyagolható, mert a gömbszimmetriát a külső töltések nagyon kicsit tudják csak megbolygatni. Ferro-ionok esetében 6 darab 3d elektron elhelyezkedése már könnyen aszimmetrikussá tehető. ΔE_Q értéke újabb lehetőség a ferro- és ferri-vegyületek megkülönböztetésére. A kovalens kötés — a ligand és centrális ionpályák keveredése miatt — csökkenti a térerősség értékét, tehát a kovalenciára lehet ebből is következtetni.

Mágneses kölcsönhatás

A ^{57}Fe magnak alapállapotában és gerjesztett állapotában egyaránt van mágneses nyomatéka (μ). Mágneses térben (H) az állapotok a Zeemann-effektus következtében felhasadnak

$$\Delta E_z = \mu H m, \quad (6)$$

ahol m a mágneses kvantumszám (7d ábra). A γ -sugárzás átmeneteire vonatkozó kiválasztási szabályok $\Delta m = 0, \pm 1$ változást engednek csak meg, ezért a 6 nívó között 6 különböző átmenet lehetséges a fenti esetben.

A mágneses kölcsönhatások a Fe esetében szintén származhatnak az elektronhéjból. Ennek feltétele, hogy páratlan számú elektron legyen a mag közelében és ezek spinjének iránya ne változzék túl gyorsan (paramágneses relaxáció) a magnívó élettartamához képest. A mágneses kölcsönhatási energia több tagból tevődik össze:

a) Az atommag mágneses nyomatéka és az elektronok pályamozgásából származó nyomaték kölcsönhatása;

b) az atommag mágneses nyomatéka és az elektronok saját mágneses nyomatékának a kölcsönhatása;

c) az ún. Fermi-féle kontakt kölcsönhatás. Az s elektronok, amelyeknek véges sűrűsége van az atommag helyén, mint fent említettük, polarizált állapotban nagy mágneses teret keltenek az atommag helyén. A polarizációt Fe esetében a $3d$ elektronok polarizáltsága hozza létre, az elektrontörzsben levő s elektronok közül a párhuzamos spin irányokat vonza, az ellentéteseket taszítja. Ez az ún. törzspolarizáció dominál a magok helyén levő hiperfinom tér értékének a meghatározásában, a másik két forrás járuléka elég kicsi.

A spin Hamiltonian módszer

Láttuk, hogy a Mössbauer-spektrum jellemző paramétereit az elektronszerkezet határozza meg. A mérési eredmények kiértékelésének a módja az, hogy az elektronszerkezetre vonatkozó elgondolások alapján elméletileg meghatározzuk a lehetséges spektrumokat, amelyekben bizonyos paraméterek vannak és azokat a mérési adatokra fitteljük. Ez a munka számítógép segítségével történik, ha a mért spektrum bonyolult.

Az elméleti elgondolásokat bizonyos ismeretek már irányíthatják. A biológiai anyagokat tanulmányozták szuszeptibilitás mérés, elektronspin rezonancia, mágneses rezonancia módszerével. Az adatok leírására a spin Hamiltonian módszert használták [4], tehát helyes a Mössbauer-adatok értelmezésére is ezt felhasználni. A spin Hamiltonian tulajdonképpen egy közelítő módszer, amely az eredeti komplikáltabb kvantummechanikai problémát egyszerűbbre vezeti vissza. Tegyük fel, hogy egy paramágneses komplex vegyület olyan, hogy n elektronállapot alacsonyan fekszik, energiában elszeparálva a többi nagyobb energiájú állapottól. Azt gondoljuk, hogy az állapotok egy spin multipllett tagjai oly módon, hogy $2S+1 = n$, S -nek nem kell megegyeznie a rendszer valódi spinjével. Egy Hamilton-operátort szerkeszthetünk ezek után, amely spin operátorokat, azok hatványait és szorzatait foglalja magában olyan együtthatókkal, amelyeknek a segítségével az eredeti állapotok sajátenergiáját lehet reprodukálni. A spin Hamiltonian mindig rendelkezik elegendő hajlékonysággal, hogy az átmenetek energiáját, a spektrumokat értelmezni tudjuk.

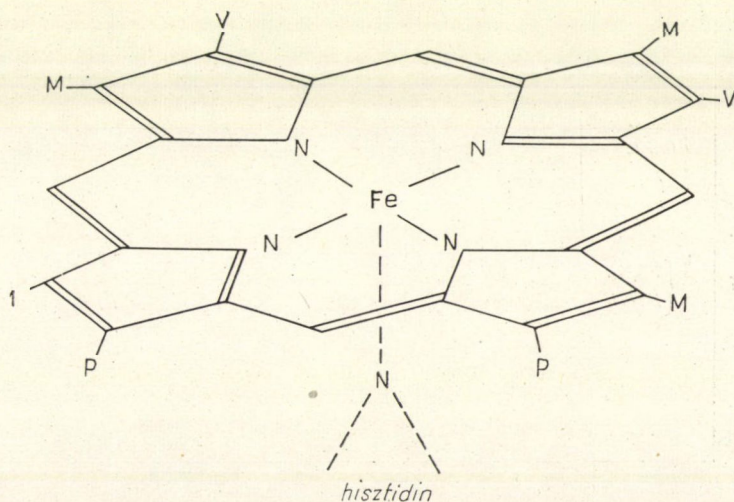
Mössbauer-effektus és biológiai anyagok

Sok, biológiailag fontos fehérjemolekula tartalmaz vasat. Sok esetben éppen a vas ionjainak van specifikus szerepük a molekula funkciójának az ellátásában. Mindezek a molekulák, funkciók tanulmányozhatók a Mössbauer-effektus segítségével. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy ezek a vizsgálatok nem könnyűek. Nehézséget elsősorban az jelent, hogy a biológiai makromolekulákban a vas nagyon kis mennyiségben fordul elő a többi elemhez képest. A természetes vas csak 2%-ban tartalmaz ^{57}Fe -t, a legtöbb méréshez valamilyen módszerrel ^{57}Fe izotópban dúsítani kell a fehérjékben levő vasat. Több biológiai módszert dolgoztak ki a dúsításra [4, 5, 6]. Második nehézség, hogy a méréseket általában alacsony hőmérsékleten kell végezni, nem in vivo körülmények között. Így csak remélni lehet, hogy a molekulák sajátságai megegyeznek, vagy legalábbis hasonlóak az élőlényekben előforduló sajátságokkal.

A legkimerítőbben tanulmányozott biológiai anyagok a hemoproteinek (hemoglobin, mioglobin, citokrom különböző ligandokkal) [4], továbbá ferredoxinok [5], vas-szulfur proteinok [6].

A vasionok a komplex vegyületekben ferro vagy ferri állapotban fordulnak elő. A hemoproteinek esetében a vasionok közvetlen közelében oktaédes elrendezésben hat koordinációs helyet találunk, amelyekből négy, az oktaéder síkjában fekvő helyet N atomok (10. ábra), az egyik csúcsot a globin fehérje (amely a histidin aminosav imidazol gyűrűjével kötődik) foglalja el. A 6. koordinációs hely a vas fölött lehetőséget nyújt különböző atomok kötésére. Pl. a vér hemoglobin ide köti a szállítandó O molekulát, a citokrom c esetében ide egy másik fehérje kötődhet cistein segítségével.

A Mössbauer-effektus a vasionok elektronszerkezetéről ad felvilágosítást. A $3d$ elektronok betöltetlen héjt alkotnak és oktaédes környezet esetén az elektronok 5 különböző energiájú d pályán helyezkedhetnek el. Ezen pályák az okta-



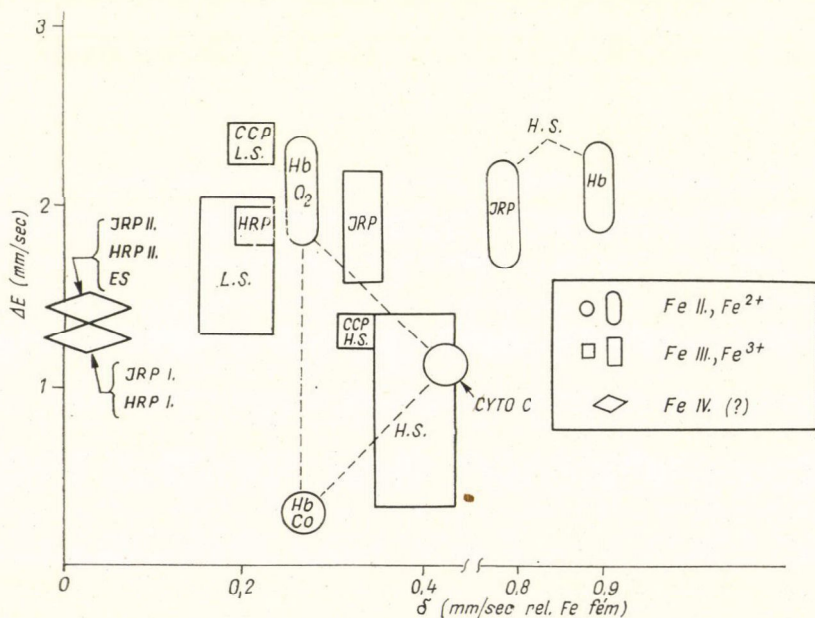
10. ábra. Hem, a vasion közvetlen környezete a hemoproteinekben

édes szimmetria esetére a 11. ábrán vannak feltüntetve. A ferro esetben $3d$ pályán levő hat elektron, a ferri esetben öt elektron alapvetően kétféleképpen helyezkedhet el a nívókon — nagy spinű és kis spinű komplexeket alkotva (11. ábra).

Különböző hemoproteineken elvégzett Mössbauer-spektrummérések eredményeit a 12. ábrán találjuk összefoglalva és 4 különböző típusú komplex szerint

Állapot		Ferro		Ferri	
Spin		2	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
e_g	x^2-y^2	\uparrow		\uparrow	
	$3z^2-r^2$	\uparrow		\uparrow	
t_{2g}	zy	\uparrow	$\uparrow\downarrow$	\uparrow	\uparrow
	zx	\uparrow	$\uparrow\downarrow$	\uparrow	$\uparrow\downarrow$
	xy	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	\uparrow	$\uparrow\downarrow$
		a	b	c	d

11. ábra. A d -elektronok eloszlása a rendelkezésre álló pályákon közelítően oktaédres szimmetria esetén



12. ábra. Izomér eltolódás és kvadrupol felhasadás különböző hemoproteinek esetén

csoportosítva [5]. Vegyük először a nagy spinű ferro anyagokat, ezek között találjuk a redukált hemoglobint, a vénás-vér anyagát nagy izomér eltolódással és nagy kvadrupol felhasadással, ami jellemző erre az anyagra. Egy másik ilyen anyag a redukált japán retek peroxidáz (JRP). Három alacsony spinű ferro anyag is található, köztük a hemoglobinoxid, amely az artériás vérben van és az oxigént szállítja. Első szembetűnő sajátossága a nagy kvadrupol felhasadás 2,2 mm/sec 4,2 °K hőmérsékleten. Ez nagyon nagy kis spinű ferro anyag esetén, ahol az elvileg köbös szimmetriájú $3d$ elektronok nem okozhatnak kvadrupol felhasadást. A második különleges sajátosság a kvadrupol felhasadás erős hőmérsékletfüggése, amely általában elektron állapot gerjesztésével van összefüggésben. A különböző nívók a hőmérséklettől függően populálódnak, és a kvadrupol felhasadás ezek átlaga. Az anyag azonban diamágneses az egész hőmérséklettartományban, tehát a spinpárok nem szakadhattak szét.

Egy lehetséges magyarázat az, hogy az O_2 molekula a hem síkjával párhuzamosan van kötve és az elektrontöltés az yz pályáról elvonódik. Ez helyes előjelet ad a térgadiensre. A szokatlan hőmérsékletfüggés oka lehet az oxigén vagy a fehérje struktúra egy részének a rotációja vagy vibrációja. Ez egyike a sok kísérleti eredménynek, amely arra utal, hogy hőmérséklet által indukált mozgás vagy disztorció jelentősen befolyásolja a vas környezetet a hem fehérjében.

Hemoglobin szénmonoxid ($HbCO$) kvadrupol felhasadása és izomér eltolása „szabályosan” kicsi, a citokrom c izomér eltolódása nagyobb, mint az előbb két hasonló anyagé. Ez valószínűleg annak a következménye, hogy itt az ötödik és hatodik helyen egyaránt fehérje van.

A nagy spinű ferrikomplexek: a hemoglobin, mioglobin, citokrom peroxidáz (CCP) fluoridja 0,7—0,8 mm/sec kvadrupol felhasadást, 0,3—0,4 mm/sec izomér eltolódást adnak. Ugyanezen anyagok cianidjai és azidjai, továbbá a ferri citokrom c alacsony spinű ferrianyagok. Kvadrupol felhasadásuk a közepestől a nagy értékig terjed, amelyet az aszimmetrikus d elektronok konfigurációja alapján várunk is. Az összes ferri hemoprotein mágneses felhasadást mutat alacsony hőmérsékleten, ahol a paramágneses ferriionok relaxációs ideje már elég nagy. Egyre világosabb jelei mutatkoznak annak, hogy ezeken az anyagokon a nagy és kis spinű komponensek egyaránt megjelennek, az arány függ a hőmérséklettől, pH-tól, ionosságtól és valószínűleg más paraméterektől. Ezt a jelenséget már szuszceptibilitás és optikai mérésekben is felismerték, de nem lehetett eldönteni, hogy valamilyen közbenső spinállapot vagy a nagy spinű és kis spinű komplexek keveréke van-e jelen. A Mössbauer-spektrum ebben az esetben döntő jellegű volt, mert a második esetet mutatta világosan. A következtetés tehát, hogy a két forma egyszerre létezik és az egyik forma nem megy át a másikba 10^{-7} sec-on belül (a ^{57}Fe nívó élettartama). Ennek a vizsgálatsorozatnak a továbbfolytatása a citokromok elektronfelvétele és leadása szempontjából — ami lényeges biológiai funkció — fontos lehet.

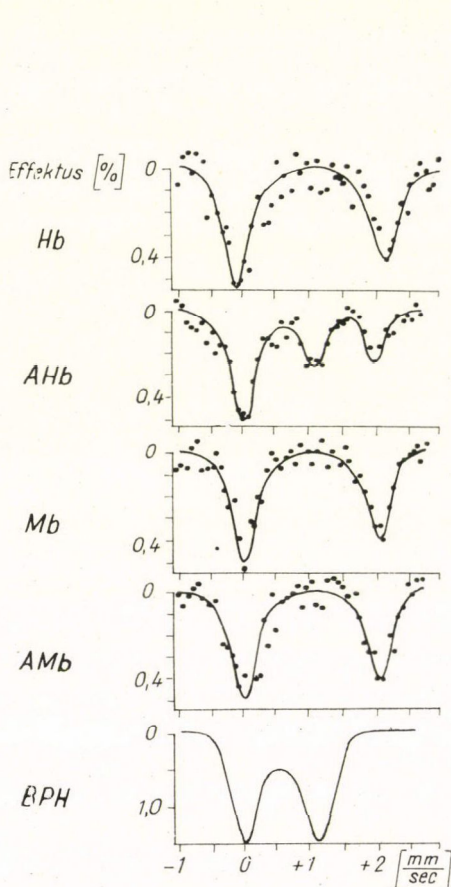
Általában elmondhatjuk, hogy a hemoproteinek paramágneses spektrumának tanulmányozása alacsony hőmérsékleten, külső mágneses tér jelenlétében és anélkül, nagyon sok fizikai jellegű adatot szolgáltat a vas körüli elektronszerkezetre vonatkozóan. Lehetőséget ad arra, hogy a σ és π pályákat megkülönböztessük, meghatározzuk az elektronszféra szimmetriáját, a spinek relaxációját stb. Ezeket a részleteket itt nem tárgyaljuk, a szakirodalom összefoglaló cikkeire utalunk [4, 5].

Az elvégzett vizsgálatokat a következőképpen jellemezhetjük: a biológiailag fontos vasat tartalmazó anyagok Mössbauer-spektrumáról megbízható, alapos

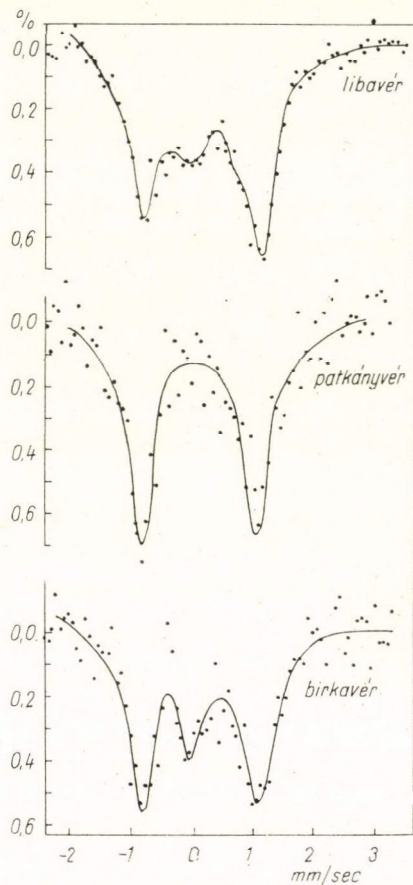
ismereteink vannak. Az ismeretek a fizikai adatokat tartalmazzák, amelyek alapján az anyagok biztonsággal azonosíthatók. A fizikai adatokban bekövetkező változások — amelyek biológiai folyamatok következményei lehetnek — meghatározhatók, a folyamatok értelmezhetők. Természetesen a Mössbauer-spektrum adatait kombinálni kell más mérések adataival. Az utóbbi egy-két évben néhány olyan vizsgálat is volt már, amely biológiailag is érdekesnek tűnő új ismeretet szolgáltatott. Ezek közül ismertetünk néhányat.

Anhidrohemoglobin

Minthogy a hemoglobin egyike a legfontosabb vasat tartalmazó fehérjéknek, és előállítása, ^{57}Fe -ben való dúsítása a vérben viszonylag egyszerű, több vizsgálat



13. ábra. Különböző hemoglobin és mioglobin molekulák Mössbauer-spektruma. Hb-hemoglobin, AHb-anhidrohemoglobin, Mb-mioglobin, AMb-anhidromioglobin, BPH-biszpíridin-2,4 diacetil deuterio hem dimetilester



14. ábra. Liofilizált, ill. patkányvér esetén centrifugált artériás vér Mössbauer-spektrumok

folyt a hemoglobin Mössbauer-spektrumának a meghatározása érdekében. Ez az a fehérje, amelynek a vizsgálatába a Központi Fizikai Kutató Intézetben bekapcsolódtunk, szerény kezdő lépéseket megtéve.

Grant et al. [8] észrevették, hogy a liofilizált anhidrohemoglobin (AHb) és a hemoglobin (Hb) Mössbauer-spektruma különbözik. AHb két különböző, míg Hb egy kvadrupol párt tartalmaz. A munkát *Trautwein et al.* folytatta [9], a mérési eredményeket a 13. ábra tartalmazza. Megfigyelhetjük, hogy a humán AHb két komponenset tartalmaz, amelyek közül az egyiknek adatai lényegében meg-egyeznek a Hb adataival, a másik kvadrupol felhasadása $\sim 1,1$ mm/sec izomér eltolódása 0,51 mm/sec, lényegesen különböző. A mioglobin liofilizálása nem okoz változást spektrumában, és ha AHb-t vízben ismét feloldjuk, az eredeti Hb spektrumot kapjuk vissza. Mioglobin esetén kettős kvadrupol felhasadás nem tapasztalható (13. ábra).

Saját vizsgálatainkban a Gödöllői Agrártudományi Egyetemről egyszerűen liofilizált libavért használtunk mindenféle Hb kivonás nélkül. Méréseinket szobahőmérsékleten végeztük. A mérés eredménye a 14. ábrán látható. A liofilizálás a libavér Hb-jén is ugyanazt a hatást okozta, amit a humán AHb esetében találtak.

A fenti tényekből *Trautwein et al.* a következőket állítják: a hemoglobinban, amely α és β láncokból áll, dehidrálskor konformáció változások következnek be a fehérjestruktúrában. A változások különbözők kell hogy legyenek az α - és β -láncban. Ezek a változások hatnak a vas $3d$ elektronszerkezetére, és pedig különbözőképpen az α - és β -láncban. A mioglobinban nem történik változás a dehidratációkor. Minthogy a Mb peptidlánc sokkal inkább hasonlít a Hb α -láncához, arra lehet következtetni, hogy a változások a Hb β -láncában következnek be. A megváltozott β -lánc Mössbauer-adatai a bispiridin $-2,4$ diacetil deuterio hem dimetileszterhez hasonlítanak (13. ábra), amelyben a 6. helyen a Fe felett N atom van. Valószínűnek tűnik, hogy a β -láncban az a változás következik be, hogy a distale histidin egy N atomot ad át a 6. helyre.

Deferoxamin

Néhány viszonylag kis molekulát sikerült izolálni mikroorganizmusokból, amelyeknek különlegesen nagy affinitásuk van vas iránt. Ezek közül a deferoxamint metanoszulfát formájában vasmérgezés klinikai kezelésére használják (a gyógyszer neve „Desferol”). Az eddigi vizsgálatok problémája az volt, hogy nem lehetett eldönteni, vajon deferoxamin ferro vagy ferri állapotban köti-e meg a vasat, és nem voltak ismeretesek a kötő centrum elektronszerkezetének a paraméterei sem.

A vizsgálandó minta elkészítése ebben az esetben egyszerű volt [10]. ^{57}Fe -ben dúsított vasat kénsavban oldottak és ammoniperszulfáttal Fe^{3+} -á oxidáltak. Kereskedelmi Desferol-t adtak az oldathoz és ezután fagyasztották. Fe^{2+} tanulmányozása esetén nem oxidált oldathoz adtak Desferol-t. A Mössbauer-spektrumok azt mutatták, hogy a Fe^{3+} ionok bekötődtek a desferolba, a Fe^{2+} ionok esetében semmi különbség nem mutatkozott desferol jelenléte és hiánya esetén mért spektrumban. A vizsgálat tehát eldöntötte, hogy a Desferol nem köt meg ferro ionokat.

A Fe^{3+} deferoxamin minták mutatták a kötést és azt, hogy a Fe^{3+} ebben az esetben nagy spinnel kötődik be és a környezete rombikusan torzult.

Enzimek

Néhány enzim vastartalma lehetővé tette működésük tanulmányozását is. A legrészletesebb — bár még nem befejezett — vizsgálat a nitrogénázokra történt [11, 12, 13]. A biológiai vizsgálatok szerint a nitrogénázokat két komponensre lehetett szétbontani. Az egyik protein Fe és Mo atomokat, a másik Fe-t tartalmazott. Előző vizsgálatok kimutatták, hogy a nitrogén fixációhoz ATP molekula és elektron donor is szükséges a két fehérjén kívül. Nagyon kevés direkt eredmény van arra vonatkozóan, hogy mi a Fe szerepe a nitrogénázban.

A kísérletekben a ^{57}Fe -ben dúsított nitrogénáz állítottak elő *K. pneumoniae*-ből. A nitrogénázból kivonták a két fehérjét és az anyagokat különböző kombinációkban tanulmányozták. FeMo és Fe fehérje külön, együtt, ATP nélkül, ATP-vel és szubsztrát nélkül és vele együtt. A [13]-as munkában összesen kb. 100 Mössbauer-spektrumot vettek fel, amelynek az analizéséből a következő kérdésekre lehetett többé-kevésbé biztos választ nyerni: 1. Részt vesz-e a Fe a nitrogén fixációban? 2. Meg lehet-e határozni a Fe atomok környezetét? 3. Lehetséges-e meghatározott Fe atomot a fixációs folyamat valamely meghatározott részéhez hozzárendelni?

A spektrumokban bizonyos vonalak csak akkor jelennek meg, amikor mindkét fehérje, ATP és elektron donor (jelen esetben $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_4$) mind egyszerre vannak jelen. Ekkor kis és nagy spinű ferro ionokra jellemző vonalak jelennek meg. Az 1. kérdésre a válasz — Fe biztosan részt vesz a N fixáció folyamatában. A Mössbauer-adatokból egyedül nem lehet teljesen meghatározni a Fe atomok környezetét. A spektrumok azonban lehetővé teszik bizonyos nagyon valószínű következtetések levonását. Ezek szerint különböző Fe atomok elektronspinjei kölcsönhatásban vannak, ami arra utal, hogy az atomok párban vagy nagyobb csoportokban helyezkednek el, valószínűleg nem távolabb, mint második szomszédok. A helyzet hasonlít a ferredoxin esetéhez, de nem lenne helyes a FeMo fehérjét a ferredoxin valamely fajtájának tekinteni. A válasz a 2. kérdésre tehát az, hogy a Fe atomok párokban vagy nagyobb csoportokban helyezkednek el.

A harmadik kérdésre a válasz kevésbé biztos. A spektrumok alapján meg lehet állapítani, hogy a Fe biztosan részt vesz az elektronoknak az elektron donortól való átvételében és tárolásában. A spektrumok szubsztrát vagy inhibitor jelenlétében változnak. A változás mértéke azonban kicsi és így pontos választ a 3. kérdésre egyelőre nem lehet adni. A vizsgálatokat tovább kell folytatni.

Más vastartalmú enzimek, pl. putidaredoxin [6], rubredoxin [14] Mössbauer-spektrumát is tanulmányozták. Ezek közül különösen a putidaredoxin tanulmányozása nagyon ígéretes, mert ez egy kevert funkciójú oxigenáz, hatása az O_2 molekula atomokká való széthasítása, a légzés folyamatának egyszerű változata. A vizsgálatok célja az, hogy meg lehessen érteni az O_2 molekula hasításának a folyamatát.

Pozitron annihiláció

A pozitron annihiláció módszere

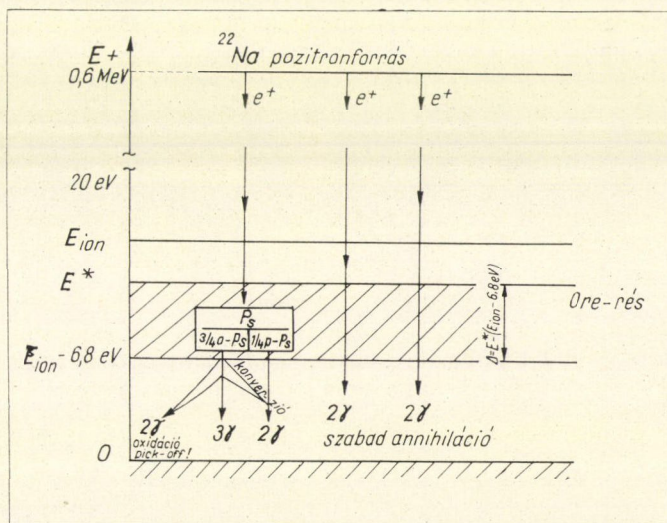
A pozitronok pozitív töltésű elektronok. Radioaktív atommagok bomlásakor, vagy nagy energiájú ($>1,02\text{ MeV}$) γ -sugárzások anyaggal való kölcsönhatásakor keletkeznek, általában nagy energiával. A pozitronok a környező atomokon lefékeződnek és amikor már energiájuk kicsi ($<5\text{--}10\text{ eV}$), elektronokkal lépnek

kölcsönhatásba. Az elektron-pozitron rendszer — a körülményektől függő — rövid idő alatt részecske mivoltában megszűnik, γ -sugárzássá alakul át. Ezt a folyamatot nevezik pozitron annihilációnak, jóllehet egyáltalán nincsen szó az anyag megsemmisüléséről, hanem csupán az anyag egy másik formájává, energiává való átalakulásáról.

Az elektron-pozitron rendszer annihilációja természetesen az energia-, impulzus- és impulzusmegmaradás törvényeinek megfelelően megy végbe. Ezt használjuk ki az anyag szerkezetének a kutatása terén. Az ún. szabad annihiláció — pl. fémekben vezetési elektronokkal találkozó pozitronok — esetében két 0,51 MeV energiájú γ -kvantum keletkezik, amelyek közelítőleg 180° -os irányba repülnek szét. A közelítő 180° éppen az érdekesség, mert 180° -tól való, nagyságrendben tízedfoknyi eltérések fontos információt hordoznak: az eltérések értékéből a 180° körüli szögeloszlásból az elektronok impulzuseloszlását lehet meghatározni, amely a szilárdtestfizika számára fontos ismeret. A pozitron-annihiláció módszerében egyik típusú mérési lehetőség tehát a két γ -kvantum szögkorrelációjának tanulmányozása.

A másik típusú lehetőség a pozitronok „élettartamának” a mérése. A pozitronok nagyon gyorsan (kb. 10^{-12} s alatt) lefékeződnek, a szétsugárzás hatáskeresztmetszete azonban olyan, hogy ehhez képest hosszú ideig még léteznek. A szabad szétsugárzás élettartama $2\text{--}3 \cdot 10^{-10}$ s. A pozitronok lelassulása során bizonyos esetekben egy érdekes rendszer, a pozitron-elektron kötött rendszer, az ún. pozitronium (Ps) képződik. A Ps a H-atomhoz hasonlít, proton helyett pozitron az „atommag”. A Ps atom kötési energiája 6,8 eV, képződhet úgy, hogy az elektron és pozitron spinje párhuzamos (orto Ps) vagy ellentétes (para Ps). Ps képződés esetén $\frac{3}{4}$ rész

orto Ps és $\frac{1}{4}$ rész para Ps állapotban keletkezik. A Ps atom szintén instabil, a para Ps $2\text{--}3 \cdot 10^{-10}$ s, míg az orto Ps sokkal hosszabb, $1,40 \cdot 10^{-7}$ s idő alatt szétsugárzik.



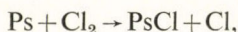
15. ábra. Pozitronok lelassulása és lehetséges sorsa az anyagban

Az orto Ps elektronikus eszközökkel mérhető hosszabb időtartama ad lehetőséget a Ps képződés tanulmányozására. A Ps képződés valószínűsége az anyag elektron-szerkezetével van kapcsolatban, mérése tehát információt ad erről.

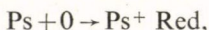
Kövessük végig a pozitronok lehetséges sorsát szabad atomok és molekulák esetén (l. 15. ábra). ^{22}Na radioaktív pozitron forrásból 0,6 MeV max. energiával kilépő pozitronok az atomokkal való ütközés során azokat gerjesztik és ionizálják. Amíg a pozitronok energiája nagyobb, mint az ionizációs energia (E_{ion}), addig nagyon kicsi a Ps képzés valószínűsége. A Ps képzéshez viszont a pozitronnak ki kell szabadítani egy elektront az atomi, a molekuláris kötésből. Ehhez nincs szükség azonban a teljes E_{ion} energiához, mert a Ps képzéskor 6,8 eV kötési energia felszabadul. $E_{\text{ion}} - 6,8$ eV az a pozitron energia tartomány, amelyben Ps képződhet. Ha feltesszük, hogy a pozitronok spektruma lelassulás során egyenletesen tölti ki a $0 - E_{\text{ion}}$ energiatartományt, akkor azt mondhatjuk, hogy a Ps képzés valószínűsége $P = \frac{6,8}{E_{\text{ion}}}$. Ezt az értéket azonban felső határnak tekinthetjük csak, mert a pozitronok az atomok, molekulák gerjesztésével is veszítenek energiát, ennek a valószínűsége nagyobb, mint a Ps képzése. Ha a legalsó gerjesztett állapot energiája E^* , akkor a Ps keltés valószínűségének alsó határa $\frac{E^* - (E_{\text{ion}} - 6,8)}{E^*}$. Vagyis írhatjuk

$$\frac{6,8}{E_{\text{ion}}} > P > \frac{E^* - (E_{\text{ion}} - 6,8)}{E^*}. \quad (7)$$

E határok közé esik a Ps képződés valószínűsége. A Ps képződésre megengedett tartományt Ore résnek nevezik. A többi Ps szabad annihilációban rövid idő alatt szétsugárzik. Ugyanez a sorsa a para Ps atomoknak is. Az orto Ps-ok különböző folyamatokban vehetnek részt, amelyek egyaránt rövidítik a $1,40 \cdot 10^{-7}$ s élettartamokat. Egyrészt konvertálódhatnak para Ps-ná, másrészt a környezetből megfelelő spinű elektront vehetnek fel (pick off) és para Ps-ná alakul, vagy ún. „Wheeler Compound” alakul ki, pl.



vagy egy oxidációs folyamat megy végbe



és újra szabad annihiláció lehetséges.

Az élettartam mérések eredménye exponenciális görbék szuperpozíciója. Általában két összetevőt találunk: a rövid élettartamú görbe a szabad pozitron és para Ps annihilációból származik, a hosszú élettartamú görbe orto Ps annihiláció következménye. Az orto Ps intenzitás aránya (P_0) és élettartama (τ) az az információ, amelyet az élettartam mérések nyújtanak. Minthogy $P = \frac{4}{3} P_0$, a (7) egyenlet érvényességét ellenőrizni lehet olyan molekulák esetében, amelyeknél E_{ion} és E^* ismeretes. Az adatok azt mutatják, hogy a (7) összefüggés közelítően teljesül [15].

Az élettartam mérés módszere viszonylag egyszerű, de fejlett technikát kíván. A ^{22}Na pozitronforrás esetén a pozitronemisszió után közvetlenül (10^{-12} s-on belül)

1,28 MeV energiájú γ -sugárzás lép ki az atommagból. Ez szolgál a $t=0$ idő jelzésére és a pozitron vagy Ps szétsugárzást jelző valamelyik 0,51 MeV energiájú γ -kvantum megjelenése adja a következő időjelet.

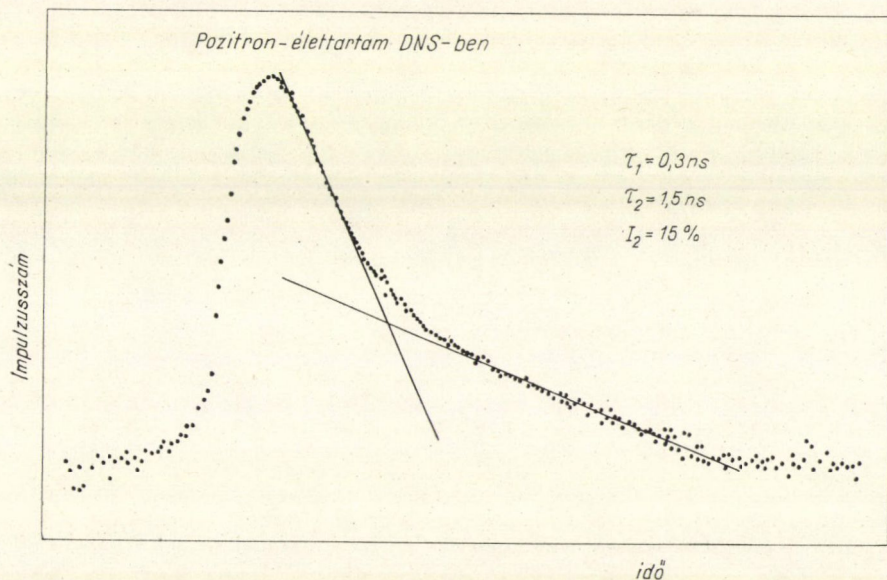
A γ -sugárzásokat gyors jeleket adó szcintillációs számlálókkal regisztráljuk, az időkülönbségeket impulzusamplitúdóvá átalakítva sokcsatornás analizátor méri.

A pozitron élettartam mérés alkalmazása biológiai molekulákra

Az elvégzett konkrét vizsgálatok abból az elgondolásból indultak ki, hogy (7) egyenlet alapján P mérésével bizonyos ismereteket szerezhethetünk E^* és E_{ion} értékére vonatkozóan. Tekintve azt, hogy az egyenlet csak korlátok között adja P értékét és azt, hogy bizonyos folyamatok a Ps képzést csökkentik is, csak összehasonlító méréseket érdemes végezni és mérésekből levont következtetéseket közelítő jellegűnek kell tekinteni.

Az utóbbi években kiterjedt számításokat végeztek a DNS sáv szerkezetének a megismerése céljából [16]. A számításokat periodikus modellre végezték [poliadeninre, poli (A)], amely természetesen eltér a valódi DNS molekuláktól. A sávok esetében E^* energia megfelel a valenciasáv felső és legalsó vezetési sáv alsó határa közti különbségnek. Érdekes problémának látszott tehát megvizsgálni a Ps képződés valószínűségét poliadeninben, amely teljesen periodikus és az elvégzett számítások ebben az esetben minden további nélkül alkalmazhatók és DNS-ben, amelyre a modellszámítások eredményei legfeljebb csak közelítően igazak.

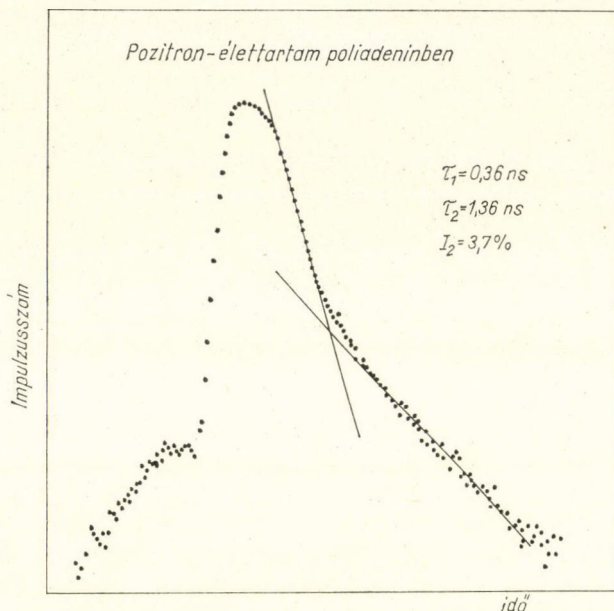
A mérési eredményeket a 16. és 17. ábrán találjuk. Mindkét bomlásgörbe világosan látható módon két komponensre bontható. A számítógépes illesztés eredmé-



16. ábra. Pozitron élettartammérése DNS-ben

nyét az ábrákon tüntettük fel. DNS-ben a Ps képződés valószínűsége lényegesen nagyobb.

A mérések eredményeiből a következő képet alkothatjuk a két anyag elektron-szerkezetének különbségéről: Minthogy a Ps képzés valószínűsége az Ore rés széles-



17. ábra. Pozitron élettartammérése poliadeninben

ségével arányos, a DNS-ben a gerjesztett állapotnak magasabban kell feküdnie, mint a poli(A)-ban. (Azonos ionizációs potenciált tételezünk fel a két anyagra.) Ezt úgy is felfoghatjuk, hogy a gerjesztett nívó szélessége kisebb DNS-ben, összhangban azzal az elméleti várakozással[16], hogy az elektronok kevésbé delokalizáltak, mint poli(A)-ban.

Köszönetet mondok Ladik Jánosnak az értékes diszkuszióért, Kajcsos Zsolt-nak a pozitronélettartam-mérések, Badinka Csabának a Mössbauer-mérések elvégzéséért.

IRODALOM

1. K. Siegbahn, C. Nordling, A. Fahlman, R. Nordberg, K. Hamrin, J. Hedman, G. Johansson, T. Bergmark, S. E. Karlson, I. Lindberg and B. Lindberg. ESCA-Atomic, Molecular and Solid State Structure Studied by Means of Electron Spectroscopy. Nova Acta Regial Soc. Sci. Upsaliensis Ser. W. Vol. 20. 1967.
2. K. Siegbahn and K. Edvardson, Nucl. Phys. 1, 137, 1956
3. K. Siegbahn, C. Nordling, A. Fahlman, R. Nordberg, K. Hamrin, J. Hedman, C. Johansson, T. Bergmark, S. E. Karlson, I. Lindberg and B. Lindberg, Ann. Phys. 3, 281 (1968).
4. G. Lang, Quarterly Reviews of Biophysics, 3, 1, 1970.

5. *G. Lang*, Proc. of the Conference on the Application of the Mössbauer Effect. Tihany, 1969. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971. p. 637.
6. *M. Frauenfelder, I. C. Gunsalus and E. Münck*, University of Urbana, Illinois, Preprint.
7. *A. Trautwein, H. Eicher, A. Mayer, A. Alfsen, M. Waks, J. Rosa and Y. Beuzard*, Jour. Chem. Phys. 53, 963, 1970.
8. *R. W. Grant, I. A. Cape, K. Gonser, L. E. Tapol and P. Salzman*, Biophys. J. 7, 651, 1967.
9. *A. Trautwein, H. Eicher and A. Mayer*, J. Chem. Phys. 52, 2473, 1970.
10. *J. L. Bock and G. Lang*, to appear in Biochimica et Biophysica Acta.
11. *S. V. Novikov, L. A. Syrtsova, G. J. Lichtenstein, V. A. Trukhtanov, V. F. Rachek and V. I. Goldanskii* DAN SSSR, 181, 1170, 1968.
12. *S. V. Novikov, E. N. Frolov, L. Cser, G. I. Lichtenstein, L. A. Syrtsova, V. A. Trukhtanov and V. I. Goldanskii*, DAN SSSR, 196, 390, 1971.
13. *M. Kelly and G. Lang*, Biochim., Biophys. Acta, 223, 86, 1970.
14. *W. D. Phillips, M. Poe, J. F. Weiher, C. C. Macdonald and W. Lovenberg*, Nautre, 227, 574, 1970.
15. *A. T. Steward, L. O. Roellig*, Positron Annihilation, Academic Press, New York, London, 1967.
16. *J. Ladik*, International J. of Qnant. Chem. 4, 307, 1971.

KRISTÁLYOK FIZIKAI TULAJDONSÁGAINAK LEÍRÁSA*

HARTMANN ERVIN

Budapesti Műszaki Egyetem, Kísérleti Fizika Tanszék

TARTALOM

1. Bevezetés
2. Fizikai tulajdonságok mint tenzorok
3. A fizikai tulajdonságok saját (intrinsic) szimmetriái
4. Neumann-elv
5. A fizikai tulajdonság értéke egy adott irányban
6. Magasabbrendű effektusok
7. A fizikai tulajdonságok leírása mátrix jelölésmódban
8. Curie-elv
9. Függelék: Subnyikov-féle antiszimmetria-osztályok

„Mi a tudvágyat szakhoz nem kötök,
Átpillantását vágyjuk az egésznek.”

(Madách)

1. Bevezetés

A legtöbb fizikai szakkönyv az anyagok fizikai tulajdonságainak tárgyalásánál az izotrop anyagból indul ki, és később tér ki általánosításként többé vagy kevésbé a kristályos testek viselkedésére. Ennek a tárgyalásmódnak vitathatatlan előnyei vannak, az egyes tulajdonságoknak külön-külön történő tárgyalása azonban óhatatlanul elfedi azokat az elveket és módszereket, amelyek valamennyi kristályos test legtöbb fizikai tulajdonságának vizsgálatánál általánosan alkalmazhatók. A jelen munka célja, hogy egységes, kristályfizikai szempontból tárgyalja a kristályok fizikai tulajdonságait, összefoglalja és jellemző példákkal illusztrálja azokat az elveket és módszereket, melyek egységesen használhatók a kristályok fizikai tulajdonságainak leírásánál.

Bevezetőül, szemléletes kristályfizikai kép kialakítása végett, vizsgáljuk meg a dielektromos szuszceptibilitás kérdését izotrop, illetve anizotrop közegben.

Izotrop szigetelőkben a dielektromos polarizációkor kialakuló dipólusok az elektromos térrel párhuzamosak (1a ábra). Így az elektromos polarizáció vektora (\vec{P}) és az elektromos térerősség (\vec{E}) közti kapcsolat, a szuszceptibilitás, egyetlen adattal (χ) jellemezhető:

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \quad (1.1)$$

Anizotrop közegben azonban a dielektromos polarizációkor kialakuló dipólusok

* Érkezett 1972. okt. 12.

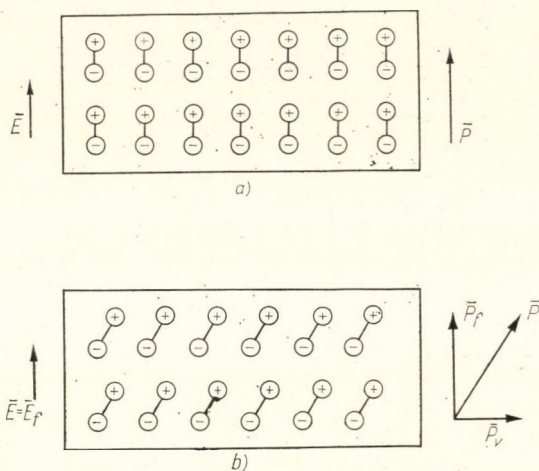
már általában nem lesznek párhuzamosak az elektromos térerősséggel. Az 1b ábrán ábrázoltunk egy egyszerű esetet, amikor is a kialakult dipólok az elektromos térerősséggel párhuzamos síkban, a rajz síkjában, de vele nem azonos irányban helyezkednek el. Ebben az esetben egy függőleges irányú ($\vec{E} = \vec{E}_f$) elektromos térerősség hatására az elektromos polarizáció vektorának (\vec{P}) nemcsak függőleges (\vec{P}_f), hanem

vízszintes (\vec{P}_v) irányú összetevője is lesz. Tehát az 1b ábrán vázolt esetben a függőleges irányú elektromos térerősség és az elektromos polarizáció közti kapcsolat megadására két adatra van szükség ($\chi_{ff}; \chi_{vf}$), ugyanis a két szóban forgó vektor komponensei között a következő két összefüggés áll fenn:

$$\vec{P}_f = \chi_{ff} \vec{E}_f \quad (1.2)$$

$$\vec{P}_v = \chi_{vf} \vec{E}_f$$

Általánosságban és térben vizsgálva a dielektromos polarizáció esetét, azt állapíthatjuk meg, hogy egy x_1, x_2, x_3 koordinátarendszerben az elektromos polarizáció vektorának ($\vec{P} = [P_1, P_2, P_3]$) komponensei és az elektromos térerősség ($\vec{E} = [E_1, E_2, E_3]$) komponensei között a követ-



1. ábra. Dipólusok kialakulása a) izotrop szigetelőben, b) anizotrop szigetelőben

kező összefüggések vannak (a magasabb rendű effektusoktól most eltekintve):

$$P_1 = \chi_{11} E_1 + \chi_{12} E_2 + \chi_{13} E_3$$

$$P_2 = \chi_{21} E_1 + \chi_{22} E_2 + \chi_{23} E_3 \quad (1.3)$$

$$P_3 = \chi_{31} E_1 + \chi_{32} E_2 + \chi_{33} E_3$$

Azaz az elektromos térerősség és az elektromos polarizáció közötti kapcsolat megadására kilenc adat szükséges. Az (1.3) képlet alapján könnyen belátható, hogy ez a kilenc együttható egy másodrendű tenzor komponenseit adják meg, melyek ortogonális koordinátatranszformációnál a tenzoralgebrából ismert módon transzformálódnak (lásd a 4.3 képletet). A dielektromos szuszeptibilitás tehát anizotrop közegben egy másodrendű tenzorral adható meg.

Az (1.3) egyenletrendszer rövidebb alakban:

$$P_i = \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$

A szumma-jelet el is hagyhatjuk, ha Einsteint követve megegyezünk abban, hogy ha ugyanabban a tagban valamely index kétszer fordul elő, akkor ez automatikusan ezen index szerinti szummázást jelent. Tehát fenti (1.4) képletünk eszerint a szabály szerint a következőképpen alakul:

$$P_i = \chi_{ij} E_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.5)$$

A továbbiakban mindig alkalmazni fogjuk az Einstein-féle konvenciót.

2. Fizikai tulajdonságok mint tenzorok

A bevezetőben láttuk, hogy az anizotrop közeg dielektromos szuszceptibilitása másodrendű tenzorral írható le, amely két fizikai vektormennyiség (az elektromos polarizáció vektora és az elektromos térerősség) közötti összefüggést fejezi ki. Hasonlóképp a legtöbb fizikai tulajdonság leírható valamilyen rendű tenzorral, amely két mérhető fizikai tenzormennyiség közötti összefüggést fejezi ki. A skalár nulladrendű tenzor, a vektor elsőrendű tenzor. Általában a kristályfizikában r -ed rendű, r -indexes tenzornak nevezünk egy 3^r komponensből álló mennyiséget, melynek komponensei ortogonális koordináta-transzformációkor az ún. poláris tenzorok esetén a (4.6), ill. az ún. axiális tenzorok esetén a (4.8) egyenletek szerint transzformálódnak.

Ily módon, ha $[B_{ijk\dots n}]$ és $[A_{pqr\dots u}]$ fizikai mennyiségeket reprezentáló tenzorok, a közöttük levő összefüggés általános alakja elsőrendű közelítésben, az Einstein-konvenció figyelembevételével:

$$B_{ijk\dots n} = a_{ijk\dots npqr\dots u} \cdot A_{pqr\dots u} \quad (i, j, k \dots n, p, q, r, \dots u = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

ahol az $[a_{ijk\dots npqr\dots u}]$ tenzor a két fizikai mennyiséget összekapcsoló fizikai tulajdonságot jelöli.

A (2.1) egyenlet tenzoregyenlet, így mindkét oldalán ugyanolyan rendű tenzornak kell állnia. Azaz, ha $[A_{pqr\dots u}]$ egy f -ed rendű tenzor, míg $[B_{ijk\dots n}]$ egy g -ed rendű tenzor, a fizikai tulajdonságot jelölő $[a_{ijk\dots npqr\dots u}]$ tenzornak $f+g$ -ed rendűnek kell lennie, mint ez a tenzoralgebrából következik.

Lássunk az elmondottakra újabb példákat: A sűrűség az anyag adott állapotában a tömeg és a térfogat, tehát két nulladrendű tenzor közti összefüggést fejez ki. Így a sűrűséget is nulladrendű tenzor (skalár) reprezentálja. Elsőrendű tenzorral írható le a kristályok piroelektromos tulajdonsága. A piroelektromos tenzor (lényegében vektor) egy elsőrendű tenzor (az elektromos polarizáció vektora) és egy nulladrendű tenzor (a hőmérséklet) közötti kapcsolatot írja le. Másodrendű tenzorral írható le a dielektromos szuszceptibilitáson kívül az elektromos vezetőképesség, a hővezetőképesség, a hőkitágulás stb. További példákat, közöttük magasabb rendű tenzorokkal leírható tulajdonságokra, az I. táblázat nyújt.

Vannak a kristályoknak olyan anizotróp tulajdonságai is, amelyek közvetlenül tenzorokkal nem írhatók le. Ide sorolhatók: a szakítószilárdság, a folyáshatár, a felületi energia, a növekedési és oldódási sebesség stb. Ezeket a fizikai tulajdonságokat a jelen cikkben nem tárgyaljuk.

I. TÁBLÁZAT. FIZIKAI TULAJDONSÁGOKAT REPREZENTÁLÓ TENZOROK

Tulajdonság, ill. effektus	Tenzor jelölése	Tenzor rendje	Függősen kom- ponensek max. száma	Meghatározó egyenlet	A meghatározó egyenletben szereplő fizikai mennyiségek	
Sűrűség	ϱ	0	1	$\Delta m = \varrho \Delta V$	Δm tömeg	ΔV térfogat
Fajhő	c	0	1	$\Delta S = \frac{c}{T} \Delta T$	ΔS entrópia	T hőmérséklet
Piroelektromos effektus	$[p_i]$	1	3	$\Delta P_i = p_i \Delta T$	$[P_i]$ elektromos polarizáció	T hőmérséklet
Elektrokalorimetrikus effektus	$[p_i]$	1	3	$\Delta S = p_i \Delta E_i$	ΔS entrópia	$[E_i]$ elektromos térerősség
Dielektromos permittivitás	$[\varepsilon_{ij}]$	2	6	$D_i = \varepsilon_{ij} E_j$	$[D_i]$ elektromos eltolódási vektor	$[E_j]$ elektromos térerősség
Mágneses permeabilitás	$[\mu_{ij}]$	2	6	$B_i = \mu_{ij} H_j$	$[B_i]$ mágneses indukció	$[H_j]$ mágneses térerősség
Fajlagos elektromos vezetőképesség	$[\sigma_{ik}]$	2	6	$j_i = \sigma_{ik} E_k$	$[j_i]$ áramsűrűség	$[E_k]$ elektromos térerősség
Fajlagos elektromos ellenállás	$[\varrho_{ik}]$	2	6	$E_i = \varrho_{ik} j_k$	$[E_i]$ elektromos térerősség	$[j_k]$ áramsűrűség
Hővezetőképesség	$[k_{ij}]$	2	6	$h_i = -k_{ij} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$	$[h_i]$ hőáramsűrűség	$\left[\frac{\partial T}{\partial x_j} \right]$ hőmérséklet-gradiens
Hőkitágulás	$[\alpha_{ij}]$	2	6	$\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} \Delta T$	$[\varepsilon_{ij}]$ deformáció	T hőmérséklet
Seebeck-effektus	$[\beta_{ik}]$	2	9	$E_i = -\beta_{ik} \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)$	$[E_i]$ elektromos térerősség	$\left[\frac{\partial T}{\partial x_k} \right]$ hőmérséklet-gradiens
Peltier-effektus	$[\pi_{ik}]$	2	9	$h_i = -\pi_{ik} j_k$	$[h_i]$ hőáramsűrűség	$[j_k]$ áramsűrűség

I. táblázat folytatása

Tulajdonság, ill. effektus	Tenzor jelölése	Tenzor rendje	Független komponensek max. száma	Meghatározó egyenlet	A meghatározó egyenletben szereplő fizikai mennyiségek		
Hall-effektus	$[Q_{ikl}]$	3	9	$E_i = Q_{ikl} j_k H_l$	$[E_i]$ elektromos térerősség	$[j_k]$ áramsűrűség	$[H_l]$ mágneses térerősség
Piezoelektromos effektus	$[d_{ijk}]$	3	18	$P_i = d_{ijk} \sigma_{jk}$	$[P_i]$ elektromos polarizáció	$[\sigma_{jk}]$ mechanikai feszültség	
Reciprok piezoelektromos effektus	$[d_{ijk}]$	3	18	$\varepsilon_{jk} = d_{ijk} E_i$	$[\varepsilon_{jk}]$ deformáció	$[E_i]$ elektromos térerősség	
Piezomágneses effektus	$[q_{ilj}]$	3	18	$M_l = q_{ilj} \sigma_{ij}$	$[M_l]$ mágneses polarizáció	$[\sigma_{ij}]$ mechanikai feszültség	
Elektrooptikai effektus	$[r_{ijk}]$	3	18	$\Delta a_{ij} = r_{ijk} E_k$	$[a_{ij}] = [1/\varepsilon_{ij}]$ dielektromos permittivitás	$[E_k]$ elektromos térerősség	
Másodrendű rugalmassági moduluszok	$[c_{ijkl}]$	4	21	$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}$	$[\sigma_{ij}]$ mechanikai feszültség	$[\varepsilon_{kl}]$ deformáció	
Másodrendű rugalmassági együtthatók	$[s_{ijkl}]$	4	21	$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl}$	$[\varepsilon_{ij}]$ deformáció	$[\sigma_{kl}]$ mechanikai feszültség	
Piezooptikai effektus	$[\pi_{ijkl}]$	4	36	$\Delta a_{ij} = \pi_{ijkl} \sigma_{kl}$	$[a_{ij}] = [1/\varepsilon_{ij}]$ dielektromos permittivitás	$[\sigma_{kl}]$ mechanikai feszültség	
Másodrendű elektrooptikai effektus	$[R_{ijkl}]$	4	36	$\Delta a_{ij} = R_{ijkl} E_k E_l$	$[a_{ij}] = [1/\varepsilon_{ij}]$ dielektromos permittivitás	$[E_k]$ elektromos térerősség	
Elektrosztrikció	$[\gamma_{iljk}]$	4	36	$\varepsilon_{jk} = \gamma_{iljk} E_l E_i$	$[\varepsilon_{jk}]$ deformáció	$[E_i]$ elektromos térerősség	
Harmadrendű rugalmassági moduluszok	$[c_{ijklmn}]$	6	56	$\Phi = \frac{1}{2} c_{ijkl} \cdot \eta_{ij} \cdot \eta_{kl} +$ $+ c_{ijklmn} \cdot \eta_{ij} \cdot \eta_{kl} \cdot \eta_{mn}$	Φ deformációs energia $[c_{ijkl}]$ másodrendű rugalmassági moduluszok	$[\eta_{ij}]$ általánosított deformáció $[\eta_{kl}]$ $[\eta_{mn}]$	

3. A fizikai tulajdonságok saját (intrinsic) szimmetriái

A tenzorok rendje meghatározza a tenzorkomponensek számát, így a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6-od rendű tenzorok komponenseinek száma 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729. Bizonyos szimmetriák azonban a független komponensek számát jelentősen csökkenthetik. Ezek a szimmetriák lehetnek egyrészt magukban a fizikai tulajdonságokban rejlő belső, saját (intrinsic) szimmetriák, másrészt a kristályok szimmetriái, amelyeknek a független komponensek számára gyakorolt hatását a következő fejezetben tárgyaljuk.

Bizonyos esetekben magának a fizikai tulajdonságnak a definíciójából következnek a belső szimmetriák. Például a rugalmasság esetén a feszültség és deformációs tenzorok szimmetrikus voltából következik, hogy a másodrendű rugalmassági modulusok $[c_{ijkl}]$ tenzora (lásd I. táblázat) is szimmetrikus az (ij) , illetve (kl) permutációkkal szemben. Ily módon csökken le a negyedrendű rugalmassági tenzor független komponenseinek száma 81-ről 36-ra. Szintén a deformációs tenzor szimmetrikus voltából következik, hogy a $[d_{ijk}]$ piezoelektromos tenzor (lásd I. táblázat) szimmetrikus a j és k indexek felcserélésére nézve, ami azt jelenti, hogy a piezoelektromos tenzornak maximálisan 18 független komponense lehet.

A fizikai tulajdonságokban rejlő szimmetriákra legtöbbször termodinamikai megfontolásokból következtethetünk. Egyensúlyi tulajdonságok esetén, tehát olyan tulajdonságok esetén, melyek termodinamikailag reverzibilis változásokra vonatkoznak, a tulajdonságok belső, saját szimmetriáit a termodinamikai potenciálok vizsgálatával lehet felfedni. Transzportfolyamatokat jellemző fizikai tulajdonságok esetén a tulajdonság belső szimmetriája az Onsager-elv következménye.

Az egyensúlyi tulajdonságok termodinamikai tárgyalásának illusztrálására egy bonyolultabb példát veszünk, melyből nemcsak egyes tulajdonságokat reprezentáló tenzorok (rugalmassági, elektromos és mágneses szuszceptibilitási tenzorok) szimmetrikus volta, hanem különböző tulajdonságokat reprezentáló tenzoroknak kapcsolata is nyilvánvalóvá válik. A példában egyszerre vizsgáljuk a rugalmas, hő-, elektromos és mágneses effektusokat. Független változóknak választjuk a feszültséget $[\sigma_{kl}]$, az elektromos térerősséget $[E_k]$, a mágneses térerősséget $[H_i]$ és a hőmérsékletet $[T]$, függő változóként fogjuk fel a deformációt $[\varepsilon_{ij}]$, a polarizációt $[P_i]$, a mágnesezettséget $[M_i]$ és az entrópiát $[S]$. Nyilvánvaló, hogy az előbbi mennyiségek differenciáljai között a következő összefüggések állanak fenn:

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_{ij} &= \underbrace{\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}\right)}_1 d\sigma_{kl} + \underbrace{\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial E_k}\right)}_2 dE_k + \underbrace{\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial H_l}\right)}_3 dH_l + \underbrace{\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T}\right)}_4 dT \\
 dP_i &= \underbrace{\left(\frac{\partial P_i}{\partial \sigma_{kl}}\right)}_5 d\sigma_{kl} + \underbrace{\left(\frac{\partial P_i}{\partial E_k}\right)}_6 dE_k + \underbrace{\left(\frac{\partial P_i}{\partial H_l}\right)}_7 dH_l + \underbrace{\left(\frac{\partial P_i}{\partial T}\right)}_8 dT \\
 dM_i &= \underbrace{\left(\frac{\partial M_i}{\partial \sigma_{kl}}\right)}_9 d\sigma_{kl} + \underbrace{\left(\frac{\partial M_i}{\partial E_k}\right)}_{10} dE_k + \underbrace{\left(\frac{\partial M_i}{\partial H_l}\right)}_{11} dH_l + \underbrace{\left(\frac{\partial M_i}{\partial T}\right)}_{12} dT \\
 dS &= \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_{kl}}\right)}_{13} d\sigma_{kl} + \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial E_k}\right)}_{14} dE_k + \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial H_l}\right)}_{15} dH_l + \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)}_{16} dT
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

A parciális deriváltak a következő effektusokat jellemzik:

1. rugalmas alakváltozás
2. reciprok piezoelektromos effektus
3. reciprok piezomágneses effektus
4. hőkitágulás
5. piezoelektromos effektus
6. elektromos polarizáció
7. magnetoelektromos polarizáció
8. piroelektromosság
9. piezomágneses effektus
10. reciprok magnetoelektromos polarizáció
11. mágneses polarizáció
12. piromágnesség
13. piezokalorikus effektus
14. elektrokcalorikus effektus
15. magnetokalorikus effektus
16. hőközlés.

A (3.1) egyenletrendszerben szereplő parciális deriváltak közötti kapcsolatok felismerése céljából foglalkozunk a rendszer Gibbs-féle potenciáljával! Esetünkben a Gibbs-féle potenciál (G):

$$G = U - \sigma_{ij}\epsilon_{ij} - E_k P_k - H_l M_l - TS \quad (3.2)$$

Ha figyelembe vesszük, hogy a belső energia teljes differenciálja a termodinamika I. és II. törvénye alapján:

$$dU = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} + E_k dP_k + H_l dM_l + T dS \quad (3.3)$$

akkor a Gibbs-féle potenciál teljes differenciáljára a következő kifejezést nyerjük:

$$dG = -\epsilon_{ij} d\sigma_{ij} - P_k dE_k - M_l dH_l - S dT \quad (3.4)$$

Ugyanakkor a Gibbs-féle potenciál teljes differenciálját a független változók szerinti parciális deriváltak segítségével is felírhatjuk:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right) d\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial G}{\partial E_k} \right) dE_k + \left(\frac{\partial G}{\partial H_l} \right) dH_l + \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right) dT \quad (3.5)$$

azaz

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right) = -\epsilon_{ij} \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial E_k} \right) = -P_k \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial H_l} \right) = -M_l \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T} \right) = -S \quad (3.9)$$

A Gibbs-féle potenciál második parciális differenciálhányadosait vizsgálva, figyelembe véve, hogy a parciális deriválások sorrendje felcserélhető, arra a megállapításra juthatunk, hogy az alábbi (3.10)–(3.12) egyenletekkel definiált rugalmassági $[s_{ijkl}]$, dielektromos $[\chi_{jk}]$ és diamágneses szuszceptibilitási $[\psi_{kl}]$ tenzorok szimmetrikusak:

$$-\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{ij}}\right) = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = s_{ijkl} = -\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}}\right) = \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = s_{klij} \quad (3.10)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 G}{\partial E_j \partial E_k}\right) = \frac{\partial P_k}{\partial E_j} = \chi_{kj} = -\left(\frac{\partial^2 G}{\partial E_k \partial E_j}\right) = \frac{\partial P_j}{\partial E_k} = \chi_{jk} \quad (3.11)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 G}{\partial H_k \partial H_l}\right) = \frac{\partial M_l}{\partial H_k} = \psi_{lk} = -\left(\frac{\partial^2 G}{\partial H_l \partial H_k}\right) = \frac{\partial M_k}{\partial H_l} = \psi_{kl} \quad (3.12)$$

A második parciális deriváltak vizsgálata azonban nemcsak a fenti tenzorok szimmetrikus voltát mutatja meg, hanem kimutatja azt is, hogy a direkt és a reciprokok effektusokat leíró tenzorok komponensei megegyeznek. Vizsgáljuk meg a következő parciális deriváltakat:

$$-\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial E_k}\right) = \left(\frac{\partial P_k}{\partial \sigma_{ij}}\right) = -\left(\frac{\partial^2 G}{\partial E_k \partial \sigma_{ij}}\right) = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial E_k}\right) = d_{kij} \quad (3.13)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial H_l}\right) = \left(\frac{\partial M_l}{\partial \sigma_{ij}}\right) = -\left(\frac{\partial^2 G}{\partial H_l \partial \sigma_{ij}}\right) = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial H_l}\right) = q_{lij} \quad (3.14)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 G}{\partial E_k \partial H_l}\right) = \left(\frac{\partial M_l}{\partial E_k}\right) = -\left(\frac{\partial^2 G}{\partial H_l \partial E_k}\right) = \left(\frac{\partial P_k}{\partial H_l}\right) = \lambda_{lk} \quad (3.15)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial T}\right) = \left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}}\right) = -\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T \partial \sigma_{ij}}\right) = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T}\right) = \alpha_{ij} \quad (3.16)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T \partial E_k}\right) = \left(\frac{\partial P_k}{\partial T}\right) = -\left(\frac{\partial^2 G}{\partial E_k \partial T}\right) = \left(\frac{\partial S}{\partial E_k}\right) = p_k \quad (3.17)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T \partial H_l}\right) = \left(\frac{\partial M_l}{\partial T}\right) = -\left(\frac{\partial^2 G}{\partial H_l \partial T}\right) = \left(\frac{\partial S}{\partial H_l}\right) = m_l \quad (3.18)$$

A fenti (3.13)–(3.18) egyenletekből következik, hogy egymással megegyeznek:

- a piezoelektromos, ill. a reciprok piezoelektromos effektust leíró tenzorok komponensei [lásd a (3.13) képletet];
- a piezomágneses, ill. a reciprok piezomágneses effektust leíró tenzorok komponensei [lásd a (3.14) képletet];
- a magnetoelektromos polarizációt, ill. a reciprok magnetoelektromos polarizációt leíró tenzorok komponensei [lásd a (3.15) képletet];
- a piezokalorikus effektust, ill. a hőkitágulást leíró tenzorok komponensei [lásd a (3.16) képletet];
- a piroelektromos, ill. az elektrokcalorikus effektust leíró tenzorok komponensei [lásd a (3.17) képletet].
- a piromágneses, ill. a magnetokalorikus effektust leíró tenzorok komponensei [lásd a (3.18) képletet].

A (3.1) egyenleteket integrálva, a fenti megállapítások figyelembevételével, valamint csak az elsőrendű effektusokra korlátozódva, a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= s_{ijkl} \sigma_{kl} + d_{kij} E_k + q_{lij} H_l + \alpha_{ij} \Delta T \\ P_k &= d_{kij} \sigma_{ij} + \chi_{kl} E_l + \lambda_{lk} H_l + p_k \Delta T \\ M_l &= q_{lij} \sigma_{ij} + \lambda_{lk} E_k + \psi_{lm} H_m + m_l \Delta T \\ \Delta S &= \alpha_{ij} \sigma_{ij} + p_k E_k + m_l H_l + \frac{c}{T} \Delta T \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Talán érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy a (3.19) egyenletrendszer $16 = 9 + 3 + 3 + 1$ darab egyenletet reprezentál, és mindegyik egyenlet jobb oldalán 16 tag szerepel, az egy tagban párosan előforduló indexek ugyanis szummázást jelentenek az Einstein-féle konvenció értelmében. Mivel azonban a deformációs tenzor $[\varepsilon_{ij}]$ és a feszültségi tenzor $[\sigma_{kl}]$ szimmetrikus, összesen 13 független egyenlet és 13 független változó szerepel a (3.19) egyenletrendszerben.

Egyes transzportfolyamatokat jellemző tulajdonságok saját szimmetriája, mint említettük, az Onsager-féle reciprocitási relációk következménye. Fontos azonban megjegyezni, hogy az Onsager-féle reciprocitási relációk csak akkor érvényesek, ha a fluxusokat és a hozzájuk tartozó termodinamikai erőket megfelelően választjuk. Egyszerűség kedvéért példaként vizsgáljuk az elektromos vezetés esetét. A $[j_i]$ elektromos áramsűrűséghez tartozó termodinamikai erő $[X_k]$:

$$X_k = \frac{1}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3.20)$$

ahol $\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$ a Φ elektromos potenciál gradiensének k -adik komponense, T a hőmérséklet.

Ekkor a lineáris áramlási törvény a következő alakú:

$$j_i = L_{ik} \frac{1}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (3.21)$$

A fenti egyenlet kifejtett alakban:

$$\begin{aligned} j_1 &= L_{11} \frac{1}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + L_{12} \frac{1}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + L_{13} \frac{1}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \\ j_2 &= L_{21} \frac{1}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + L_{22} \frac{1}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + L_{23} \frac{1}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \\ j_3 &= L_{31} \frac{1}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + L_{32} \frac{1}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + L_{33} \frac{1}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Az Onsager-féle reciprocitási relációk értelmében az L_{ik} vezetési együtthatók szimmetrikusak az indexek felcserélésére nézve, azaz

$$L_{ik} = L_{ki} \quad (3.23)$$

A vezetési együtthatók és a fajlagos vezetőképességi tenzor $[\sigma_{ik}]$ komponensei között könnyű az összefüggést megtalálni. A $[\sigma_{ik}]$ tenzor meghatározó egyenlete (lásd I. táblázat):

$$j_i = \sigma_{ik} E_k = -\sigma_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \quad (3.24)$$

A (3.21) és (3.24) képletek összevetéséből azonnal látható, hogy

$$L_{ik} = -T\sigma_{ik} \quad (3.25)$$

A (3.23) és (3.25) összefüggésből viszont következik, hogy a fajlagos elektromos vezetőképességet leíró tenzor szimmetrikus.

Összetett transzportjelenségek tárgyalásánál a fluxusok és a hozzájuk tartozó termodinamikai erők megfelelő megválasztása esetén az Onsager-féle reciprocitási relációkból nemcsak egyes tenzorok szimmetrikus volta, hanem különböző tulajdonságokat reprezentáló tenzorok közötti kapcsolat is következik. Például a termoelektromos jelenségek tárgyalásánál az Onsager-elvből nemcsak az elektromos vezetőképességi és hővezetőképességi tenzorok szimmetrikus volta, hanem a Seebeck-effektust leíró tenzor $[\beta_{ik}]$ (lásd I. táblázat), és a Peltier-tenzor $[\pi_{ik}]$ összefüggése is következik:

$$T \cdot \beta_{ik} = \pi_{ik} \quad (3.26)$$

Kiegészítésül megjegyezzük, hogy a vezetési együtthatókra vonatkozó összefüggés mágneses tér (\vec{H}) jelenlétében a következőképp alakul:

$$L_{ik}(\vec{H}) = L_{ki}(-\vec{H}) \quad (3.27)$$

4. Neumann-elv

Az előző fejezetben láttuk, hogy a fizikai tulajdonságok belső, saját (intrinsic) szimmetriája csökkenti az őket reprezentáló tenzorok független komponenseinek számát. A tenzorok független komponenseinek további csökkenésére, valamint bizonyos komponensek zérus voltára vezet az a tény, hogy a kristályok szimmetriája hatással van fizikai tulajdonságaik szimmetriájára. Ezt a tényt fejezi ki a múlt században megfogalmazott Neumann-elv, mely szerint *a kristály bármely fizikai tulajdonságában fellelő szimmetria-elemek összességének tartalmaznia kell a kristály pontcsoportjának valamennyi szimmetriaelemét. Azaz:*

$$G_a \supseteq G_k \quad (4.1)$$

ahol G_k a kristály szimmetriacsoportja, G_a a fizikai tulajdonságot reprezentáló tenzor szimmetriacsoportja, a \supset jel az alcsoportnak a csoporthoz való tartozását jelenti. A kristály szimmetriacsoportja alatt általában a kristályformákból adódó 32 pontcsoportot értjük, bizonyos esetekben a nemrég bevezetett 90 mágneses vagy még általánosabban a 122 Subnyikov-féle pontcsoportot (lásd függelék) kell értenünk. A Neumann-elv értelmében tehát, a fizikai tulajdonságot reprezentáló tenzornak invariánsnak kell lennie az adott kristályosztály összes szimmetriaműveletével szemben. Az invariancia-feltétel csökkenti a független tenzorkomponensek szá-

mát, mivel összefüggéseket jelent a tenzorkomponensek között. Hogy ezeket az összefüggéseket felírhatjuk, foglalkoznunk kell a tenzorkomponensek transzformációjával.

Ismeretes, hogy ha egy x_1, x_2, x_3 derékszögű koordináta-rendszerrel egy x'_1, x'_2, x'_3 derékszögű koordináta-rendszerre térünk át, a tenzorkomponensek transzformációs képlete első-, másod-, harmad-, negyedrendű poláris tenzorok esetén:

$$T'_i = a_{ij} T_j \quad (4.2)$$

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl} \quad (4.3)$$

$$T'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} T_{lmn} \quad (4.4)$$

$$T'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{ko} a_{lp} T_{mnop} \quad (4.5)$$

azaz általánosan egy poláris tenzor-transzformáció képlete:

$$T'_{ijk\dots n} = a_{ip} a_{jq} a_{kr} \dots a_{nu} T_{pqr\dots u} \quad (4.6)$$

ahol az a_{ij} iránykoszinuszok az (a_{ij}) mátrix elemei. Az (a_{ij}) mátrix a régi és az új koordináták közötti kapcsolatot adja meg a következő mátrixegyenlet alapján:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Néhány esetben a fizikai tulajdonságot leíró tenzor nem poláris, hanem axiális tenzor. (Ilyen például az optikai aktivitást leíró tenzor.) Axiális tenzorok esetében a transzformációs képlet:

$$T'_{ijk\dots n} = |a_{ij}| a_{ip} a_{jq} a_{kr} \dots a_{nu} T_{pqr\dots u} \quad (4.8)$$

ahol $|a_{ij}|$ az (a_{ij}) mátrixból képzett determináns értéke, mely $(+1)$ -gyel egyenlő, ha a szimmetriaművelet tiszta forgás, és (-1) -gyel egyenlő, ha a szimmetriaművelet a forgáson kívül inverziót is tartalmaz, azaz a szimmetriaművelet során a koordináta-rendszer sodrása megváltozik.

Valamely fizikai tulajdonságot reprezentáló tenzor poláris vagy axiális volta könnyen eldönthető az illető fizikai tulajdonságot definiáló (2.1) egyenlet alapján. Ha a (2.1) egyenletben szereplő $[A_{pqr\dots u}]$, illetve $[B_{ijk\dots n}]$ tenzorok közül csak az egyik axiális, akkor a (2.1) egyenlettel definiált $[a_{ijk\dots n pqr\dots u}]$ tulajdonság-tenzor is axiális, minden más esetben pedig poláris.

Meg kell jegyeznünk, hogy ha a mágneses pontcsoportokat is figyelembe vesszük, akkor a tenzorkomponensek transzformációs tulajdonságait kifejező (4.6), illetve (4.8) egyenletek csak a hagyományos szimmetriaműveletek esetén érvényesek, időinverzióval kombinált hagyományos szimmetriaműveletek, az ún. antiszimmetriaműveletek (lásd: függelék) esetén a (4.6), illetve (4.8) egyenletek, jobb oldalát egy (-1) -es szorzófaktorral kell kiegészíteni, amennyiben a fizikai tulajdonságot definiáló (2.1) egyenletben mágneses vektormennyiségek (mágneses térerősség, mágneses indukció, mágnesezettségi vektor) páratlan számszor szerepelnek. Az ilyen fizikai tulajdonságot leíró tenzort C -tenzornak nevezzük [1]. Ennek a még nem kifarított

tekinthető problémakör részletesebb tárgyalásával kapcsolatban az irodalomra utalunk [1—3].

A (4.6), illetve a (4.8) transzformációs képletek alapján, a fenti megjegyzés figyelembevételével, most már felírhatjuk, hogy adott kristályosztály esetén milyen összefüggések vannak egy poláris, ill. egy axiális tenzor komponensei között. Egy tenzor valamely szimmetriaművelettel szembeni invarianciája ugyanis megköveteli, hogy fennálljon a következő összefüggés:

$$T'_{ijk\dots n} = T_{ijk\dots n} \quad (4.9)$$

Így poláris tenzorok esetén, ha az (a_{ij}) mátrix egy adott kristályosztály valamely hagyományos szimmetriaműveletét írja le, az egyes tenzorkomponenseknek a Neumann-elv értelmében ki kell elégíteniük a következő egyenletet:

$$T_{ijk\dots n} = a_{ip}a_{jq}a_{kr}\dots a_{nu}T_{pqr\dots u} \quad (4.10)$$

Míg az axiális tenzorok invarianciájának feltétele ebben az esetben a (4.8) és (4.9) alapján:

$$T_{ijk\dots n} = |a_{ij}|a_{ip}a_{jq}a_{kr}\dots a_{nu}T_{pqr\dots u} \quad (4.11)$$

Antiszimmetria műveleteknél természetesen a (4.10), ill. (4.11) egyenletekben is fellép egy (-1) -es szorzótényező a fent említett C -tenzorok esetén.

A (4.10), ill. (4.11) egyenletet valamennyi tenzorkomponensre fel kell írunk, tehát a tenzorkomponenseknek ilyen egyenletekből álló egyenletrendszert kell kielégíteniük. Mivel az elmondottak egy adott kristályosztály valamennyi szimmetriaműveletére érvényesek, annyi egyenletrendszer írható fel a tenzorkomponensekre, ahány szimmetriaművelet van az adott kristályosztályban. Valójában azonban nem szükséges az összes szimmetriaműveletre felírni a (4.10), ill. (4.11) típusú egyenletekből álló egyenletrendszert annak érdekében, hogy valamely fizikai tulajdonságot reprezentáló tenzor komponensei közötti összes összefüggést megkapjuk az adott kristályosztály esetén. Ismeretes ugyanis, hogy az egyes kristályosztályok esetén valamennyi szimmetriaművelet néhány alapszimmetriaműveletből következik. Ezen alapszimmetriaműveleteknek megfelelő mátrixok (úgynevezett generátormátrixok) alkalmazása elegendő ahhoz, hogy megkapjuk a kristályosztály szimmetriájának hatását az adott tenzorra. A II—III. táblázatban valamennyi hagyományos kristályosztályra megadunk egy-egy generátor-mátrix sorozatot.

Az elmondottakra, melyek talán első pillanatban bonyolultnak tűnnek, lássunk egy igen egyszerű példát. Vizsgáljuk meg, hogy milyen lesz a piroelektromos tenzor alakja a trigonális rendszerbeli 3 kristályosztályban! Tételezzük fel, hogy a háromfogatású tengely az x_3 koordinátatengelyben helyezkedik el. Mint a II. és III. táblázatból látható, a szimmetriaoperátorhoz tartozó koordinátatranszformáció a következő mátrixszal írható le:

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Figyelembe véve a poláris tenzorok invarianciájának (4.10)-es egyenlettel kifejezett feltételét, az egyes tenzorkomponensekre a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{1}{2}p_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}p_2 \\ p_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}p_1 - \frac{1}{2}p_2 \\ p_3 &= p_3 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ezekből az egyenletekből következik, hogy $p_1 = p_2 = 0$ és csak p_3 lehet zérustól különböző. Azaz a trigonális rendszerbeli 3 kristályosztály piroelektromos tenzorának alakja $p = [0; 0; p_3]$.

Az előbbi példánál követett módszer minden esetben alkalmazható, azonban a magasabb rendű tenzoroknál gyakran hosszadalmas. Jelentősen rövidebb idő alatt juthatunk célhoz (a trigonális és hexagonális osztályokat kivéve) a Fumi [4] által kidolgozott közvetlen ellenőrzéses módszerrel. Ez elvileg nem különbözik az előző módszertől, de gyorsabban vezet eredményre. Fumi módszere azt a tényt használja fel, hogy derékszögű koordinátarendszerekben a poláris tenzorkomponensek hasonlóképp transzformálódnak (lásd 4.6 egyenletet), mint a megfelelő koordináták szorzatai (ügyelve arra, hogy a tényezők sorrendje ne cserélődjön fel, azaz pl. az x_1x_2 szorzat nem tévesztendő össze az x_2x_1 szorzattal).

Fumi módszerére egyszerű példaként vizsgáljuk meg, hogy a monoklinrendszerbeli 2 kristályosztályba tartozó kristályok esetén milyen lesz egy poláris másodrendű tenzornak, mondjuk a dielektromos szuszceptibilitás tenzorának alakja. Tételezzük fel, hogy a kétfogású szimmetriatengely az x_2 tengelyben helyezkedik el, akkor a szimmetriaoperátor hatására a koordináták a következőképp transzformálódnak:

$$x_1 \rightarrow -x_1 \quad x_2 \rightarrow x_2 \quad x_3 \rightarrow -x_3 \quad (4.14)$$

röviden:

$$1 \rightarrow -1 \quad 2 \rightarrow 2 \quad 3 \rightarrow -3 \quad (4.15)$$

ebből következik, hogy:

$$\begin{array}{lll} 11 \rightarrow 11 & 12 \rightarrow -12 & 13 \rightarrow 13 \\ 21 \rightarrow -21 & 22 \rightarrow 22 & 23 \rightarrow -23 \\ 31 \rightarrow 31 & 32 \rightarrow -32 & 33 \rightarrow 33 \end{array} \quad (4.16)$$

azaz

$$\begin{array}{lll} \chi_{11} \rightarrow \chi_{11} & \chi_{12} \rightarrow -\chi_{12} & \chi_{13} \rightarrow \chi_{13} \\ \chi_{21} \rightarrow -\chi_{21} & \chi_{22} \rightarrow \chi_{22} & \chi_{23} \rightarrow -\chi_{23} \\ \chi_{31} \rightarrow \chi_{31} & \chi_{32} \rightarrow -\chi_{32} & \chi_{33} \rightarrow \chi_{33} \end{array} \quad (4.17)$$

Ugyanakkor a Neumann-elvből kifolyólag minden komponensnek önmagába kell átmennie, amiből következik, hogy

$$\begin{array}{ll} \chi_{12} = -\chi_{12} = 0 & \chi_{21} = -\chi_{21} = 0 \\ \chi_{23} = -\chi_{23} = 0 & \chi_{32} = -\chi_{32} = 0 \end{array} \quad (4.18)$$

II. TÁBLÁZAT. A 32 KRISTÁLYOSZTÁLY GENERÁTOR MÁTRIXAI

Kristály- rendszer	Kristályosztály jelölése			Generátor mátrixok (lásd a III. táblázatot)	Szimmetria- műveletek száma	Az x_1, x_2, x_3 kristályfizikai koordinátengelyek elhelyezkedése a szimmetriatengelyekhez képest*
	Nemzetközi	Subnyikov	Schönflies			
Triklin	1	1	C_1	M_0	1	
	$\bar{1}$	$\tilde{2}$	$S_2 = C_i$	M_1	2	
Monoklin	2	2	C_2	M_2	2	
	m	m	$C_{1h} = C_s$	M_3	2	$x_3 \parallel 2$ ill. $\bar{2} (= m)$
	$2/m$	$2:m$	C_{2h}	M_2, M_3	4	
Rombos	222	$2:2$	$V = D_2$	M_4, M_2	4	$x_1 \parallel 2$ ill. $\bar{2}$
	$mm2$	$2 \cdot m$	C_{2v}	M_5, M_2	4	$x_2 \parallel 2$ ill. $\bar{2}$
	mmm	$m \cdot 2:m$	$V_h = D_{2h}$	M_5, M_6, M_3	8	$x_3 \parallel 2$
Tetragonális	4	4	C_4	M_7	4	
	$\bar{4}$	$\tilde{4}$	S_4	M_8	4	
	422	$4:2$	D_4	M_7, M_4	8	$x_1 \parallel 2$ ill. $\bar{2}$
	$4/m$	$4:m$	C_{4h}	M_7, M_3	8	$x_2 \parallel 2$ ill. $\bar{2}$
	$4mm$	$4 \cdot m$	C_{4v}	M_7, M_5	8	$x_3 \parallel 4$ ill. $\bar{4}$
	$\bar{4}2m$	$\tilde{4} \cdot m$	$V_d = D_{2d}$	M_8, M_4	8	
	$4/mmm$	$m \cdot 4:m$	D_{4h}	M_7, M_3, M_5	16	
Trigonális	3	3	C_3	M_9	3	
	$\bar{3}$	$\tilde{6}$	$S_6 = C_{3i}$	M_{10}	6	$x_1 \parallel 2$ ill. $\bar{2}$
	32	$3:2$	D_3	M_9, M_4	6	$x_2 \perp 2$ ill. $\bar{2}$
	$3m$	$3 \cdot m$	C_{3v}	M_9, M_5	6	$x_3 \parallel 3$ ill. $\bar{3}$
	$\bar{3}m$	$\tilde{6} \cdot m$	D_{3d}	M_{10}, M_5	12	

II. táblázat folytatása

Kristályrendszer	Kristályosztály jelölése			Generátor mátrixok (lásd a III. táblázatot)	Szimmetriaműveletek száma	Az x_1, x_2, x_3 kristályfizikai koordinátatengelyek elhelyezkedése a szimmetriatengelyekhez képest*
	Nemzetközi	Subnyikov	Schönflies			
Hexagonális	6	6	C_6	M_{11}	6	
	$\bar{6}$	$3:m$	C_{3h}	M_{12}	6	
	$\bar{6}m2$	$\tilde{3} \cdot m = m \cdot 3:m$	D_{3h}	M_{12}, M_5	12	$x_1 \parallel 2$ ill. $\bar{2}$
	622	$6:2$	D_6	M_{11}, M_4	12	$x_2 \perp 2$ ill. $\bar{2}$
	$6/m$	$6:m$	C_{6h}	M_{11}, M_3	12	$x_3 \parallel 6$ ill. $\bar{6}$
	$6mm$	$6 \cdot m$	C_{6v}	M_{11}, M_5	12	
	$6/mmm$	$m \cdot 6:m$	D_{6h}	M_{11}, M_5, M_3	24	
Köbös	23	$3/2$	T	M_{13}, M_2	12	$x_1 \parallel 2$
	$m\bar{3}$	$\tilde{6}/2$	T_h	M_{14}, M_2	24	$x_2 \parallel 2$
	432	$3/4$	O	M_{13}, M_7	24	$x_3 \parallel 2$
	$\bar{4}3m$	$3/\bar{4}$	T_d	M_{13}, M_8	24	$x_1 \parallel 4$ ill. $\bar{4}$
	$m\bar{3}m$	$\tilde{6}/4$	O_h	M_{14}, M_7	48	$x_2 \parallel 4$ ill. $\bar{4}$
						$x_3 \parallel 4$ ill. $\bar{4}$

* Megjegyzés: A kristályok fizikai tulajdonságainak leírásánál használt ún. kristályfizikai koordinátatengelyek — ellentétben a kristálytani tengelyekkel — a kristályrendszertől függetlenül egymásra mindig merőlegesek.

III. TÁBLÁZAT. GENERÁTOR MÁTRIXOK

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ identitás}$$

$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ inverzió	$M_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ inverzióval kombinált 90°-os forgatás az x_3 tengely körül
$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 180°-os forgatás az x_3 tengely körül	$M_9 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 120°-os forgatás az x_3 tengely körül
$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ tükrözés az $x_1 x_2$ síkon át	$M_{10} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ inverzióval kombinált 120°-os forgatás az x_3 tengely körül
$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 180°-os forgatás az x_1 tengely körül	$M_{11} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 60°-os forgatás az x_3 tengely körül
$M_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tükrözés az $x_2 x_3$ síkon át	$M_{12} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ inverzióval kombinált 60°-os forgatás az x_3 tengely körül
$M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tükrözés az $x_1 x_3$ síkon át	$M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 120°-os forgatás az [111] irány körül
$M_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 90°-os forgatás az x_3 tengely körül	$M_{14} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ inverzióval kombinált 120°-os forgatás az [111] irány körül

IV. TÁBLÁZAT. ELSŐRENDŰ POLÁRIS TENZOR ALAKJA AZ EGYES
KRISTÁLYOSZTÁLYOKBAN

Kristályosztály	Az x_1, x_2, x_3 koordinátatengelyek elhelyezkedése a szimmetriatengelyekhez képest	Tenzor (vektor) alak	Független komponensek száma
1		(p_1, p_2, p_3)	3
m	$x_2 \perp m$	$(p_1, 0, p_3)$	2
2	$x_2 \parallel 2$	$(0, p_2, 0)$	
$mm2$	$x_3 \parallel 2$		
4	$x_3 \parallel 4$		
$4mm$		$(0, 0, p_3)$	1
6	$x_3 \parallel 6$		
$6mm$			
3	$x_3 \parallel 3$		
$3m$			
összes többi	tetszőleges	$(0, 0, 0)$	

V. TÁBLÁZAT. MÁSODRENDŰ SZIMMETRIKUS POLÁRIS TENZOR ALAKJA
AZ EGYES KRISTÁLYRENDSZEREKBEN

Kristályrendszer	Az x_1, x_2, x_3 koordinátatengelyek elhelyezkedése a szimmetriatengelyekhez képest	Tenzor alak	Független komponensek száma
Triklin		$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$	6
Monoklin	$x_2 \parallel 2$ ill. $\bar{2}$	$\begin{bmatrix} T_{11} & 0 & T_{13} \\ 0 & T_{22} & 0 \\ T_{13} & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$	4
Rombos	$x_1 \parallel 2$ $x_2 \parallel 2$ $x_3 \parallel 2$	$\begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$	3
Tetragonális	$x_3 \parallel 4$ ill. $\bar{4}$	$\begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$	2
Hexagonális	$x_3 \parallel 6$ ill. $\bar{6}$		
Trigonális	$x_3 \parallel 3$ ill. $\bar{3}$		
Köbös	tetszőleges	$\begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & T_{11} \end{bmatrix}$	1

Ily módon a monoklinrendszerbeli 2 kristályosztályba tartozó kristály esetén a dielektromos szuszceptibilitási tenzor alakja:

$$\begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & \chi_{13} \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ \chi_{31} & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

A dielektromos szuszceptibilitás esetén a belső, intrinsic szimmetriából adódóan $\chi_{31} = \chi_{13}$, azaz a (4.19) tenzor szimmetrikus.

A IV. és V. táblázatban megadjuk egy elsőrendű, illetve egy szimmetrikus másodrendű tenzor alakját, valamennyi krisztallográfiai osztály esetére. Egyéb tenzoroknak, illetve tenzorkomponensekből képzett mátrixoknak (lásd. 7. fejezetet) az egyes kristályosztálybeli alakja táblázatokba foglalva az irodalomban különböző helyeken megtalálható, pl. [1—2, 5—7].

Az V. táblázattal kapcsolatban meg kell jegyezni, hogy a szimmetrikus másodrendű tenzor a triklin és monoklin rendszerbeli kristályok esetében is olyan, ún. főtengelyes alakra hozható, amelynél a T_{11} , T_{22} , T_{33} komponenseken kívül valamennyi tenzorkomponens zérus. Ebben az esetben azonban meg kell adnunk a fő-tengelyek helyzetét is a krisztallográfiai tengelyekhez képest; ehhez a triklin rendszerben három, a monoklin rendszerben egy adat szükséges.

Befejezésül megemlítiük, hogy a fizikai tulajdonságot leíró tenzorok független komponenseinek meghatározásánál némely esetben az egyszerű geometriai szemlélet is eredményre vezet. Könnyen belátható például, hogy piroelektromos effektus szimmetriacentrumot tartalmazó kristályokban nem léphet fel, azaz ezekre a kristályokra vonatkozóan a piroelektromos tenzor (vektor) valamennyi komponense zérus, $p = [0; 0; 0]$. Ha hőmérsékletváltozás hatására ugyanis az elektromos polarizáció vektora ezekben a kristályokban valamely irányban fellépne, akkor a Neumann-elvből következően a szimmetriacentrum miatt az ellentétes irányban is fel kell lépnie, tehát értéke csak zérus lehet.

5. A fizikai tulajdonság értéke egy adott irányban

Az irodalomban gyakran találunk olyan adatokat, amelyek valamely fizikai tulajdonság adott irányban felvett értékét adják meg. Az alábbiakban két példán, az elektromos vezetőképesség értékének, illetve a Young-modulusz irányfüggésének példáján illusztráljuk, hogy mit értünk valamely fizikai tulajdonság adott irányban vett értékén, illetve milyen kapcsolat áll fenn ezen érték és a megfelelő tenzor komponensei között.

Az elektromos térerősség irányában vett fajlagos vezetőképességen az elektromos térerősséggel párhuzamos áramsűrűség komponens nagyságának (j_{\parallel}) és az elektromos térerősség nagyságának (E) hányadosát, azaz $\frac{j_{\parallel}}{E}$ -ét értjük. Legyenek az elektromos térerősség komponensei $E_i = E n_i$, ahol n_i a térerősség irányába mutató egységvektor (\vec{n}) i -edik komponense. A \vec{j} áramsűrűségnek az \vec{E} -vel párhuzamos komponense tenzorjelölésben:

$$j_{\parallel} = \frac{j_i E_i}{E} \quad (5.1)$$

Következésképp a fajlagos elektromos vezetőképesség a \bar{n} egységvektorral megadott irányban:

$$\sigma_{\bar{n}} = \frac{j_{\parallel}}{E} = \frac{(j_i E_i)}{E^2} = \sigma_{ij} \frac{E_i E_j}{E^2} \quad (5.2)$$

melyből

$$\sigma_{\bar{n}} = \sigma_{ij} \cdot n_i \cdot n_j \quad (5.3)$$

Az (5.3) képlet tehát megadja az elektromos vezetőképesség \bar{n} irányban vett értéke és az elektromos vezetőképességi tenzor komponensei közötti összefüggést. Hasonló összefüggések adják meg kristályos közegben másodrendű tenzorral leírható más fizikai tulajdonságok (pl. hővezetőképesség, dielektromos permittivitás, hőkitágulás) adott irányban felvett értékét is.

Az (5.3) összefüggésnek kétféle alkalmazási lehetősége is van. Az egyik lehetőség az, hogy megmérjük a vezetőképességet különböző (szimmetria szempontjából össze nem kapcsolt) irányokban annyiszor, ahány független komponense van az elektromos vezetőképességi tenzornak és a megmért vezetőképesség értékekből, valamint a hozzájuk tartozó iránykoszinuszokból kiszámítjuk az egyes tenzorkomponenseket. Az (5.3) képletünk második alkalmazási lehetősége ennek fordítottja: a már ismert tenzorkomponensek segítségével bármelyik irányra vonatkozólag ki tudjuk számítani a vezetőképesség értékét.

Az (5.3) képlet jelentősen egyszerűsödik a tetragonális, trigonális és hexagonális rendszerbe tartozó kristályok esetén, amelyeknél — mint az V. táblázatból látható — csak két független tenzorkomponens van:

$$\sigma_{\bar{n}} = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 = \sigma_{11} (1 - n_3^2) + \sigma_{33} n_3^2 \quad (5.4)$$

Ha az \bar{n} vektornak az x_3 tengellyel, azaz a kristály főtengelyével bezárt szögét θ -val jelöljük, a következő képletet kapjuk:

$$\sigma_{\bar{n}} = \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{33} \cos^2 \theta \quad (5.5)$$

A σ_{33} komponenst σ_{\parallel} -val, a σ_{11} komponenst σ_{\perp} -sel szokták gyakran jelölni, utalva arra, hogy ezek megadják a kristály főtengelyével (azaz a három-, négy-, vagy hatfogású tengellyel) párhuzamosan, illetve arra merőlegesen mért elektromos vezetőképességi értékeket. Ezekkel a jelölésekkel az (5.5) képlet:

$$\sigma_{\bar{n}} = \sigma_{\perp} \sin^2 \theta + \sigma_{\parallel} \cos^2 \theta \quad (5.6)$$

Második példaként vizsgáljuk meg a Young-modulusz irányfüggését. Először is le kell szögeznünk, hogy a húzási irányban vett Young-moduluszon az ebben az irányban kifejtett húzófeszültség (σ_{ii}) és nyúlási deformáció (ϵ_{ii}) hányadosát értjük. Ha egy tetszőleges irányú \bar{n} egységvektor irányában helyezzük el koordinátarendszerünk x_3 -tengelyét, az ezen irány mentén vett rugalmassági modulusz nyilván

$$E_{\bar{n} \parallel x_3} = \frac{\sigma'_{33}}{\epsilon'_{33}} \quad (5.7)$$

A (3.19) képlet szerint (ha nincsenek külső terek)

$$\epsilon'_{33} = s'_{3333} \sigma'_{33} \quad (5.8)$$

kapjuk, hogy

$$E_{\bar{n}||x'_3} = \frac{1}{s'_{3333}} \quad (5.9)$$

Tehát a Young-modulusz irányfüggéséhez azt kell tudnunk, hogyan változik a különböző irányokban az s'_{3333} tenzorkomponens. Ezt az irányfüggést viszont megadja az s'_{3333} tenzorkomponens transzformációs képlete, mely (4.5) alapján

$$s'_{3333} = a_{3i} \cdot a_{3j} \cdot a_{3k} \cdot a_{3l} \cdot s_{ijkl} \quad (5.10)$$

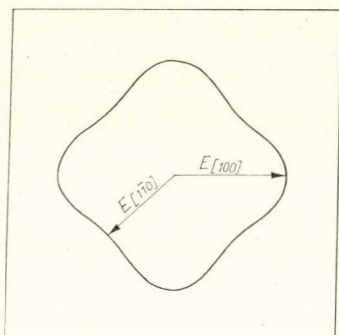
ahol a_{3i} ; a_{3j} ; a_{3k} ; a_{3l} az \bar{n} egységvektorral párhuzamos x'_3 tengely iránykoszinuszai a kristályfizikai koordinátarendszerre vonatkozóan, ennél fogva

$$s'_{3333} = n_i \cdot n_j \cdot n_k \cdot n_l \cdot s_{ijkl} \quad (5.11)$$

Ennek és az (5.9) képletnek alapján köbös rendszerbeli kristályok Young-moduluszára a következő kifejezést kapjuk:

$$E_{\bar{n}} = \frac{1}{s_{1111} - 2(s_{1111} - s_{1122} - 2s_{2323})(n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_3^2 n_1^2)} \quad (5.12)$$

Azaz még a legnagyobb szimmetriával rendelkező köbös rendszerű kristályok esetében is a Young-modulusz irányfüggést mutat. Szemléltetésül bemutatjuk a köbös Young-moduluszának irányfüggését a (001) síkban (2. ábra).



2. ábra. NaCl Young-moduluszának irányfüggése a (001) síkban

6. Magasabbrendű effektusok

Két fizikai mennyiség közti összefüggés nem szükségszerűen lineáris. A függő és a független fizikai változó közti összefüggés gyakran egy hatványsor alakjában adható meg. Például az elektromos polarizáció vektorának az elektromos térerősségtől való függését erősebb terekben a következő képlet adja meg:

$$P_i = \chi_{ij}^0 E_j + \chi_{ijk} E_j E_k + \chi_{ijkl} E_j E_k E_l + \dots \quad (6.1)$$

ahol a $[\chi_{ij}^0]$ tenzor írja le a lineáris vagy elsőrendű effektust, a $[\chi_{ijk}]$ tenzor írja le a másodrendű effektust, s i.t. (A másodrendű effektus ad magyarázatot a kétszeres frekvenciájú fényhullámok keletkezésére a fénysugaraknak szimmetriacentrum nélküli kristályon történő áthaladásakor.)

Abban, hogy valamely effektust hányadrendűnek tekintünk, bizonyos szabadságunk van attól függően, hogy milyen aspektusból vizsgáljuk az esetet. A fenti példánál maradva, ha a dielektromos szuszceptibilitás tenzorának nem a $[\chi_{ij}^0]$ tenzort, hanem az elektromos polarizáció vektorának az elektromos térerősség szerinti deriváltját, a $[\chi_{ij}]$ tenzort tekintjük, akkor az előzően másodrendű effektus mint

elsőrendű effektus fogható fel, mely a dielektromos szuszceptibilitásnak az elektromos térerősségtől való függését írja le. Ez az alábbi képletből jól kitűnik:

$$\frac{\partial P_i}{\partial E_j} = \chi_{ij} = \chi_{ij}^0 + \chi_{ijk} E_k + \chi_{ijkl} E_k E_l \quad (6.2)$$

Hasonlóképp írhatjuk fel az elektromos ellenállásnak a mágneses térerősségtől való függését is:

$$\varrho_{ik}(H) = \varrho_{ik}^0 + \varrho_{ikl} H_l + \varrho_{iklm} H_l H_m + \varrho_{iklmn} H_l H_m H_n \quad (6.3)$$

ahol a $[\varrho_{ik}^0]$ tenzor reprezentálja az elektromos ellenállást zérus erősségű mágneses térben; a $[\varrho_{iklm}]$ tenzor a mágneses térben fellépő ellenállásváltozást, a $[\varrho_{ikl}]$ és $[\varrho_{iklmn}]$ tenzorok pedig az első, illetve másodrendű Hall-effektust írják le.

Végül megjegyezzük, hogy a rugalmasságtanban a másodrendű effektusoknál szereplő koefficienseket harmadrendű rugalmassági modulusoknak hívják, mivel a nem-lineáris feszültség-deformáció összefüggés tárgyalásánál célszerűbb a rugalmas energiafüggvényből kiindulni, melynek harmadrendű deriváltjai adják a lényegében másodrendű effektus koefficienseit.

7. A fizikai tulajdonságok leírása mátrix jelölésmódban

Az előbbieken láttuk, hogy a fizikai tulajdonságok leírásánál igen hasznosnak bizonyultak a tenzorok. Azonban különösen a magasabb rendű tenzoroknál a sok index kényelmetlenséget okoz. Célszerű sok esetben olyan új jelölés, úgynevezett mátrixjelölés bevezetése, melynek segítségével az indexek száma csökkenthető. A mátrixjelölés bevezetését elősegíti, hogy a fizikai tulajdonságokat leíró tenzoroknál a független tenzorkomponensek száma az intrinsic szimmetriák miatt általában jelentősen csökken.

Először nézzünk egy egyszerű példát. Adott célok érdekében egy szimmetrikus másodrendű tenzor $[\alpha_{ij} = \alpha_{ji}]$ komponenseiből a következő (α_i) mátrixokat szokták képezni:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{33} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{33} \\ 2\alpha_{23} \\ 2\alpha_{31} \\ 2\alpha_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Mint a (7.1) és (7.2) képletekből látható, mindkét esetben ugyanaz a tenzor-komponens ugyanazzal a mátrixelemmel van kapcsolatban, azaz a tenzorkomponensek indexei és a mátrixelemek indexei közti kapcsolat egyértelmű:

$$\begin{array}{llllll} \text{tenzor indexek:} & 11 & 22 & 33 & 23,32 & 31,13 & 12,21 \\ \text{mátrix indexek:} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \quad (7.3)$$

Ily módon a mátrixjelölés bevezetésével az indexek számát csökkenteni tudtuk annak árán, hogy az új index az 1, 2, 3 értéken kívül felveheti a 4, 5, 6 értékeket is. Bár a tenzorkomponensek indexei és a mátrixelemek indexei közötti kapcsolat egyértelmű, a tenzorkomponensek és a nekik megfelelő mátrixelemek közötti kapcsolat egy szorzótényező erejéig megállapodástól függ. A szorzótényező szerepére nézve az alábbiakban látunk majd példákat.

A mátrixjelölés előnye főleg a harmad- és magasabb rendű tenzoroknál mutatkozik meg. A leggyakrabban előforduló harmadrendű tenzor a kristályfizikában a piezoelektromos tenzor, mely a kristályra ható feszültségek és az ezen feszültségek hatására fellépő elektromos polarizáció közötti összefüggést adja meg:

$$P_i = d_{ijk} \cdot \sigma_{jk} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (7.4)$$

A piezoelektromos tenzornak mint harmadrendű tenzornak $3^3=27$ komponense van. Ez azt jelenti, hogy egy kocka alakú táblázatba lehetne összefoglalni őket, ahol az első index a réteget, a második a sort, a harmadik az oszlopot jelentené. Figyelembe véve azonban, hogy a $[d_{ijk}]$ tenzor a j és k indexek megcserélésére nézve szimmetrikus (lásd 3. fejezet), új jelölés bevezetésével csökkenthető az indexek száma. A jk indexpárok egyetlen új indexszel helyettesíthetők, a (7.3)-nak megfelelően. A piezoelektromos mátrix (d_{in}) elemeit pedig a következőképpen képezzük a $[d_{ijk}]$ tenzor komponenseiből:

$$\begin{array}{ll} d_{in} = d_{ijk} & \text{ha } n = 1, 2, 3 \\ d_{in} = 2d_{ijk} & \text{ha } n = 4, 5, 6 \end{array} \quad (7.5)$$

Ha elfogadjuk a piezoelektromos mátrix (7.5) szerinti felírásmódját, valamint a feszültségtenzor komponenseiből a (7.1)-nek megfelelően képezzük a mátrixot, akkor a (7.4) egyenleteknek a következő mátrixegyenlet felel meg:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Figyelembe véve azt a megállapodásunkat, hogy egy tagban kétszer előforduló index ezen index szerinti szummázást jelent, a (7.6) röviden így írható:

$$P_i = d_{ij} \sigma_j \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Fontos megjegyeznünk, hogy egyes szerzők nem vezetik be a kettes szorzótényezőt a piezoelektromos mátrix $n=4, 5, 6$ elemeinek értelmezésekor. Ez viszont azzal jár, hogy az elektromos polarizáció vektora és a mechanikai feszültség közötti összefüggés nem adható meg a (7.7)-nek megfelelő kompakt formában.

Más fizikai tulajdonságot reprezentáló mátrix esetében is előfordul, hogy a mátrixelemeket különböző szerzők különbözőképpen definiálják. Ezért az irodalomból vett számértékek felhasználásánál figyelemmel kell lennünk arra, hogy az illető szerző melyik meghatározási módot fogadta el.

A mátrix jelölésmód előnyös voltának szemléltetésére végül vizsgáljuk meg a kristályok rugalmasságát. A Hooke-törvény alakja tenzor írásmódban:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (7.8)$$

ahol σ_{ij} a feszültségtenzor, ε_{kl} a deformációs tenzor komponensei.

Figyelembe véve, hogy a $[c_{ijkl}]$ tenzor komponensei szimmetrikusak az első két, illetve az utolsó két index felcserélésére nézve (lásd 3. fejezet), az első két, illetve az utolsó két indexet helyettesíthetjük egy-egy új indexszel a (7.3)-nak megfelelően. A (c_{mn}) mátrix elemeit pedig a következőképp definiálhatjuk:

$$c_{ijkl} = c_{mn} \quad \begin{pmatrix} i, j, k, l = 1, 2, 3, \\ m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

Ha a $[\sigma_{ij}]$ feszültség komponenseiből a (7.1)-nek, a $[\varepsilon_{kl}]$ deformációtensor komponenseiből a (7.2)-nek, a $[c_{ijkl}]$ rugalmassági tenzor komponenseiből a (7.9)-nek megfelelően képezünk mátrixokat, akkor a Hooke-törvény mátrixalakban:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

azaz kompakt formában, figyelembe véve a szummázás jelölésére vonatkozó megállapodásunkat:

$$\sigma_i = c_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (7.11)$$

Ha a deformációkat fejezzük ki a feszültség függvényében, a következő egyenlethez jutunk:

$$\varepsilon_i = s_{ij} \sigma_j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (7.12)$$

ahol az (s_{ij}) mátrix a (c_{ij}) mátrix reciproka mátrixa, azaz

$$s_{ij} c_{jk} = c_{ij} s_{jk} = \delta_{ik} \quad (7.13)$$

ahol δ_{ik} a Kronecker-deltát jelöli.

Elemi számolással könnyen belátható, hogy a fenti (s_{mn}) mátrix elemei, valamint az $[\varepsilon_{ij}]$ deformációs tenzor és a $[\sigma_{kl}]$ feszültség közötti összefüggést kifejező $[s_{ijkl}]$ tenzor komponensei között a következő összefüggés van:

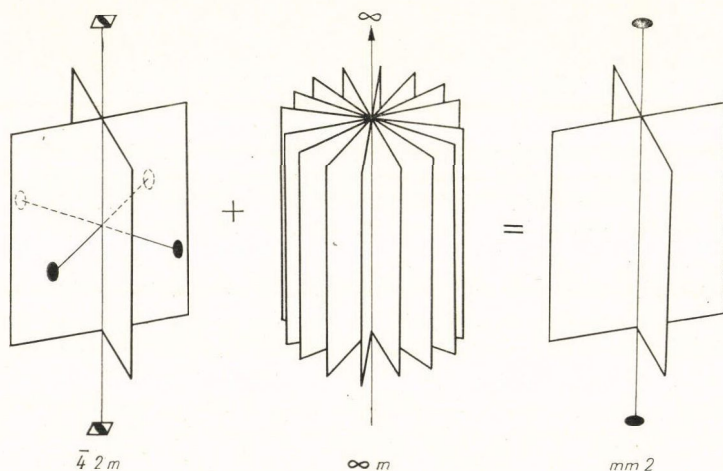
$$\begin{aligned} s_{mn} &= s_{ijkl} \quad \text{ha} \quad m \quad \text{és} \quad n \quad 1,2 \quad \text{vagy} \quad 3 \\ s_{mn} &= 2s_{ijkl} \quad \text{ha} \quad \text{vagy} \quad m, \quad \text{vagy} \quad n \quad 4,5 \quad \text{vagy} \quad 6 \\ s_{mn} &= 4s_{ijkl} \quad \text{ha} \quad \text{mind} \quad m, \quad \text{mind} \quad n \quad 4,5 \quad \text{vagy} \quad 6 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Befejezésül talán nem szükségtelen megjegyezni azt, hogy mátrixjelölés esetén az index száma nem utal a mátrixelemek transzformációs képletére. Például a piezoelektromos mátrix (d_{ij}) elemei a koordináta-transzformációkor másként transzformálódnak, mint a (c_{ij}) rugalmassági mátrix elemei.

8. Curie-elv

A kristály szimmetriája függ a kristály állapotától. Ha külső hatásra megváltozik a kristály állapota, akkor megváltozhat a kristály szimmetriája is. A kristály adott állapotának szimmetriája meghatározható a kristály külső befolyásoktól mentes állapotának szimmetriája, valamint a külső hatásban megnyilvánuló szimmetriatulajdonságok alapján a heterogén rendszerekre vonatkozó Curie-elv segítségével.

Curie szerint amikor a különböző természeti jelenségek egy rendszert képezve egymásra rakódnak, a disszimmetriák összeadódnak, azaz csak azok a szimmetriaelemek maradnak meg, amelyek valamennyi önmagában tekintett jelenségben közösen megvoltak. Curie ugyanis disszimmetrián a hiányzó szimmetriaelemek összességét értette [8]. Kristályfizikában a Curie-elveket a következőképp fogalmazzák meg: Külső hatás alatt álló kristály szimmetriacsoportját a kristály és a külső hatás szimmetriacsoportjainak legnagyobb közös alcsoportja adja meg, ha figyelembe vesszük ezen csoportok szimmetriaelemeinek kölcsönös elhelyezkedését is [9].

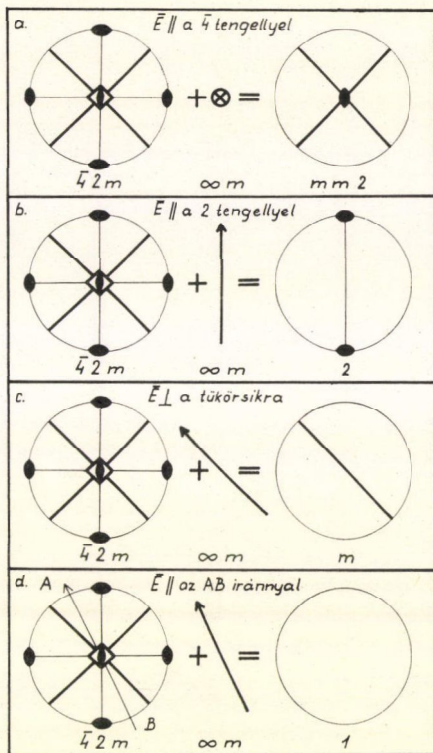


3. ábra. ADP kristály szimmetriájának csökkenése
[001] irányú elektromos térben

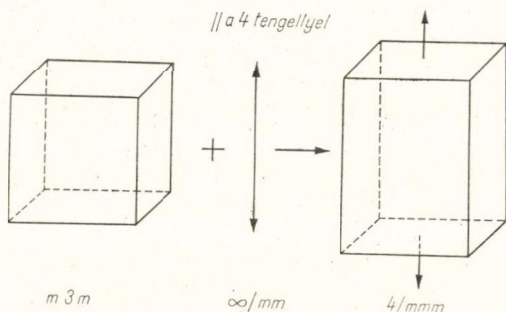
Más szavakkal a kristályfizikai Curie-elv: *Külső hatás alatt álló kristály azokkal a szimmetriaelemekkel rendelkezik, amelyek az önmagában tekintett kristály, illetve az önmagában tekintett külső hatás szimmetriaelemei közül megegyeznek és egybeesnek.*

Első példaként vizsgáljuk meg egy ADP (ammoniumdihidrogénfoszfát) kristály szimmetriájának megváltozását különböző irányú elektromos terekben. Az ADP kristály szimmetriája alapállapotban $\bar{4}2m$, azaz van egy négyfogású inverziós tengelye, mely magában foglal egyben egy kétfogású forgás tengelyt is. A négyfogású inverziós forgástengely két egymásra merőleges tükrösík metszésvonalában helyezkedik el, ezenkívül van még két kétfogású egymásra merőleges forgástengely, melyek a tükrösíkokkal 45° -os szöget zárnak be, mint ez a pontcsoport axonometrikus, illetve sztereografikus ábrázolásából jól látható (3., ill. 4. ábra). Az elektromos térerősség szimmetriája ∞m , azaz megegyezik egy nyugvó kúp szimmetriájával: van egy végtelen fogású forgástengelye, mely magában foglalja az összes alacsonyabb fogású forgástengelyeket, köztük a kétfogású forgástengelyt is, továbbá a végtelen fogású tengely végtelen sok tükrösík közös metszésvonalában helyezkedik el.

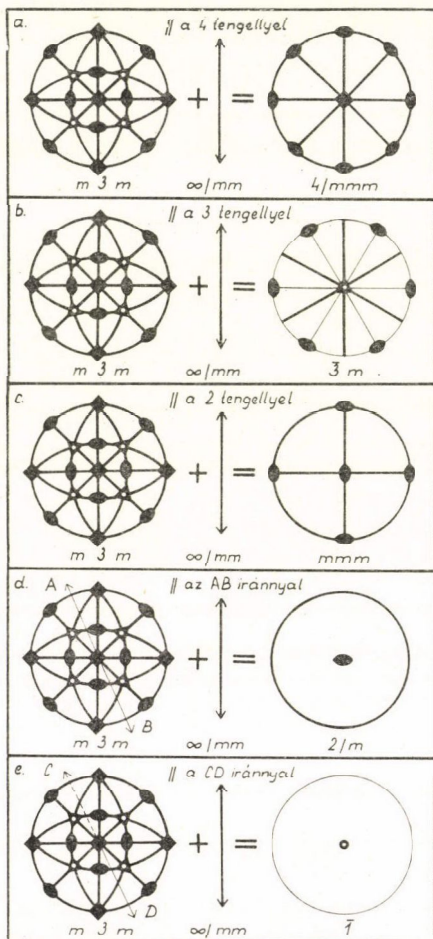
Először nézzük meg azt az esetet, amikor az elektromos tér a $[001]$ irányba mutat, azaz párhuzamos a kristály négyfogású inverziós tengelyével. Az inverziós tengely nem szerepel az elektromos térerősség szimmetriaelemei között, tehát a Curie-elv értelmében az eredő szimmetriaelemek közé sem fog tartozni. Felhívtuk a figyelmet azonban előbb arra, hogy a négyfogású inverziós forgástengely tartalmaz egy kétfogású forgástengelyt is, mely megvan az elektromos térerősség szimmetriaelemei között is, tehát az $[001]$ irányban az elektromos térben álló kristály szimmetriaelemei között fel fog lépni ez a kétfogású szimmetriatengely. A kristály alapszimmetriaelemei között szereplő két tükrösík az elektromos tér szimmetriaelemei között is megtalálható, ezek tehát szintén megmaradnak. A tükrösíkok metszésvonalára merőleges kétfogású forgástengelyek az elektromos tér szimmetriaelemei között nincsenek meg, így eltűnnek. Az elmondottak alapján a közös szimmetriaelemek a következők: két egymásra merőleges tükrösík, illetve a metszésvonalukban felépő kétfogású forgástengely. Tehát az ADP kristály szimmetriája $[001]$ irányú elektromos térben a rombos rendszerbeli $mm2$ pontcsoport szimmetriájára csökkent (3., ill. 4a ábra). Ha az elektromos tér az $[100]$ irányban, azaz a négyfogású inverziós forgástengelyre merőleges kétfogású forgástengely mentén hat, a kristály egyik tükrösíkja sem esik egybe az elektromos tér tükrösíkjaival, tehát a tükrösíkok eltűnnek.



4. ábra. ADP kristály szimmetriájának megváltozása különböző irányú elektromos terekben



5. ábra. NaCl kristály szimmetriájának megváltozása [001] irányú húzófeszültség hatására



6. ábra. NaCl kristály szimmetriájának megváltozása különböző irányú húzófeszültségek hatására

Eltűnik továbbá a négyfogású inverziós tengely (a magában foglalt kétfogású szimmetriatengellyel együtt), valamint a másik kétfogású tengely is, mivel az elektromos térnek csak egy irányban van forgásszimmetriája. Így csak egyetlen kétfogású forgástengely (melynek mentén a tér hat) marad meg. Azaz a kristály szimmetriája lecsökken a monoklin rendszerbeli 2 pontcsoport szimmetriájára (4b ábra). Ha az elektromos tér az $[\bar{1}\bar{1}0]$ irányban, azaz az egyik tükör-

síkban, a másik tükörsíkra merőleges irányban hat, a közös szimmetriaelem csak egy tükörsík lesz. Ily módon a kristály szimmetriája lecsökken a monoklin rendszerbeli m osztály szimmetriájára (4c ábra). Végül, ha az elektromos tér az előbbiektől eltérő tetszőleges $[hkl]$ irányba mutat, a kristály és az elektromos tér egyik szimmetriaeleme sem esik egybe. Így egy szimmetriaelem sem marad meg, a kristály szimmetriája ilyen irányú terekben lecsökken a triklin rendszerbeli 1 osztály szimmetriájára.

A Curie-elv alkalmazásának további szemléltetésére vizsgáljuk meg, hogy az eredetileg optikailag izotrop kőszókristály húzóerő hatására hogyan válik optikailag anizotroppá. A kőszókristály pontcsoportja $m\bar{3}m$. A húzófeszültség szimmetriája megegyezik egy nyugvó henger szimmetriájával, azaz ∞/m .

Először nézzük meg az $[001]$ irányban ható húzófeszültség hatását (5. és 6a ábra). Könnyen belátható, hogy ebben az esetben a kockából négyzetes hasáb lesz, melynek szimmetriája $4/mmm$. Ebből következik, hogy az eredetileg optikailag izotrop kőszókristály az $[001]$ irányú húzófeszültség hatására optikailag egytengelyű kristállyá fog viselkedni. Ha a húzófeszültség az $[111]$ irányban, azaz a háromfogású tengely mentén hat, akkor a 6b sztereografikus ábra alapján jól látható, hogy a kocka szimmetriaelemei közül megmarad a háromfogású tengelyen kívül még három tü-

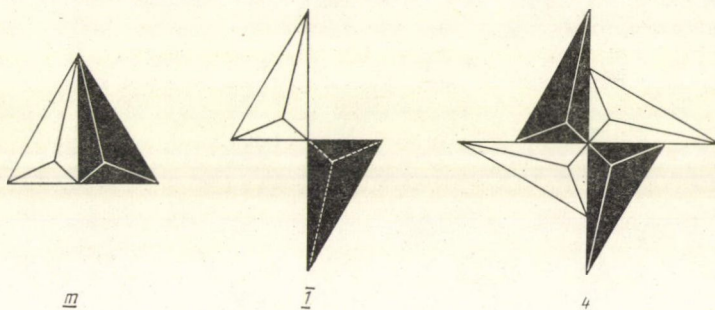
körsík, három kétfogású tengely, valamint a szimmetria középpont, vagyis az $[111]$ irányú húzófeszültség hatására a kőso szimmetriája lecsökkent a $\bar{3}m$ pontcsoport szimmetriájára, azaz ebben az esetben is optikailag egytengelyű kristályként fog viselkedni. Ha a húzófeszültség az $[110]$, a $[hk0]$ vagy a $[hkl]$ irányokban helyezkedik el, a deformált kőso kristály szimmetriája rendre megfelel a rombos mmm , a monoklin $2/m$, illetve a triklin $\bar{1}$ kristályosztályok szimmetriájának, azaz optikailag kéttengelyű kristályként fog viselkedni.

Megjegyezzük, hogy a fentebb ismertetett Curie-elv a szimmetriacsoportok szuperpozíciója általánosított elvének speciális esete. Az általánosított elv részletes kifejtése megtalálható Subnyikov és Kopcik könyvében [10], itteni tárgyalása túlnőne cikkünk keretein.

9. Függelék. Subnyikov-féle antiszimmetria-osztályok

A Subnyikov által [11] bevezetett antiszimmetria-műveletek a hagyományos szimmetriaműveletek (forgatás stb.) és az úgynevezett megfordítási (antiazonosítási) művelet (R) kombinációjából állnak. A megfordítási művelet fizikai tartalma különböző lehet: töltések előjelének megfordítása, mágneses momentumok (spinek) irányának megfordítása, időinverzió, színváltás (fehér átfestése feketére) stb. Az antiszimmetria-műveletekre a 7. ábrán láthatunk példákat, ahol a színváltást kombináltuk tükrözéssel, inverzióval, illetve 90° -os elforgatással. Az antiszimmetria-műveleteket a nemzetközi irodalomban aláhúzással vagy vesszővel különböztetik meg a hagyományos szimmetriaműveletektől.

A hagyományos térbeli műveletek mellett az antiszimmetria-műveleteket is figyelembe véve, 122 általánosított pontcsoport, illetve ennek megfelelően 122 Subnyikov-féle antiszimmetria-osztály vezethető le [10–14].



7. ábra. Antiszimmetria-műveletek

A 122 általánosított pontcsoportot, illetve Subnyikov-féle antiszimmetria-osztályt a megfordítási művelet fizikai jellegének megfelelően különbözőképpen szokták részekre bontani. Ha a megfordítási művelet a fehér szín feketére való felcserélését jelenti, háromfajta csoportot szokás megkülönböztetni: szürke csoportokat, egyszínű és kétszínű csoportokat. A szürke csoportok (számuk 32) explicit módon tartalmazzák az R megfordítási műveletet, így valamely szimmetrikus komplexum alkotórészeinek egyszerre kell fehéreknek, illetve feketéknek lenniük, ezért

azt mondjuk, hogy szürkék. Az egyszínű csoportok sem explicit módon, sem valamilyen hagyományos szimmetriaművelethez kapcsoltnak nem tartalmazzák a megfordítási műveletet, azaz megegyeznek a 32 hagyományos krisztallográfiai pontcsoporttal. A kétszínű csoportok a megfordítási műveletet explicit módon nem, csak valamely hagyományos művelettel való kombinációban tartalmazzák. Az 58 darab kétszínű csoport elemei között mind a hagyományos szimmetriaműveletek, mind az antiszimmetria- (más elnevezéssel komplementer) műveletek szerepelnek. A kétszínű csoportokban a hagyományos szimmetriaműveletek 2-es indexű alcsoportot alkotnak.

Az egyszínű, azaz a hagyományos krisztallográfiai pontcsoportok sztereografikus ábrázolása valamennyi krisztallográfiai, illetve sok szilárdtestfizikai [15] tankönyvben

VI. TÁBLÁZAT. MÁGNESES PONTCSOPORTOK

1					
$\bar{1}$	$\bar{1}$				
2	2				
m	m				
$2/m$	$2/m$	$2/m$	$2/m$		
222	222				
$mm2$	$mm2$	$mm2$			
mmm	mmm	mmm	mmm		
4	4				
$\bar{4}$	$\bar{4}$				
$4/m$	$4/m$	$4/m$	$4/m$		
422	422	422			
$4mm$	$4mm$	$4mm$			
$\bar{4}2m$	$\bar{4}2m$	$\bar{4}2m$	$\bar{4}2m$		
$4/mmm$	$4/mmm$	$4/mmm$	$4/mmm$	$4/mmm$	$4/mmm$
3					
$\bar{3}$	$\bar{3}$				
32	32				
$3m$	$3m$				
$\bar{3}m$	$\bar{3}m$	$\bar{3}m$	$\bar{3}m$		
6	6				
$\bar{6}$	$\bar{6}$				
$6/m$	$6/m$	$6/m$	$6/m$		
622	622	622			
$6mm$	$6mm$	$6mm$			
$\bar{6}m2$	$\bar{6}m2$	$\bar{6}m2$	$\bar{6}m2$		
$6/mmm$	$6/mmm$	$6/mmm$	$6/mmm$	$6/mmm$	$6/mmm$
23					
$m3$	$m3$				
432	432				
$\bar{4}3m$	$\bar{4}3m$				
$m3m$	$m3m$	$m3m$	$m3m$		

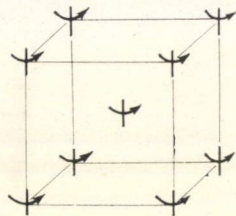
megtalálható. Ezekből egyszerű módon kapható a szürke csoportok sztereografikus ábrázolása, ha figyelembe vesszük, hogy egy szürke csoportnak kétszer annyi eleme van a megfordítási művelet folytán, mint a kiindulási hagyományos csoportnak. A kétszínű csoportok sztereografikus ábrázolásai komplett formában Kopicik könyvében [13] találhatók meg.

Kristályfizikai szempontból fontos eredményre jutunk, ha az R megfordítási művelet az időinverzió:

$$Rt = -t \quad (9.1)$$

Ebben az esetben a 122 általánosított pontcsoportot 32 nem-mágneses és 90 mágneses pontcsoportba szokták felbontani, attól függően, hogy a pontcsoportok explicit módon tartalmazzák vagy nem tartalmazzák az időinverziót. Az elnevezések arra utalnak, hogy az időinverzió a mágneses momentumok irányának megfordítását eredményezi.

A 8. ábrán a mágneses pontcsoportokra példaként ábrázoltunk egy mágneses szerkezetet. A spineket axiális vektor voltuk következtében a forgásirányt feltüntetett egyenes szakaszokkal jelöltük. Könnyen belátható, hogy a z -tengely mentén van egy négyfogású forgástengely és arra merőlegesen egy tükörsík, az x , illetve y tengelyekre merőlegesen időinverzióval kombinált tükörsíkok (anti-tükörsíkok) vannak, vagyis az ábrán látható mágneses szerkezet szimmetriája a $4/m\bar{m}2$ mágneses pontcsoporttal írható le. Ha a spinek értéke zérus lenne, a 8. ábrán látható szerkezet szimmetriája $m\bar{3}m$ lenne.



8. ábra. α -Fe mágneses szerkezete

A 90 mágneses pontcsoport (felsorolásuk a VI. táblázatban található) bevezetése érthetővé tette többek között a piromágnesség és a piezomágnesség felléptét bizonyos kristályokban.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok *M. P. Saszkolszkaja* professzornőnek (Insztitút Sztali, Moszkva), aki elindított az elméleti kristályfizika tanulmányozása útján, valamint *N. V. Perelomova* és *M. M. Tagieva* kandidátusoknak hasznos tanácsaikért és a velük folytatott diszkusszióikért. Köszönettel tartozom továbbá kollégáimnak a kézirat áttanulmányozása során tett hasznos megjegyzéseikért.

IRODALOM

1. *R. R. Birss*: Symmetry and Magnetism. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964.
2. *S. Bhagavantam*: Crystal symmetry and physical properties. Academic Press, London-New York, 1966.
3. *C. J. Bradley—B. L. Davies*, Rev. Mod. Phys. 40. 359, 1968.
4. *F. G. Fumi*, Acta cryst. 5. 44, 1952.
5. *J. F. Nye*: Physical properties of crystals. Clarendon Press, Oxford, 1957.
6. *A. C. Smith—J. F. Janak—R. B. Adler*: Electronic conduction in solids, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1967.
7. *И. С. Желудев*: Физика кристаллических диэлектриков. Изд. „Наука”, Москва 1968.

8. *А. В. Шубников*, Успехи физических наук 59, 591, 1956.
9. *В. А. Копчик*, Кристаллография 2, 99, 1957.
10. *А. В. Шубников—В. А. Копчик*: Симметрия. Изд. „Наука”, Москва 1972.
11. *А. В. Шубников*: Симметрия и антисимметрия конечных фигур. Изд. АН СССР, Москва 1951.
12. *H. Heesch*, Z. Krist. 73. 325, 1930.
13. *В. А. Копчик*: Шубниковские группы. Изд. Московского Университета, 1966.
14. *W. Opechowski—R. Guccione*: Magnetic symmetry. („Magnetism” ed.: G. T. Rado-H. Suhl Vol. II/A. p. 105) Academic Press, New York—London 1965.
15. *Ch. Kittel*: Bevezetés a szilárdtestfizikába, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966.

A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

RELATIVISZTIKUS HULLÁMEGYENLETEK*

WIGNER JENŐ

A relativisztikus egytestprobléma a kvantummechanikában két szemszögből szemlélhető. Törekedhetünk olyan lineáris egyenletek felállítására, amelyek relativisztikusan invariánsak. Ezen egyenletek megoldásai ekkor relativisztikusan invariáns sokaságot képeznek, mely a rendszer lehetséges állapotait reprezentálja. Másrésztől igyekezetünk célja lehet ezen invariáns lineáris sokaság direkt meghatározása; ezt az utat követjük itt. Ezen az úton járva, a relativisztikus hullámeqyenletet csak utólag kapjuk meg, mint egy olyan egyenletet, mely a már ismert lineáris sokaság jellemzésére alkalmas. — Véges tömeg esetében ez a második nézőpont is csak azon sokaságokat szolgáltatja, amelyek számára már Majorana¹ egyenleteket adott meg. Az eltűnő nyugalmi tömeghez tartozó sokaságokat azonban nem lehet egyszerűen a véges nyugalmi tömegű sokaságokból határátmenettel megkapni. Azok adott impulzus mellett csupán egy vagy két, vagy pedig végtelen sok polarizációs állapotot tartalmaznak. Ezen utóbbi esetet itt részletesebben megvizsgáljuk, megadjuk az ezen lineáris sokaságokat jellemző egyenleteket [(11) és (12)], és meghatározzuk a skalárszorzat alakját [az impulzustérben: (27) és (33); a koordinátatérben: (39), (41) és (43)].

1. A relativisztikusan invariáns hullámeqyenletek problémája két oldalról közelíthető meg. Egyrésztől megkísérélhetjük, hogy relativisztikusan invariáns egyenleteket állítsunk fel olyan mennyiségekre vonatkozóan, amelyek nem csak a téridő-pontok négy folytonos koordinátájától, hanem azonkívül egy diszkrét koordinátától is függnék. Ez a diszkrét koordináta lehet a spin, mint a Dirac-egyenlet esetében, vagy szolgálhat egy vektor vagy tenzor komponenseinek megkülönböztetésére; ilyen esetre példa a Maxwell-egyenletek. Ezt az utat számos szerző választotta, jelentős sikerrel; legelőször alighanem Majorana, alapvető dolgozatában¹, majd később Dirac², Proca, Kemmer, Fierz, Duffin, Belinfante³ és O. Klein⁴, s újabban Bhabha és Harish-Chandra⁵. E módszer hátránya nyilvánvalóan abban áll, hogy ugyanazon fizikai tényállás matematikailag különbözőféleképpen is kifejezhető. Így pl. az elektromágneses teret leírhatjuk a térerősségekkel vagy a vektorpotenciálokkal anélkül, hogy az egyenletek alakja alapján közvetlenül felismerhető lenne a leírt jelenségek azonossága. A többértelműség formális tekintetben is fennáll. Így pl. Bhabha megköveteli, hogy a hullámfüggvény minden komponense egy adott idő-

* Megjelent: Zeitschrift für Physik **124**, 665—684, 1948. A szerző dolgozatát Richard Beckernek ajánlotta 60. születésnapja alkalmából.

¹ Majorana, E.: Nuovo Cim. **9**, 335 (1932).

² Dirac, P. A. M.: Proc. Roy. Soc. **155**, 447 (1936); **183**, 284 (1945).

³ Proca, A.: Journ. de Phys. et Rad. **7**, 347 (1936); Duffin, R. J.: Phys. Rev. **54**, 1114 (1938); Kemmer, N.: Proc. Camb. Phil. Soc. **34**, 354 (1938); Proc. Roy. Soc. **166**, 127 (1938); **173**, 91 (1939); Möller, C.: Nature **142**, 290 (1938); Belinfante, F. J.: Nature **143**, 201 (1939); Fierz, M.: Helv. Phys. Acta **12**, 3 (1939); Pauli, W. és M. Fierz: Helv. Phys. Acta **12**, 297 (1939); Fierz, M. és W. Pauli: Proc. Roy. Soc. **173**, 211 (1939).

⁴ Klein, O.: Arkiv f. Matem. och Fysik **25 A**, 15 (1936).

⁵ Bhabha, H. J.: Rev. Mod. Phys. **17**, 200 (1945); Proc. Ind. Acad. Sci. **21**, 241 (1945); Bhabha, H. J. és Harish-Chandra: Proc. Roy. Soc. **185**, 269 (1946); **189**, 372 (1947).

pontban szabadon választható legyen, azaz: hogy az egyenletek nem jelenthetik „kezdeti feltételek” kikötését. Más szerzők ezt a követelményt — amely pl. a Maxwell-egyenleteket kizárja — nem állítják fel, úgyhogy a kérdésfeltevés ebben a tekintetben sem egyértelmű.

A második út az invariánselméleti útnak nevezhető. Itt nem egy egyenletről indulunk ki; ehelyett megkíséreljük meghatározni a relativisztikusan invariáns lineáris állapotsokaságokat. Két ilyen sokaságot ekvivalensnek tekintünk, ha a két sokaság állapotai között kölcsönösen egyértelmű megfelelés áll fenn, úgyhogy a megfelelő állapot-párok között az átmeneti valószínűségek a két sokaságban megegyeznek. Ez a feltétel természetesen biztosítja, hogy két sokaság, melyek fizikailag azonosak, az elméletben is mint két ekvivalens sokaság jelenik meg.

Az adott invariáns sokaságban a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ állapotokat, melyekből minden állapot lineáris kombináció képzésével megkapható, válasszuk oly módon, hogy az átmeneti valószínűségek ezek között tűnjenek el:

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{ik}. \quad (1)$$

Legyenek $L\varphi_1, L\varphi_2, L\varphi_3, \dots$ azok az állapotok, amelyek az eredeti koordináta-rendszerből az L Lorentz-transzformáció segítségével kapott koordináta-rendszerben ugyanolyan tulajdonságúak, mint a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ állapotok az eredeti rendszerben. Relativisztikus invariancián éppen az ilyen állapotok létezését értjük. Az $L\varphi_i$ állapotok a φ_k -kal lineárisan kifejezhetők. Az együtthatókat, melyek természetesen függnek L -től, $D(L)_{ki}$ -vel jelöljük:

$$L\varphi_i = \sum_k D(L)_{ki} \varphi_k; \quad (2)$$

meg lehet mutatni, hogy azok a Lorentz-csoport (uniter) ábrázolását képezik. Amiről itt szó van, az az inhomogén Lorentz-csoport, azaz: a közönséges Lorentz-csoport, hozzávéve az eltolásokat (a „transzlációkat”) a térben és az időben. Fennáll

$$\sum_i D(L_1)_{ki} D(L_2)_{ij} = D(L_1 L_2)_{kj} \quad (3)$$

és

$$\sum_i D(L)_{ki}^* D(L)_{ji} = \delta_{kj}, \quad (3a)$$

$$\sum_k D(L)_{ki}^* D(L)_{kj} = \delta_{ij}. \quad (3b)$$

Továbbá könnyen meg lehet mutatni, hogy a Lorentz-csoport imént nyert ábrázolásai ekvivalens sokaságok esetében maguk is ekvivalensek. Eszerint egyértelmű megfelelés áll fenn a relativisztikusan invariáns lineáris sokaságok és az inhomogén Lorentz-csoport (egy- vagy többértékű) ábrázolásai között. Minthogy ezek az ábrázolások meghatározhatók — s meghatározásuk lényegében meg is történt⁶ —, az első probléma végérvényes megoldása előtt nyitva áll az út.

Természetesen a fent említett munkákban⁷ felállított egyenletek is az inhomogén Lorentz-csoport egyes ábrázolásait definiálják, s ezeknek az egyenleteknek a megoldásai pedig a megfelelő lineáris sokaságokat. Kiténik azonban, hogy ezek a soka-

⁶ Ez nyilvánvaló volna, ha a fizikai állapot a hullámfüggvényt egyértelműen meghatározná. Amint ezt a ⁸ alatt idézett munka 5. fejezetében megmutattuk, az állítás igaz marad, jóllehet egy a hullámfüggvény előtt álló egységsnyi abszolút értékű tényezőnek nincs jelentése.

⁷ Lásd az ¹⁻⁵ lábjegyzetekben idézett dolgozatokat.

ságok az említett dolgozatokban⁸ majdnem mindig egyszerűbb sokaságokból felépülő bonyolult képződmények. Ezek úgy állnak elő, hogy egybefoglalunk több irreducibilis sokaságot (az utóbbiak leírásával a következőkben foglalkozunk; az jellemzi őket, hogy tovább már nem bonthatók fel relativisztikusan invariáns részsokaságokra).

Azt a kérdést, hogy a lineáris sokaság és a hozzá tartozó ábrázolás milyen mértékben teszi lehetővé a rendszer fizikai tulajdonságainak meghatározását, itt nem kívánjuk tárgyalni. Minthogy az inhomogén Lorentz-csoport az időbeli translációkat magában foglalja, az ábrázolás az összes tulajdonság időbeli változását megadja, hacsak a szóban forgó tulajdonság a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ állapotokra vonatkozóan a $t=0$ időben ismert.

A jelen munka a most vázolt invariánselméleti nézőponton alapszik. Noha a kérdésfeltevések ezen nézőpont mellett lényegesen egyértelműbbek, mint az elsőnek leírt nézőpont mellett, másrésről az is világos, hogy a kapott válaszok jóval korlátozottabbak. Míg a hullámfüggvények módszere pl. az alapul vett rendszernek az elektromágneses térrel való kölcsönhatására kézenfekvő (bár bizonyos esetekben félrevezető) kifejezést sugall, az invariánselméleti módszer semmilyen útmutatást nem ad a kölcsönhatás kérdésének megoldásához. Amellett könnyen lehetséges, hogy több irreducibilis sokaság egybefoglalása fizikailag értelmes, még ha a tisztán invariánselméleti nézőpontból önkényesnek is tetszik.

2. Amint azt fent említettük, az inhomogén Lorentz-csoport irreducibilis ábrázolásainak meghatározása „lényegében” már megtörtént. A tényállás pontosabban a következő. Meg lehet mutatni, hogy a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_i, \dots$ függvények helyettesíthetők a $\varphi(p_1, p_2, p_3, p_4, \zeta)$ függvényekkel, így tehát az egyszerű i index helyére a $p_1, p_2, p_3, p_4, \zeta$ változók lépnek. A koordináta-rendszer eltolása az x, y, z, t vektor irányában $\varphi(p_1, p_2, p_3, p_4, \zeta)$ -t az

$$e^{i(p_1x + p_2y + p_3z - p_4ct)} \varphi(p_1, p_2, p_3, p_4, \zeta) \quad (4)$$

függvénybe viszi át. Kitűnik azonkívül, hogy egy irreducibilis sokaságban csak olyan $\varphi(p_1, p_2, p_3, p_4, \zeta)$ -k lépnek fel, amelyek esetén

$$p_4^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \quad (5)$$

ugyanazt az értéket veszi fel. Azokat az ábrázolásokat határoztuk meg⁹, amelyekre

⁸ Lásd a ²⁻⁵ lábjegyzetekben idézett dolgozatokat.

⁹ Wigner, E.: Ann. of. Math. 40, 149 (1939) [Magyarul: e sorozat 1. cikke, Magyar Fizikai Folyóirat 21, 21 (1973)]. A relativisztikusan invariáns lineáris sokaságok és az ábrázolások kapcsolatát ebben a munkában részletesen tárgyaljuk. Azt is megmutatjuk, hogy az inhomogén Lorentz-csoport összes többértékű unitér ábrázolásai egy- vagy kétértékű ábrázolásokkal ekvivalensek. Ne maradjon említetlen, hogy Majorana dolgozatának nézőpontja (vö. az ¹ lábjegyzettel) inkább hasonlít ehhez a „második út”-hoz, mint a későbbi dolgozatoké. Ha ez utóbbi dolgozatokban (²⁻⁵ lábjegyzetek) a Lorentz-csoport ábrázolásairól esik szó, úgy az mindig a hullámfüggvény adott téridő-pontbeli transzformációs tulajdonságaira vonatkozik. Ezeknek igen kevés közül van az itt tárgyalt ábrázolásokhoz, melyek a teljes hullámfüggvény transzformációs tulajdonságaira vonatkoznak. Az utóbbiak mindig unitérek, s minthogy a lehetséges hullámfüggvények száma végtelen, végtelen dimenziósak. Az előbbi ábrázolások azonfelül csak a homogén Lorentz-csoportnak az ábrázolásai, mivel ha egyszer kiválasztottunk egy világypontot, az eltolások többé nem megengedettek. Az a feltevés továbbá, hogy a hullámfüggvények az x, y, z, t változóktól függenek, a második felfogásban nem feltétlenül jogos, jóllehet kiderül, hogy azt mindig ki lehet kényszeríteni. Azt, hogy valóban sokszor kikényszerítésről van szó, mutatja a későbbiekben tárgyalt példa.

(5) pozitív vagy zérus, de kizártuk azt az esetet, amikor az összes p egyszerre tűnik el.¹⁰

Ha (5) értéke pozitív, úgy a ζ változó vagy csak egy értéket vehet fel, vagy — egy másik ábrázolásban — két értéket, egy harmadik ábrázolásban három értéket stb. Az elsőnek említett ábrázolás az, amelyet a Klein—Gordon—Kudar-egyenletből is megkapunk, a második megkapható az elektron Dirac-féle elméletéből, a harmadik a Proca-egyenletből; ily módon láthatjuk, hogy a fenti ábrázolásoknak megfelelő lineáris sokaságok véges tömegű és $s=0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, \dots$ spinű részecskéket írnak le. Minthogy a¹¹ munkákban minden egyenlet véges tömegű részecskéket ír le, a megfelelő lineáris sokaságok mindig a fenti fajtájú, a tömeg s a spin különböző értékeivel jellemzett lineáris sokaságok kombinációi. Bevezetve a $\psi(x, y, z, t, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2s})$ hullámfüggvényt, mely a $2s$ spinkoordinátától szimmetrikus módon függ, egyszerű egyenletrendszert kaphatunk, amelynek megoldásai alkotják az m tömegű, s spinű lineáris sokaságot. Mindezek a spinkoordináták a Dirac-féle fajtába tartoznak, azaz: négy értéket vehetnek fel. A σ_j változókra hatnak a $\gamma_{jx}, \gamma_{jy}, \gamma_{jz}, \gamma_{jt}$ operátorok, melyek a

$$\gamma_{jx}^2 = \gamma_{jy}^2 = \gamma_{jz}^2 = -1, \quad \gamma_{jt}^2 = 1; \quad (6)$$

$$\gamma_{jl}\gamma_{jk} + \gamma_{jk}\gamma_{jl} = 0, \quad \text{ha } l \neq k$$

felcserélési összefüggéseknek tesznek eleget. Azok a γ -k, amelyeknek első indexei különbözőek, természetesen felcserélhetők. Az m tömegű és s spinű részecskéket leíró egyenletrendszer:

$$\left(\frac{\hbar}{i} \sum_{jl} \gamma_{jl} \frac{\partial}{\partial x_l} - 2smc \right) \psi(\dots x_l \dots \sigma_j \dots) = 0, \quad (7)$$

$$\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \right) \psi = m^2 c^2 \psi \quad (7a)$$

(itt $x_1=x, x_2=y, x_3=z, x_4=ct$). A (7) alatt álló operátor az $s=0$ esetben azonosan zérus, úgyhogy ez az egyenlet $s=0$ esetén semmitmondóvá válik. Az $s=\frac{1}{2}$ esetben ezzel szemben (7a) következménye (7)-nek. Az $s>\frac{1}{2}$ esetben a (7) egyenletrendszert O. Klein¹² már tárgyalta, ebben az esetben azonban (7a) nem következik a (7) egyenletből; azt külön feltételként kell kiróni, hogy azokat a bonyodalmakat, amelyekkel Klein dolgozata foglalkozik, elkerüljük és a megoldásrendszert irreducibilissé tegyük. Természetesen (7), (7a) csak egy példa a kívánt irreducibilis, relativisztikusan invariáns lineáris sokaságot szolgáltató egyenletrendszerre; egy másik példát, amint azt fent említettük, már Majorana¹³ megadott.

Mindaddig szokásos volt a feltevés, hogy az eltűnő nyugalmi tömegű részecskére vonatkozó egyenletek megkaphatók a véges tömeghez tartozó egyenletekből, ha ez utóbbiakba behelyettesítjük az $m=0$ értéket. Ez azonban nem így van. Meg lehet mutatni,¹⁴ hogy $\psi(p_1, p_2, p_3, p_4, \zeta)$ -ban ζ a $p_4^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = 0$ feltétel mellett csak

¹⁰ Bargmann, V.: Ann. of Math. 48, 568 (1947) [magyarul: e sorozat 2. cikke, Magyar Fizikai Folyóirat 21, 103 (1973)] újabban a homogén Lorentz-csoport ábrázolásait is meghatározta. Ezzel a $p_1=p_2=p_3=p_4=0$ eset is elintéztést nyert, kevésbé valószínű azonban, hogy ennek az esetnek közvetlen fizikai jelentése legyen, mivel valamennyi hullámfüggvény eltolásinvariáns.

¹¹ Lásd a ³⁻⁵ lábjegyzetekben idézett dolgozatokat.

¹² Lásd a ⁴ lábjegyzetben idézett dolgozatot.

¹³ Lásd az ¹ lábjegyzetben idézett dolgozatot.

két értéket vehet fel, amennyiben értékkészlete véges számú értékből áll. Régen ismert példát szolgáltatnak erre a Maxwell-egyenletek, melyek csak két polarizációs irányt engednek meg. A helyzet az, hogy $s > \frac{1}{2}$ esetén a (7), (7a) egyenletekkel leírt sokaság többé nem irreducibilis, ha ezekben az egyenletekbe az $m=0$ értéket behelyettesítjük,¹⁵ hanem több sokaságra esik szét, amelyeknek a spin $s, s-1, s-2, \dots$ értékeit tulajdoníthatjuk. Ezek a sokaságok adott p mellett két lineárisan független elemet tartalmaznak. Csak az $s=0$ sokaság tartalmaz csupán egy elemet adott p mellett.

A következők szempontjából fontos megjegyezni, hogy mindezen lineáris sokaságokban mindkét hullámfüggvény (ill. $s=0$ esetén a hullámfüggvény) bizonyos transzformációkkal szemben változatlan marad. A p_1, p_2, p_3, p_4 komponensek értékei legyenek rendre $0, 0, p, p$, azaz a hullám a Z -irányba terjedjen tovább. Ekkor a kérdéses Lorentz-transzformációk

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\gamma & \gamma \\ 0 & \gamma & 1 - \frac{1}{2}\gamma^2 & \frac{1}{2}\gamma^2 \\ 0 & \gamma & -\frac{1}{2}\gamma^2 & 1 + \frac{1}{2}\gamma^2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\gamma' & \gamma' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma' & 0 & 1 - \frac{1}{2}\gamma'^2 & \frac{1}{2}\gamma'^2 \\ \gamma' & 0 & -\frac{1}{2}\gamma'^2 & 1 + \frac{1}{2}\gamma'^2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

tetszőleges γ, γ' mellett; szorzatuk [a (8) transzformációk felcserélhetők] ugyancsak megengedett transzformáció:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\gamma' & \gamma' \\ 0 & 1 & -\gamma & \gamma \\ \gamma' & \gamma & 1 - \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\gamma'^2 & \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma'^2 \\ \gamma' & \gamma & -\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\gamma'^2 & 1 + \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma'^2 \end{pmatrix}. \quad (8a)$$

Innen arra következtethetünk, hogy azon lineáris sokaságokon kívül, amelyek a véges $m^2c^2 = p_4^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$ -hez tartozó sokaságokból az $m \rightarrow 0$ határátmenettel állnak elő, még más lineáris sokaságok is léteznek, melyekre $p_4^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = 0$. Meg lehet mutatni, hogy ez valóban így van.¹⁶ A kérdéses sokaságok esetén $\varphi(p_1, p_2, p_3, p_4, \zeta)$ -ban ζ végtelen sok értéket vehet fel. Be lehet vezetni ζ helyett a π, π' folytonos változókat oly módon, hogy $\varphi(0, 0, p, p, \pi, \pi')$ -t a (8a) transzformációk az

$$e^{i(\pi\gamma + \pi'\gamma')/p} \varphi(0, 0, p, p, \pi, \pi') \quad (9)$$

függvénybe viszik át. Az így kapott lineáris sokaság csak akkor irreducibilis, ha a

$$\pi^2 + \pi'^2 \quad (10)$$

¹⁴ Lásd a ⁹ lábjegyzetben idézett dolgozatot.

¹⁵ További, azonban nem különösen jelentős komplikáció, hogy ezek a sokaságok $m=0$ esetén nem írhatók le többé (7), (7a) segítségével. Ha a (7), (7a) egyenleteket használni kívánjuk ebben az esetben, az $m \rightarrow 0$ határátmenetet a megoldásokban kell elvégeznünk. Azonban ezek is, mint azt e cikkben kifejtjük, reducibilis sokaságba mennek át.

¹⁶ Lásd a ⁹ lábjegyzetben idézett dolgozatot.

mennyiségnek ugyanaz az értéke minden φ -re. Ez a feltétel teljesen analóg azzal, amelyet az (5) képlettel kapcsolatban a p -kre vonatkozóan vezettünk be. A (10) kifejezés értéke a rendszert ugyanolyan értelemben jellemzi, ahogyan (5) értéke jellemzi a véges tömegű rendszert. A (10) mennyiség dimenziója: impulzus a négyzetben, így lehetőség van arra, hogy \hbar segítségével egy hosszat definiáljunk.

Ténylegesen kétfajta, a most megbeszélte tulajdonságokkal rendelkező lineáris sokaság létezik. A különbség annyi, hogy az egyik fajta sokaság a Lorentz-csoport egyértékű ábrázolásával van kapcsolatban, a másik fajta pedig kétértékű ábrázolással. Azt lehet mondani, hogy az első esetben a részecskének egész számú végtelen spinje, a második esetben feles számú végtelen spinje van.

3. Az előbbi két szakasz legnagyobb részét leíró jellegű volt, s ami a szigorú bizonyításokat illeti, egy korábbi dolgozatra¹⁷ kellett hivatkoznunk. A most következő szakaszok az említett előbbi munkától függetlenek lesznek, s az ott igen absztrakt eszközökkel leírt lineáris sokaságokat szokásosabb módszerekkel fogják leírni.

Nem nehéz olyan relativisztikusan invariáns egyenletet felírni az impulzus-térben, amelynek megoldásai a fent említett sokaságot alkotják. A hullámfüggvények p_1, p_2, p_3, p_4 mellett még négy másik vektorkomponenstől ($\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 = c\tau$) is függnének. Az egész számú végtelen spin-esetében

$$(p_4^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) \varphi = 0, \quad (11.1)$$

$$(p_4 \xi_4 - p_1 \xi_1 - p_2 \xi_2 - p_3 \xi_3) \varphi = 0, \quad (11.2)$$

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2 - l^2) \varphi = 0, \quad (11.3)$$

$$\left(p_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + p_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + p_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4} + i\hbar \Xi \right) \varphi = 0. \quad (11.4)$$

Ezeket az egyenleteket úgy kaptuk, hogy először π és π' helyett bevezettük a négy $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ mennyiséget. E mennyiségek változási tartományát, valamint φ -nek azoktól való függését a (11.2), (11.3), (11.4) egyenletek segítségével azután oly módon korlátoztuk azonban, hogy végeredményben csupán két változónk van, melyek között azonfelül fennáll még az az összefüggés, amely kifejezi (10) konstans voltát. A felesleges változók bevezetése lehetővé teszi, hogy az alapegyenleteknek a (11) alakot adjuk, melyből relativisztikus invarianciájuk könnyen leolvasható.

A koordinátatérben a (11) egyenletek a következőképpen festenek:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) \Phi \equiv Q_1 \Phi = 0, \quad (12.1)$$

$$\left(\tau \frac{\partial}{\partial t} + \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Phi \equiv Q_2 \Phi = 0, \quad (12.2)$$

$$\left(\sum \xi_i^2 - c^2 \tau^2 - l^2 \right) \Phi \equiv Q_3 \Phi = 0, \quad (12.3)$$

$$\left(\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \xi_i} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} - \Xi \right) \Phi \equiv Q_4 \Phi = 0; \quad (12.4)$$

itt l, Ξ valós állandók.

¹⁷ Lásd a ⁹ lábjegyzetben idézett dolgozatot.

Ezekben, valamint az összes következő egyenletekben a három térbeli koordinátára összegezni kell; x és ξ az x_1, x_2, x_3 , ill. a ξ_1, ξ_2, ξ_3 komponensekkel rendelkező háromdimenziós vektorok jele lesz. A (12) egyenletek nyilvánvalóan relativisztikusan invariánsak, ξ és τ szabad négyesvektort alkotnak, vagyis olyan négyesvektort, mely — mint az impulzus vagy két helyzetvektor különbsége is — invariáns a translációkkal szemben. A ξ, τ vektor mértékegységét megváltoztatva, a (11.3) és (12.3) képletekben l^2 -et 1-gyel helyettesíthetjük. A következőkben ezt fel fogjuk tenni. A ξ -k ekkor dimenziótlanok lesznek, Ξ dimenziója pedig reciprok hossz lesz.

Úgy vélhetné valaki, hogy akárhány (11) vagy (12) fajtájú egyenletrendszer fel lehet írni. Az általános elméletből¹⁸ következik azonban, hogy mindezek az egyenletrendszerek, amennyiben ellentmondásmentesek, ekvivalensek (11)-gyel és (12)-vel, hacsak véges spinű lineáris sokaságot nem foglalnak magukban és ha az (5) kifejezés nem negatív, vagyis a tömeg nem imaginárius. (Azonfelül a $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$ esetet is ki kell zárunk.) A (12) típusú egyenletrendszerek ellentmondásmentességének szükséges feltétele, hogy bármely két Q operátor kommutátorának eltűnése az egyenletek következménye legyen. Esetünkben Q_1 az összes többi Q -val kommutál, ugyanakkor

$$[Q_2, Q_3] = 0, [Q_2, Q_4] = Q_1, [Q_3, Q_4] = -2Q_2. \quad (13)$$

A (13) egyenletekből azonnal látható, hogy a (12.1) egyenletbe nem lehet tömegtagot bevezetni. Másrésről természetesen (11) és (12) két speciális alak, melyek leírják a mi lineáris sokaságunkat, és bizonyosan más egyenletrendszereket is lehet találni, amelyek szintén megteszik ezt.

A teljesség kedvéért jegyezzük meg, hogy a feles számú végtelen spinű részecskét leíró egyenletrendszerben (12.1) az

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \sum s_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \Phi = 0 \quad (14)$$

egyenlettel helyettesítendő. Ebben az esetben Φ még tartalmaz egy spinváltozót; s_k a Pauli-féle spinmátrixokat jelöli. Mindamellett mi a következőkben egyértékű hullámfüggvényekre, azaz a (11), (12) egyenletrendszerekre szorítkozunk.

4. A kérdés, melyre választ próbálunk találni, a (12) egyenleteket kielégítő két hullámfüggvény,¹⁸ Φ_1 és Φ_2 skaláris szorzatát illeti. Természetes gondolatnak látszhat, hogy ezt a skaláris szorzatot egyszerűen $\int \dots \int \Phi_1^* \Phi_2 dx d\xi d\tau$ adja meg (a dx differenciál $dx_1 dx_2 dx_3$ helyett, $d\xi$ pedig $d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ helyett áll). Könnyen belátható azonban, hogy ez az integrál végtelen, és végtelen marad akkor is, ha az integrálást $d\tau$ szerint elhagyjuk. Ugyanez vonatkozik azokra az integrálokra is, amelyeket az

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) \Psi(x, y, z, t) = 0 \quad (15)$$

Klein—Gordon—Kudar-féle hullámgörbe skaláris szorzatának mintájára próbálunk képezni, Φ időderiváltját bevezetve.

¹⁸ Szeretnénk arra emlékeztetni, hogy az általános elméletből következik: az irreducibilis lineáris sokaság elemeinek skalárszorzatát a relativisztikus invariancia követelménye egy közös konstans faktor erejéig meghatározza.

A módszert, mellyel φ és Φ hullámfüggvényeink skaláris szorzatát meg kívánjuk határozni, először a (15) egyenlet esetében szeretnénk megvilágítani. Az impulzus-térben (15) a következő alakú:

$$(p_4^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)\psi(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0. \quad (16)$$

A matematikai fogás, melynek segítségével (25)-öt le fogjuk vezetni, abban áll, hogy (16)-ot először figyelmen kívül hagyjuk, de az összes fizikai mennyiséget (így pl. a skaláris szorzatot) úgy definiáljuk, hogy ψ -nek csak azok az értékei adnak hozzájárulást, amelyek (16)-ot kielégítik. Ez nyilvánvalóan teljesül a

$$(\psi_1, \psi_2) = 2 \int \psi_1^* \psi_2 \delta(p_4^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) dp dp_4 \quad (17)$$

választás mellett ($dp = dp_1 dp_2 dp_3$), mely egyben a relativisztikus invarianciát is biztosítja. Vezessük be p_4 helyett a P új változót:

$$p_4^2 = P + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2; \quad (18)$$

ekkor (17) helyett

$$(\psi_1, \psi_2) = \int \psi_1^* \psi_2 \delta(P)(P + p^2)^{-1/2} dP dp = \int \psi_1^* \psi_2 |p|^{-1} dp \quad (19)$$

is írható, ahol ψ_1 -ben és ψ_2 -ben p_4 helyére $|p|$ helyettesítendő.¹⁹

Ha (19)-et a koordinátatérbeli Ψ hullámfüggvényekkel kívánjuk kifejezni, úgy mindenekelőtt legyen

$$\Psi_1(x, t) = (2\pi)^{-3/2} \int \psi_1(p, p_4) e^{-i(p \cdot x - p_4 ct)} \delta(p_4^2 - p^2) dp dp_4 \quad (20)$$

(az egyszerűség kedvéért \hbar -t 1-gyel tettük egyenlővé). A kapcsolat Ψ_1 és ψ_1 között ugyancsak relativisztikusan invariáns és az így bevezetett Ψ_1 eleget tesz (15)-nek. A (18) helyettesítéssel a p_4 szerint való integrálást ismét kiküszöbölhetjük. Ily módon kapjuk a

$$\Psi_1(x, t) = (2\pi)^{-3/2} \int \psi_1(p, |p|) e^{-i(p \cdot x - |p| ct)} |p|^{-1} dp, \quad (20a)$$

azonkívül a

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = ic(2\pi)^{-3/2} \int \psi_1(p, |p|) e^{-i(p \cdot x - |p| ct)} dp \quad (21)$$

¹⁹ Ennek a levezetésnek az a célja, hogy egy utat mutasson, melyen racionális módon el lehet jutni a (19) alakhoz, különösen pedig a $|p|^{-1}$ faktorhoz; mégpedig olyan utat, amely a (11)-et kielégítő φ függvények skaláris szorzatának meghatározására is alkalmas.

A levezetés még a következőképpen is összefoglalható. A (16) egyenlet azt mondja, hogy ψ csak olyan értékrendszerekre van értelmezve, amelyek rajta fekszenek a $p_4^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ kúpon. Defináljuk először ψ -t önkényesen olyan pontokra is, amelyek nem fekszenek rajta ezen a kúpon. Ez lehetővé teszi, hogy (17) alakú relativisztikus kifejezéseket írjunk fel, ahol még δ tetszőleges függvény lehet. Ahhoz azonban, hogy a skaláris szorzat értelmes kifejezés legyen, szükséges, hogy ψ -nek csak azoktól az értékeitől függjön, amelyeket az ezen a kúpon vesz fel. Így az előbb említett tetszőleges függvény valójában csak a δ -függvény lehet, és közvetlenül a (17), (19) kifejezésekre jutunk.

A (11.1) és (11.2) egyenletek (27) és (33) levezetésével kapcsolatban ugyanazt a szerepet fogják játszani, amit az imént (16) játszott; (11.3) a skalárszorzat minden alakja esetében ezt a szerepet tölti be.

kifejezést. Megfordítva, a Fourier-féle integráltétel lehetővé teszi, hogy $|p|^{-1}\psi_1(p, |p|)$ -t és $\psi_1(p, |p|)$ -t kifejezzük $\Psi_1(x, 0)$ és $\partial\Psi_1(x, 0)/\partial t$ segítségével:

$$\begin{aligned} |p|^{-1}\psi_1(p, |p|)^* &= (2\pi)^{-3/2} \int \Psi_1(x, 0)^* e^{-ip \cdot x} dx, \\ \psi_2(p, |p|) &= (2\pi)^{-3/2} (ic)^{-1} \int \frac{\partial}{\partial t} \Psi_2(x, 0) e^{ip \cdot x} dx. \end{aligned} \quad (22)$$

Ezt (19)-be behelyettesítve végeredményképpen kapjuk:

$$(\psi_1, \psi_2) = (\Psi_1, \Psi_2) = \frac{1}{ic} \int \Psi_1(x, 0)^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi_2(x, 0) dx. \quad (23)$$

Bár ez már nagyon hasonlít a skaláris szorzat helyes kifejezésére, mégsem azonos vele. Arról is könnyen meggyőződhetünk, hogy (23) általában nem relativisztikusan invariáns; még csak nem is független az időtől. Ennek az az oka, hogy az eddigiekben hallgatólágosan tett feltevés, mely szerint (19)-ben a pozitív négyzetgyök veendő, nem következik (15)-ből. Ha ez a feltevés helytálló volna, akkor $\partial/\partial t$ ténylegesen antihermitikus operátor lenne és (25) mindkét részének ugyanaz lenne az értéke, azaz (23) helyes lenne. Valójában azonban Ψ_1 kétfajta tagot tartalmaz:

$$\Psi_1 \sim a_1 e^{-iEt} + b_1 e^{iEt}, \quad (24a)$$

hasonlóképpen $\frac{\partial \Psi_2}{\partial t}$ is:

$$\partial \Psi_2 / \partial t \sim -iEa_2 e^{-iEt} + iEb_2 e^{iEt}. \quad (24b)$$

Ebből következik, hogy $\Psi_1^* \partial \Psi_2 / \partial t$ ilyen típusú tagokat tartalmaz:

$$\Psi_1^* \partial \Psi_2 / \partial t \sim -iEa_1^* a_2 + iEb_1^* b_2 + iEa_1^* b_2 e^{2iEt} - iEb_1^* a_2 e^{-2iEt} \quad (24)$$

Láthatjuk: ha mind a , mind b zérustól különböző, $\Psi_1^* \partial \Psi_2 / \partial t$ függ az időtől. Ezzel szemben $\Psi_1^* \partial \Psi_2 / \partial t - \Psi_2 \partial \Psi_1^* / \partial t$ az időtől független marad s ténylegesen a helyes skaláris szorzatot szolgáltatja:

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \frac{1}{2ic} \int \left(\Psi_1^* \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} - \Psi_2 \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial t} \right) dx. \quad (25)$$

Az olyan hullámfüggvények mellett, melyekben vagy csak pozitív, vagy csak negatív energiájú tagok lépnek fel, (25) két része azonos. Ha azonban a Ψ_1, Ψ_2 függvények pozitív és negatív energiaértékeket egyaránt tartalmaznak, csak a teljes (25) kifejezés lesz független az időtől; azonkívül — amint azt közvetlenül igazolhatjuk — a (25) kifejezés relativisztikusan invariáns.²⁰ Habár a fenti (bizonyára sokak előtt ismert) levezetés utolsó részét [a (24a) képlettől] szigorúbbá lehetne tenni, a fenti alak megvilágíthatja azt az eljárást, amelynek alapján a (12) egyenleteket kielégítő két Φ függvény skaláris szorzatát kiszámíthatjuk.

5. Először ismét az impulzustérben adjuk meg a skaláris szorzat kifejezését,

²⁰ E relativisztikus invarianciához szükséges, hogy a ψ függvények eleget tegyenek (15)-nek. Hasonlóképpen (39), (41) és (43) relativisztikus invarianciájához szükséges lesz, hogy a Φ függvények kielégítsék a (12.1), (12.2) és a (12.4) egyenleteket. Ezt a 6. szakaszban mindvégig feltesszük.

azaz: a (11) egyenleteket teljesítő két φ függvény skalárszorzatát adjuk meg. Analógiában (17)-tel, kézenfekvő a következő választás:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = 2 \int \varphi_1^* \varphi_2 \delta(p_4^2 - p^2) \delta(p_4 \xi_4 - p \cdot \xi) \delta(\xi^2 - \xi_4^2 - 1) dp dp_4 d\xi d\xi_4.$$

Az ebben a kifejezésben fellépő δ -függvények feleslegessé teszik, hogy a (11.1), (11.2), (11.3) egyenletek érvényességét a φ függvényekre megköveteljük. Ezzel szemben nem helyettesítik (11.4)-et, melyből a

$$\left(p_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + p_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + p_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4} \right) \varphi_1^* \varphi_2 = 0 \quad (26)$$

összefüggés fennállása is következik. Ez az egyenlet maga után vonja azonban, hogy $\varphi_1^* \varphi_2$ ugyanazt az értéket veszi fel, ha mindegyik ξ_i -hez p_i ugyanazon többszörösét adjuk hozzá. Ez a δ -függvények argumentumait nem változtatja meg, ha azok értéke eredetileg mind zérus volt. Ebből következik, hogy a skaláris szorzat fent felírt kifejezése divergál, minthogy az integrandus bizonyos egyenesek mentén konstans. Ezen azonban segíthetünk: az integrációt egy hétdimenziós síkra korlátozzuk, oly módon, hogy (26) az integrál értékét ezen sík helyzetétől függetlenül tegye. Így a

$$(\varphi_1, \varphi_2) = 2 \int \varphi_1^* \varphi_2 \delta(p_4^2 - p^2) \delta(p_4 \xi_4 - p \cdot \xi) \delta(\xi^2 - \xi_4^2 - 1) (u_4 p_4 - u \cdot p) \delta(u \cdot \xi - u_4 \xi_4 - a) dp dp_4 d\xi d\xi_4 \quad (27)$$

kifejezéshez jutunk. Itt u tetszőleges háromdimenziós vektor, melynek komponensei u_4 -gyel egységnyi hosszúságú négyesvektort képeznek:

$$u_4^2 - u^2 = 1; \quad (27a)$$

a tetszőleges konstans. A (27) kifejezés nyilván relativisztikusan invariáns volna, ha a -tól is és az u, u_4 négyesvektor irányától is független lenne. De ez valóban így is van és könnyen igazolható, ha tekintetbe vesszük, hogy a φ függvények (11.4)-et és (26)-ot is kielégítik. Ha pl. (27)-et a szerint differenciáljuk, az eredményben alkalmazható az

$$(u_4 p_4 - u \cdot p) \delta'(u \cdot \xi - u_4 \xi_4 - a) = - \left(\sum p_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} + p_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4} \right) \delta(u \cdot \xi - u_4 \xi_4 - a) \quad (28)$$

azonosság. A (28) jobb oldalán álló differenciáloperátor parciális integrálással „áthárítható” a többi tényezőre. Így (26) folytán zérust kapunk, ha ezt a differenciáloperátort $\varphi_1^* \varphi_2$ -re alkalmazzuk. Ha $\delta(p_4 \xi_4 - p \cdot \xi)$ -re alkalmazzuk, az eredményül kapott integrál tartalmazza a $(\sum p_i^2 - p_4^2) \delta'(p_4 \xi_4 - p \cdot \xi)$ és $\delta(p_4^2 - p^2)$ tényezőket. Így az

$$x \delta(x) = 0 \quad (29)$$

azonosság következményeképpen eltűnik. Hasonlóképpen eltűnik az a tag is, amelyben a differenciáloperátort $\delta(\xi^2 - \xi_4^2 - 1)$ -re kell alkalmazni.

A (27) kifejezés u, u_4 irányától való függetlenségének bizonyítása céljából alkalmazzuk rá az

$$u_j \frac{\partial}{\partial u_k} - u_k \frac{\partial}{\partial u_j} \quad \text{és} \quad u_j \frac{\partial}{\partial u_4} + u_4 \frac{\partial}{\partial u_j} \quad (30)$$

operátorokat. Az első esetben (27) két utolsó tényezője a következő kifejezést szolgáltatja:

$$(u_k p_j - u_j p_k) \delta(u \cdot \xi - u_4 \xi_4 - a) + (u_4 p_4 - u \cdot p)(u_j \xi_k - u_k \xi_j) \delta'(u \cdot \xi - u_4 \xi_4 - a) =$$

$$= \left(\sum p_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} + p_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4} \right) (u_k \xi_j - u_j \xi_k) \delta(u \cdot \xi - u_4 \xi_4 - a). \quad (31)$$

A (31) egyenlet jobb oldalán ugyanaz a differenciáloperátor áll, amely (28)-ban is fellépett; a többi tényezőre áthárítva ismét zérust ad. Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha (30) operátorok közül a másodikat alkalmazzuk (27)-re. Ez a kifejezés így tehát független a -tól s egyszersmind az u, u_4 négyesvektor irányától, amiből következik relativisztikus invarianciája. A δ -függvényekkel való számolás első pillantásra némileg nyugtalanítónak tetszhet, ez azonban csak egy műfogás, mely lehetővé teszi, hogy elkerüljük új változók bevezetését és függvénydeterminánsok kiszámítását. A következőkben a (27) kifejezésnek ezt az egyszerűbb alakját fogjuk használni, amelyet úgy kapunk, hogy a -nak a zérus értéket adjuk és u, u_4 irányának az időtengelyt választjuk. Így (27) a következő alakot ölti:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = 2 \int \varphi_1^* \varphi_2 \delta(p_4^2 - p^2) \delta(p \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) p_4 dp dp_4 d\xi. \quad (32)$$

Ezt végül (18) szerint átalakíthatjuk. Így módon kapjuk:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int \varphi_1^* \varphi_2 \delta(p \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dp d\xi; \quad (33)$$

itt φ -be a $p_4 = |p|$ és $\xi_4 = c\tau = 0$ értékek helyettesítendőek be. A (33) integrált az egész háromdimenziós impulzustérre kell képezni, ami pedig a ξ_1, ξ_2, ξ_3 változókat illeti, egy egységkörre kell integrálnunk, melynek síkja átmegy a koordináta-rendszer kezdőpontján és p -re merőleges. A (33) egyenletben — ellentétben (19)-cel — nem lép fel a $|p|^{-1}$ tényező; ezt a (32)-beli p_4 okozza. Ez pedig a (27)-beli $u_4 p_4 - u \cdot p$ tényezőtől származik, ami a ξ -térbeli integrációs sík és a p, p_4 vektor közbezárt szögének koszinuszát adja meg. A $|p|^{-1}$ tényező hiánya a végeredményben azt fogja eredményezni, hogy a (25)-beli egy időderivált helyett (42) alatt két időderivált lép majd fel.

Most az impulzustérbeli φ hullámfüggvényről áttérünk a koordinátatérbeli Φ hullámfüggvényre. Ez a

$$\Phi(x, t, \xi, \xi_4) =$$

$$= 2(2\pi)^{-1} \int \varphi(p, p_4, \xi, \xi_4) e^{-i(p \cdot x - p_4 ct)} \delta(p_4^2 - p^2) \delta(p \cdot \xi - p_4 \xi_4) dp dp_4 \quad (34)$$

transzformáció segítségével történhet. A (34) alakú Φ automatikusan eleget tesz a (12.1), (12.2) egyenleteknek. Eleget tesz Φ a (12.4) egyenletnek is, ami (11.4) folyománya, mely a feltevés szerint φ -re fennáll. Végül Φ -nek a $\xi^2 - \xi_4^2 - 1 = 0$ hiperboloidon felvett értékei csakis φ -nek ugyanezen hiperboloidon felvett értékeitől függnék. Nyilvánvaló az is, hogy a (34) összefüggés relativisztikusan invariáns.

A (34) képletben t és τ értékét zérusnak választhatjuk és p_4 -re — ugyanúgy, mint (20) alatt — integrálhatunk:

$$\Phi(x, 0, \xi, 0) = (2\pi)^{-1} \int \varphi(p, |p|, \xi, 0) e^{-i(p \cdot x)} \delta(p \cdot \xi) |p|^{-1} dp. \quad (35)$$

A δ -függvényt (35) alatt úgy értelmezhetjük, hogy a p_1, p_2, p_3 változókra való integrálást csak a ξ -re merőleges síkra kell kiterjeszteni. Ekkor, megfordítva, $\Phi(x, 0, \xi, 0)$ mint x_1, x_2, x_3 függvénye a ξ vektor irányában konstans lesz, ami egyébként következménye a (12.2) egyenletnek. Ha, megfordítva, $\varphi(p, |p|, \xi, 0)$ -t $\Phi(x, 0, \xi, 0)$ segítségével akarjuk kifejezni, úgy felhasználhatjuk a Fourier-féle tételt két dimenzióban; integrálnunk tetszőleges, a ξ -re merőleges síkra kell. Ily módon kapjuk:

$$|p|^{-1} \varphi(p, |p|, \xi, 0) = (2\pi)^{-1} \int \Phi(x, 0, \xi, 0) e^{i(p \cdot x)} \delta(x \cdot \xi) dx. \quad (36)$$

A (34)-ből t szerint való differenciálással nyert egyenletből ugyanígy kapjuk:

$$\varphi(p, |p|, \xi, 0) = (2\pi ic)^{-1} \int \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, 0, \xi, 0) e^{i(p \cdot x)} \delta(x \cdot \xi) dx \quad (36a)$$

A (33) skalárszorzat kiszámításához két φ szorzatának integrálját az impulzustér azon síkjára kell képeznünk, amely merőleges ξ -re. A Fourier-féle tétel szerint ez egyenlő a megfelelő Fourier-transzformáltak szorzatának integráljával; ezt az integrált (36a) szerint a koordinátatér egy ξ -re ugyancsak merőleges síkjára kell képeznünk:

$$\int \varphi_1^* \varphi_2 \delta(p \cdot \xi) dp = \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \delta(x \cdot \xi) dx. \quad (37)$$

Ez végül a (33) skalárszorzat számára a

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\Phi_1, \Phi_2) = \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \delta(x \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi \quad (38)$$

kifejezést szolgáltatja, mely analogonja (23)-nak. A (38) képletben Φ_1 és Φ_2 egyaránt a $t = \tau = 0$ helyen veendő. Még egyszer hangsúlyozni kívánjuk, hogy (33)-ban és (38)-ban a $\delta(p \cdot \xi)$, ill. $\delta(x \cdot \xi)$ tényezők egészen különböző okokból lépnek fel. Az első kifejezésben $\delta(p \cdot \xi)$ azért lép fel, mert a skaláris szorzatnak a hullámfüggvény azon értékeitől szabad csak függnie, amelyekre teljesül $p \cdot \xi = 0$. Ezzel szemben (38) alatt a $\delta(x \cdot \xi)$ tényező azért lép fel, mert az integrandus független x -nek a ξ vektor irányába eső komponensétől. Elég tehát, ha ennek a komponensnek egyetlen értékét adunk.

Levezetését tekintve (38) analogonja (23)-nak. Ha Φ_1 és Φ_2 csak pozitív vagy csak negatív energiaértékeket tartalmazna, úgy ez a kifejezés helyes lenne. Minthogy ezt a (12) egyenletek nem biztosítják, (38) általában éppoly kevésbé helytálló, mint (23). Ez már abból is látható mindkét esetben, hogy e kifejezések helyett másokat is le lehetett volna származtatni, amelyek a most levezetett kifejezéssel általában nem egyenértékűek. Esetünkben ilyen kifejezések

$$(\Phi_1, \Phi_2) = -c^{-2} \int \Phi_1^* (\partial^2 \Phi_2 / \partial t^2) \delta(x \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi \quad (38a)$$

és

$$(\Phi_1, \Phi_2) = -c^{-2} \int (\partial^2 \Phi_1^* / \partial t^2) \Phi_2 \delta(x \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi. \quad (38b)$$

Mindkét kifejezés következik a (36), valamint a (34)-ből kétszeri, t szerint való differenciálással levezetett

$$|p| \varphi(p, |p|, \xi, 0) = -(2\pi c^2)^{-1} \int \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(x, 0, \xi, 0) e^{i(p \cdot x)} \delta(x \cdot \xi) dx \quad (36b)$$

egyenletből. Ha pl. Φ_1 és Φ_2 csak pozitív energiaértékeket tartalmaznak, akkor a (38) alatt felírt három kifejezés egyenértékű és relativisztikusan invariáns. Ha Φ_1 és Φ_2 egyaránt tartalmaznak pozitív és negatív energiaértékeket, úgy e három kifejezés között egy sincs, mely akár csak az időtől is független volna. A (24) alatt megadott számításhoz teljesen hasonló számítással meggyőződhetünk azonban arról, hogy a

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{1}{4c^2} \int \left(2 \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \Phi_1^* \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial t^2} \Phi_2 \right) \delta(x \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi \quad (39)$$

kifejezésnek időtől függetlennek kell lennie, s ki fog tűnni, hogy (39) ténylegesen a helyes skaláris szorzatot adja.

Mielőtt rátérnénk (39) relativisztikus invarianciájának bizonyítására, a (38a) kifejezést kissé átalakítjuk. A (12.1) egyenlet felhasználásával a második időderívtát helyettesíthetjük a Laplace-operátorral, úgyhogy (38a) a következő alakot veszi fel:

$$\begin{aligned} & - \int \Phi_1^* \Delta \Phi \delta(x \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi = \\ & = \int \left[\sum \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i} \delta(x \cdot \xi) + \sum \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} \Phi_1^* \xi_i \delta'(x \cdot \xi) \right] \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi = \\ & = \int (\text{grad } \Phi_1^* \cdot \text{grad } \Phi_2) \delta(x \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi. \end{aligned} \quad (40)$$

A második sort parciális integrálással kapjuk, a harmadikat pedig azon megjegyzés alapján, hogy a második sor második tagja (12.2) folytán eltűnik, mivel mind Φ_1 -be, mind Φ_2 -be $\tau=0$ helyettesítendő. A fenti transzformáció elvégezhető akkor is, ha Φ_1 vagy Φ_2 helyén Φ_1 , ill. Φ_2 tetszőleges, az idő vagy egy térkoordináta szerint képezett deriváltja áll. A jelen esetben (40) közvetlenül adja a

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \text{grad } \Phi_1^* \cdot \text{grad } \Phi_2 \right) \delta(x \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi \quad (41)$$

eredményt. A δ -tényezők folytán a ξ_1, ξ_2, ξ_3 változókra való integrálást az x -re merőleges síkban fekvő egységkör mentén kell elvégezni.

6. A (39), (41) kifejezések első tekintetre bizonyval különösnek tetszenek: az integrálnak nincs egyszerű relativisztikus jelentése, s még csak nem is nyilvánvaló, hogy az egész kifejezés eltolásinvariáns. Az utóbbi, és (39), (41) teljes relativisztikus invarianciája is, mindazonáltal könnyen megmutatható. Annak, hogy a skaláris szorzat oly sok egyenértékű alakban felírható (mint azt a relativisztikus invariancia megkívánja), az az oka, hogy t -t és τ -t, valamint az integrációs sík helyzetét önkényesen rögzítettük.

A (41) kifejezés relativisztikus invarianciáját a legegyszerűbben az infinitezimális operátorok segítségével lehet megmutatni. Ilyen operátor tíz van: három eltolás a térben, egy az időben, három elforgatás és három szoros értelemben vett Lorentz-transzformáció.

A térbeli eltolásinvariancia azt jelenti, hogy pl.

$$\int \delta(x \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) \partial G / \partial x_1 dx d\xi \quad (42)$$

eltűnik. Itt

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \text{grad } \Phi_1^* \cdot \text{grad } \Phi_2 \right). \quad (42a)$$

A (42) integrál kiszámítása céljából a $\partial/\partial x_1$ differenciálást átháríthatjuk $\delta(x \cdot \xi)$ -re, mely így $\xi_1 \delta'(x \cdot \xi)$ -be megy át. Azonkívül $\delta(\xi^2 - 1)$ helyett $\delta(\xi^2 - 1) \sum \xi_i^2$ is írható, úgyhogy (42) a kifejezéssel is egyenlő. Ha itt a $\partial/\partial x_i$ -t ismét áthárítjuk G -re, úgy a kapott kifejezésben fellép $\sum \xi_i \partial G/\partial x_i$. Ez azonban (42a) és (12.2) folytán eltűnik.

A (41) kifejezésnek az időtől való függetlensége közvetlenül következik, ha t szerint differenciálunk és tekintetbe vesszük a (40) egyenlet után tett megjegyzést. A fentiek ekkor azt is mutatják, hogy általánosabban

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int G \delta(x \cdot \xi - b \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi, \quad (43)$$

ahol $\tau=0$, az időváltozó és a b vektor azonban tetszés szerint választható.

A (39), (41) kifejezések nyilvánvalóan invariánsak a térbeli elforgatásokkal szemben, úgyhogy már csak a szoros értelemben vett Lorentz-transzformációk hatását kell vizsgálnunk. Vizsgáljunk meg pl. egy infinitezimális Lorentz-transzformációt az x_1, t síkban. Minden tagot, amely a két koordinátarendszer v relatív sebességében másodrendű, elhanyagolunk.

Először is a t és x_1 szerint való differenciálásokat G -ben az új koordináták szerint való differenciálásokkal kell helyettesítenünk. Ennek eredményeképpen a (41) integrál mellett a következő tagok lépnek még fel:

$$\frac{v}{c^2} \int \left(\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \right) \delta(x \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi. \quad (44)$$

Azonkívül Φ -ben a régi koordináták helyett be kell vezetni az újakat. Ez a következő új tagok felléptét eredményezi G mellett:

$$\frac{v}{c} \left(\frac{x_1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + ct \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\xi_1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} + c\tau \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) G.$$

A második és a negyedik tag elhagyható, mivel (41)-be a $t=\tau=0$ értéket kell behelyettesítenünk. Így a következő új tagokat kapjuk:

$$\frac{v}{2c^2} \int x_1 \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \sum \frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial x_i \partial t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial t} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + \sum \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_i \partial t} \right\} \delta(x \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi \quad (45a)$$

és

$$\frac{v}{2c^2} \int \xi_1 \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial t \partial \tau} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \sum \frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial x_i \partial \tau} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t \partial \tau} + \sum \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_i \partial t} \right\} \delta(x \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi. \quad (46a)$$

A következő számítás, amelyet csupán vázlatosan ismertetünk, megmutatja, hogy (44), (45a) és (46a) eltűnik, hogy tehát (41) tényleg relativisztikusan invariáns.

A (45a) képletben az idő szerint is differenciált Φ előtt álló $\partial/\partial x_i$ differenciálást áthárítjuk a többi tényezőre. Ha $\partial/\partial x_i$ -t a többi Φ -re alkalmazzuk, olyan tagokat kapunk, amelyek a (45a) alatt csak az idő szerint differenciált tagokkal együtt (12.1) folytán eltűnnek. Azok a tagok, amelyekben a $\partial/\partial x_i$ differenciálást $\delta(x \cdot \xi)$ -re

hárítjuk át, (12.2) folytán tűnnek el. Csak azok a tagok maradnak meg, amelyekben a $\partial/\partial x_i$ -t x_1 -re hárítottuk át. Így módon (45a) a

$$-\frac{v}{2c^2} \int \left(\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right) \delta(\xi^2 - 1) \delta(x \cdot \xi) dx d\xi \quad (45b)$$

kifejezésbe megy át.

A (46a) kifejezésben a t és τ szerint való vegyes differenciálást, (12.4)-et segítségével híva, x_i és ξ_j szerint való differenciálásokkal helyettesítjük. Ez az a lényeges pont, ahol (12.4)-et felhasználjuk. Az x_j és ξ_j szerint való differenciálások azután átháríthatók a többi tényezőre. Azokban a tagokban azonban, amelyek az x_i változók szerint való differenciálásokat tartalmaznak, ezeket a csak az x_i szerint differenciált Φ -kről a többi tagra hárítjuk át. Ha ezt (46a) első és negyedik tagja esetében elvégezzük, meglehetősen hosszadalmas, de igen egyszerű számítás után, (12.2) felhasználásával (46a) mondott tagjai számára a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} & \frac{v}{2c^2} \int \xi_1 \Phi_1^* \left(\sum \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial t \partial x_j \partial \xi_j} - \Xi \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \sum \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \tau \partial x_j^2} \right) \delta(x \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi + \\ & + \frac{v}{2c_2} \int \xi_1 \Phi_1^* \sum \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t \partial x_j} x_j \delta'(x \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi + \\ & + \frac{v}{2c^2} \int \Phi_1^* \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t \partial x} \delta(x \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi. \end{aligned} \quad (46b)$$

Az első integrál a (12.1), valamint a (12.4) t szerint való differenciálásával kapott egyenlet következtében eltűnik. A második integrálban $\delta(\xi^2 - 1) \delta'(x \cdot \xi)$ helyett $\delta(\xi^2 - 1) \sum \xi_i \partial \delta(x \cdot \xi) / \partial x_i$ írható; a $\partial/\partial x_i$ -t átháríthatjuk a többi tényezőre. A (12.2) egyenlet folytán minden tag eltűnik, hasonlóan ahhoz, amint azt (42) alatt láttuk. Végül a harmadik integrálban (46b) alatt a $\partial/\partial x_1$ -et hárítjuk át a többi tagra. Ha $\delta(x \cdot \xi)$ -t differenciáljuk, zérust kapunk, amint azt már többször láttuk. Végül a következő kifejezés marad vissza (46a) első és negyedik tagjából:

$$-\frac{v}{2c^2} \int \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \delta(x \cdot \xi) \delta(\xi^2 - 1) dx d\xi. \quad (46c)$$

Hasonló átalakítást végezve (46a) második és harmadik tagján, megkapjuk azt a tagot, amely még hiányzik ahhoz, hogy (44), (45b) és (46c) összege eltűnjék. Ezzel teljesen igazoltuk (41) relativisztikus invarianciáját.

Ami magát (41)-et illeti, mindenekelőtt kielégítő, hogy (Φ, Φ) pozitív definit. Ez egyetlen más, egyértékű hullámfüggvényre vonatkozó egyenletrendszerrel sincs így. Bár Pauli és Weisskopf megmutatta, hogy a második kvantálásnál alkalmazott műfogással a (Ψ, Ψ) indefinit voltával kapcsolatos nehézség megszüntethető, bizonyosan egyszerűbb, ha a nem-másodkvantált elmélet is természetes módon megfelel a kvantummechanika elveinek.

A legnagyobb nehézség, mely a (12) egyenletek fizikai értelmezésének útjában áll, az, hogy legalábbis $\tau=0$ mellett a hullámfüggvényt nem lehet véges térrészre koncentrálni: (12.2) következtében a Φ függvény ξ iránya mentén konstans. Ezzel

együtt fennáll egy másik nehézség is: (41) integrandusát még közelítőleg sem lehet annak valószínűségeként értelmezni, hogy a részecske az x helyen található. Valóban annak lehetősége [melyet (43) fejez ki], hogy a (41) integrál többféleképpen is felírható, mutatja, hogy az integrandus nem értelmezhető valószínűségeként. Jóllehet (12) részletes értelmezhetőségének kérdését az előbbi megjegyzések alapján semmiképp nem tekinthetjük még eldöntöttnek, a nehézséget, mely útját állja annak, hogy akár csak a közelítő helyméréshez is operátort rendeljünk, súlyosnak kell tekintenünk.

Amint az alighanem a legjobban (33)-ból látható, a (12) részecskék egy síkhullámának polarizációja végtelen sokféle lehet. Minden impulzusvektorhoz végtelen sok ortogonális sajátfüggvény tartozik, melyek egymástól a φ -től való függésükben különböznek a ξ -térbeli egységkör mentén. Ebből következik, hogy egy üregben végtelen sok az olyan állapot, amelynek energiája adott határ alatt van, azaz: ha a (12) egyenletrendszerrel leírt részecskék létezhetnének, az üregnek végtelen nagy volna a hőkapacitása. Az előbb említett nehézség mellett ez viszonylag csekély jelentőségűnek látszik. A világ bizonyosan oly messze van az igazi termodinamikai egyensúlytól (melyben protonok alig lennének jelen), hogy a feltevés, mely szerint az egyensúlytól végtelenül messze van, nem utasítandó el feltétlenül.

A szerző érdeklődését az itt leírt lineáris sokaságok iránt az keltette fel, hogy bár zérus nyugalmi tömegű részecskéket reprezentálnak, jellemzésükhöz mégis szükség van egy Ξ^{-1} hosszdimenziójú mennyiségre. Ennek alapján úgy látszhatnék, hogy amennyiben feltételezzük: a (12) egyenletek kölcsönhatásokat közvetítenek, a kölcsönhatás automatikusan tartalmazna egy hosszúságot. Úgy látszott, ezt a lehetőséget alátámasztja az a körülmény, hogy a fenti lineáris sokaság a Maxwell-félét határesetként magában foglalja. Ez a határeset azonban $\Xi=0$ -nak, azaz a fundamentális hossz végtelen értékének felel meg, minek folytán a fent említett állapot jelentősége kérdésesnek látszik.

*Fordította:
Györgyi Géza*

KÖNYVISMERTETÉS

Fred H. Eisen és Lewis T. Chadderton (szerkesztők):

Ion Implantation. Gordon and Breach kiadó. New York, Párizs, London, 1970.

A könyv az 1970-ben Kaliforniában megtartott első Nemzetközi Ionimplantációs Konferencia anyagát tartalmazza. A közzétett munkák igen sokfélék, így az implantációs szakemberek viszonylag szűk körén kívül a téma iránt érdeklődők figyelmét is felkelthetik. A cikkek témája a sugárzás okozta károsodástól egészen az implantációs technika félvezetőkön és integrált áramkörökön való felhasználásáig terjed. Vegyünk sorra néhányat a mintegy 60 cikkből.

Sugárzás okozta károsodás szilikonon és germániumon.

Bizonyítékok a vakanciamozgásra alacsony hőmérsékleten implantált szilikonon.

Élettartam effektusok ionimplantált szilikonban.

Diffúziós effektusok ionimplantált germániumban.

Ionimplantált MOS technológia stb.

Végül figyelmet érdemel a cikkek után található bőséges irodalomjegyzék. (B. Á.)

James W. Corbett és George D. Watkins (szerkesztők):

Radiation effects in semiconductors. Gordon and Breach kiadó. New York, Párizs, London, 1970.

A könyv az előzőhöz hasonlóan szintén cikkgyűjtemény, az 1970-ben Amerikában megtartott azonos című nemzetközi konferencia anyagát tartalmazza. A több mint 50 cikk egészen a konferencia napjáig ad számot ezen fontos terület eredményeiről. A szerzők az elméletet és kísérletet egyaránt tárgyalják. A sugárzás által egy és több komponensű félvezetőkben indukált hibák, tehát az alapvető problémakör mellett, az ionimplantációról, quenchelésről, diffúzióról és amorf félvezetőkéről is szó esik. Így ez a munka a fizikusokon kívül a mérnökök figyelmét is felkeltheti.

A cikkeket 12 fejezetbe tömörítették. Az első rész, a bevezető, a fontos megválaszolatlan kérdésekkel foglalkozik. A második rész a tárgykör elméleti tárgyalását adja. A harmadik a besugárzás nélküli kísérletekről ír. A negyedik részt teljes egészében a germániumnak, az ötödiket a szilikonnak, a hatodikat pedig a gyémántnak szentelték. A hetedik rész a III—V., a nyolcadik a II—VI. vegyületekkel foglalkozik. A kilencedik fejezetben az egyéb anyagokról írnak. A tizedik rész az amorf félvezetőket, a tizenegyedik pedig az ionimplantációt tárgyalja. A tizenkettedik és egyben utolsó fejezet összefoglalja a konferencia anyagát. Végül itt is fel kell hívni a figyelmet a cikkek után található kitérő irodalomjegyzékre. (B. Á.)

J. I. Budnick és M. P. Kawatra (szerkesztők):

Dynamical Aspects of Critical Phenomena, Gordon and Breach kiadó, New York, London, Párizs, 1972.

A könyv az 1970. június 9-től 11-ig New Yorkban a Fordham Egyetem Lincoln Center campusán megtartott hasonló című konferencia előadásainak teljes anyagát tartalmazza. Ez volt az első, speciálisan ebből a témából rendezett találkozó. Megszervezését az tette szükségessé, hogy a hatvanas években a kritikus jelenségek sztatikájában elért eredmények mellett mindinkább megélték az érdeklődés a kritikus jelenségek dinamikája iránt. A konferencia fő célja az volt, hogy megvitassák a szilárd testekben lejátszódó, spinrendeződéssel járó kritikus jelenségek elméleti és kísérleti vizsgálatában elért újabb eredményeket.

Az előadások első csoportja a dinamikus scaling-gel és neutronszórásos kísérletek értelmezésével foglalkozik, majd a fényszóródás, hangterjedés, termikus és transzportjelenségek kritikus anomáliáit modelleken és konkrét kritikus rendszerekben vizsgáló cikkek sora következik. Ezek az előadások teszik ki a könyv nagyobb részét, a továbbiakban az alaptémához lazábban kapcsolódó, részint áttekintő jellegű beszámolók következnek. A szervezők célul tűzték ki a kritikus jelenségek és egyes szomszédos kutatási területek kapcsolatainak bemutatását, illetve megteremtését. Így a programba iktattak két előadást a szupravezetőkben megfigyelhető mágneses jelenségekről. Hasonló okokból szerepelnek dolgozatok a fém-szigetelő átmenetről, a kristályos-amorf átalakulásról és a strukturális soft-mode transzformációkról, egyes esetekben elméletileg, máskor kimondottan technológiai, computer-technikai alkalmazások szempontjából vizsgálva a kérdéseket. Végül egy előadás a kritikus jelenségek kutatásának új területeként bemutatja a biológiai rendszerekben lejátszódó kooperatív folyamatokat.

A könyv tartalmazza az előadások után feltett kérdések egy részét és az ezekre adott válaszokat is, azonkívül egy előadást, mely „Politikai aktivitás és az egyetemek jövője” címmel a konferencia vitaestjén hangzott el.

A konferencián szinte kizárólag amerikai kutatók vettek részt, az előadások közül csak néhány jelent meg az „International Journal of Magnetism”-ben és más folyóiratokban cikk formájában, így csak most, anyagának könyv alakban való megjelenésével vált lehetővé más országok, így hazánk specialistái számára is a konferencia teljes anyagának megismerése. *Corradi Gábor*

Heinz D. Gruschka és Franz Wecken:

Gasdynamic theory of detonation.

Gordon and Breach kiadó, New York, London, Párizs, 1971.

A ma embere sürgeti az alapkutatások gyakorlati felhasználását. Gruschka és Wecken könyve 1966—67-ben tartott szeminárium anyagát tartalmazza, csatlakozik a másfél évtizedre visszatekintő hasonló tárgyú irodalomhoz. Nyilvánvalóak azok az okok, amelyek az ebben a tárgykörben az utóbbi évtizedben megjelenő publikációkhoz, sőt monográfiákhoz vezettek szerte a világban. Jelen könyv a detonációs elmélet új aspektusait, a detonáció stabilitását és a benne felszabaduló mechanikai energiát tárgyalja. A könyv célja a modern gázdinamikára és a termodinamikai módszerekre támaszkodva megértetni a detonáció jelenségek alapvető jellemzőit. Ez a könyv különbséget tesz a hang befagyott és egyensúlyi sebessége között, és ezek viszonylagos szerepét taglalja az ideális detonáció leírásakor. Más újszerűsége ennek a könyvnek, hogy új megközelítésben veszi szemügyre az expanzív és kontraktív kémiai reakciókat a patológikus detonációk leírásával egyetemben.

Úgy gondoljuk, hogy ennek a könyvnek az olvasása nemcsak a tárgykör iránt érdeklődő szakemberek szűk táborának ajánlatos, hanem mindazoknak, akik a fizika törvényeinek gyakorlati alkalmazásai után érdeklődnek. *(T. Gy.)*

Marvin M. Cohen: Introduction to the Quantum Theory of Semiconductors.

Gordon and Breach kiadó, New York, London, Párizs, 1972.

M. M. Cohen témáját a kristályos és nem kristályos testek elektrontraszport sajátosságait vizsgáló kutató és a félvezető fizika egyik egyetemi oktatója szemszögéből tárgyalja fent nevezett könyvében. Ebből következik, hogy a könyv támaszkodik az analízis alapismereteire, de nem kíván több lenni, mint bevezető a félvezetők eszközökkel már gyakorlatban megismerkedett fizikusok és mérnökök számára a félvezetők technikáját és elméletét illetően. Így azután a kvantumelmélet, a termodinamika és a statisztikus mechanika áttekintése után a kristálystruktúrák, a szilárdtestek energiasávjai, hibái ismertetése következik, azután a tisztán sajátvezető, majd a szennyezett félvezető és szigetelő anyagok statisztikus tárgyalása a szennyezők és hibák gerjesztett állapotainak, a több vegyértékű szennyezők és a kondenzált anyagok ismertetése következik. A kutatóhelyen tunnel diódákkal foglalkozó szerző az elektron kölcsönhatásokkal fejezi be könyvét, mely téma előkészítését az elektronok és akusztikai rezgések kölcsönhatásának ügyes kifejtésével kezdi meg. A könyv igen alkalmas, hogy viszonylag rövid összefoglalást adjon azok számára is, akik fokozat elnyerése érdekében ebből a tárgyból fel kívánnak készülni. *(T. Gy.)*

O. Madelung: Festkörpertheorie II. Heidelberger Taschenbücher, Band 109. Springer kiadó. 1972

Az első kötetet az 1972/6 számban ismertettük, abban a szerző definiálta a szilárd testekben végbemenő elemi gerjesztéseket, a második kötetben a közöttük lehetséges kölcsönhatásokat disz-kutálja. E kölcsönhatások három csoportja megnyitja az utat a szilárdtestfizika három nagy fejezeté-hez: a transzportfolyamatokhoz, az optikához és a szupravezetéshez. A szerző természetszerűleg nem törekszik az összes lehetséges jelenségek és elméleti modellek tárgyalására. Ez utóbbinak kor-látjai már abból adódnak, hogy csak véges kiterjedésű, hibamentes szilárd testeket tárgyal. A rács-hibákkal, határfelületekkel és rendezetlen fázisokkal összefüggő jelenségek a III. kötetre maradnak.

A csoportelméleti tárgyalás hasznosságát már az első kötet megmutatta. A szimmetriavizsgá-latok kvalitatív megállapításokat szolgáltatnak az elemi gerjesztések sajátosságaira vonatkozóan és lényegesen megkönnyítik a kvantitatív számításokat. A kötet B függeléke éppen ezért rövid bevezetést nyújt a szilárd testek elmélete szempontjából fontos csoportelméleti segédeszközökbe, és példát mutat alkalmazásukra.

Részletes irodalmi jegyzék, tárgymutató egészíti ki ezt a hasznos könyvecskét. (T. Gy.)

FOLYÓIRAT-ISMERTETÉS

Collective Phenomena. Főszerkesztő: H. Fröhlich. Gordon és Breach Könyvkiadó

A folyóiratkiadás megint egy új taggal bővült a fenti folyóirattal, mely a soktest-rendszerek lényeges aspektusait kívánja tárgyalni úgy, ahogy az jelentkezik a fizikában, a biológiá-ban és a természettudományokban. A szerkesztőség célkitűzése nagyon érdekes. Közlemények, viták és spekulációk teljes terjedelmű közlésére vállalkozik, biztat, a nézetek szabad cseréjére hív fel, hangoztatja a spekulatív jelzót mind elméleti, mind kísérleti körülmények tekintetében.

Egy folyóiratnál talán nem érdektelen az első szám szerzőinek felsorolása: Okan Gurel, J. Chela-Flore, A. K. Rajagopal és Morrel H. Cohen, David Markowitz, A. W. B. Taylor és J. W. Evans, L. S. Schulman és M. Revzen, W. Weidlich, C. Terreaux és P. Lal.

A szerkesztő bizottság nagy neveket sorakoztat fel az egész világról. Nem kell fizetni a pub-likációkért, a szerző 50 ingyenes különlenyomatot kap. (T. Gy.)

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADEMIA
KÖNYVTÁRA

Technikai szerkesztő: Turchányi György
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Helle Mária
A kézirat beérkezett; 1973. jan. 19. — Terjedelem: 8.40 (A/5) ív
73-304 — Szegedi Nyomda

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

Matematikai, fizikai, csillagászati dolgozatokat, referátumokat, könyvismertetéseket, a Tudományos Minősítő Bizottságnak a III. Osztályra vonatkozó híreit s a III. Osztály híreit közli. Évenként egy kötet (kb. 40 ív) jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

A Közlemények előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 60 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488, külföldi megrendelések a „Kultúra”

Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,
1011 Budapest I., Fő utca 32.

Pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990 útján eszközölhetők.

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Várkonyi Zoltán</i> : A fehérjék fluoreszcenciájának néhány kérdéséről	311
<i>Haas András</i> : Megjegyzések a jelenkori hullámmechanikához	329
<i>Keszthelyi Lajos</i> : Modern nukleáris mérőműszerek a biológiában	335
<i>Hartmann Ervin</i> : Kristályok fizikai tulajdonságainak leírása	357

A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

<i>Wigner Jenő</i> : Relativisztikus hullámegyenletek	387
---	-----

KÖNYVISMERTETÉS

<i>Fred H. Eisen és Lewis T. Chadderton</i> : Ion Implantation (<i>B. Á.</i>)	403
<i>James W. Corbett és George D. Watkins</i> : Radiation effects in semiconductors (<i>B. Á.</i>)	403
<i>J. I. Budnick és M. P. Kawatra</i> : Dynamical Aspects of Critical Phenomena (<i>Corradi Gábor</i>) ..	403
<i>Heinz D. Gruschka és Franz Wecken</i> : Gasdynamic theory of detonation (<i>T. Gy.</i>)	404
<i>Marvin M. Cohen</i> : Introduction to the Quantum Theory of Semiconductors (<i>T. Gy.</i>)	404
<i>O. Madelung</i> : Festkörpertheorie II. Heidelberger Taschenbücher, Band 109. (<i>T. Gy.</i>)	405

FOLYÓIRAT-ISMERETETÉS

<i>H. Fröhlich</i> : Collective Phenomena (<i>T. Gy.</i>)	405
---	-----

307226

2

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

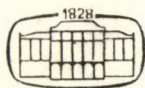
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR,
PÁL LÉNÁRD ÉS SZALAY SÁNDOR
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI
JÁNOSSY LAJOS

XXI. KÖTET

5. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST 1973

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klasszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10—10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóirattól évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Jánossy Lajos akadémikus
1121 Budapest XII., Konkoly Thege út
Központi Fizikai Kutató Intézet

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 48 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, 1389 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmi ismertetőt írnak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közölnék. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írnak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.

TWISTOR KVANTÁLÁS

A RÉSZECSKÉK ÉS A GEOMETRIA PENROSE-FÉLE KVANTUMELMÉLETE*

PERJÉS ZOLTÁN

MTA Központi Fizikai Kutató Intézet, Budapest

TARTALOMJEGYZÉK

1. A twistorelmélet programja	407
2. Impulzusmomentum és geometria	409
3. Null twistorok	414
4. Robinson-nyalábok	419
5. Twistorok ábrázolása spinortereken	421
6. A twistorok kinematikai jelentése	422
7. Twistortér és Minkowski-tér	424
8. A zérus tömegű részecsketerek Penrose-ábrázolása	427
9. Twistorok görbült térben	432
10. Klasszikus szórási folyamatok a twistorképben	433
11. Kvantálás. Kölcsönható terek	440
12. Gráfszabályok	442

Függelékek

A) Spinoralgebra	451
B) Exterior algebrai alapismeretek	453
C) Módszerek és példák a twistorábrák kiértékelésére	455
Irodalmi hivatkozások	463

1. A twistorelmélet programja

A kvantumelmélet megoldatlan problémáiról és várható fejlődésének irányairól kollokviumot rendeztek 1968-ban a cambridge-i egyetemen. Az új irányzatokat ismertető előadások közül a legélénkebb vitát *Roger Penrose*-nak a twistorelmélet körvonalairól mondott beszámolója váltotta ki. Ezen a kollokviumon a twistor-elmélet még csak vázlatos terv formájában létezett, az eltelt négy év alatt azonban már figyelemre méltó eredményeket sikerült elérni az elmélet részleteinek kidolgozásában.

A twistorelmélet a megszokottól eltérő szemszögből közelíti meg a fizikai mennyiségek és a hozzárendelt matematikai absztrakciók kapcsolatát. Más elméletekben alapvetőnek tekintett fogalmak, mint például a tér egy pontjának fogalma, itt leszámaztatottá lesznek más, „elemibb” entitásokból. Az elmélet célja a részecskék és a geometriai tér tulajdonságainak leírása, a kvantumelmélet és relativitáselmélet kapcsolatának mélyebb megalapozása. Noha már ma is kiolvasható a twistor-konceptióból e célkitűzések megvalósításának egy kínálkozó útja, az elmélet mégis befejezetlen egyelőre. *Penrose* a hagyományos kvantumelmélet eredményeit már képes reprodukálni, ha a folyamatban részt vevő részecskék tömege zérus vagy

* Érkezett: 1972. szept. 13.

elhanyagolható. A nagyenergiás határesetben tehát már használható a twistor-quantálás módszere. A twistorelmélet a kvantumelektrodinamikával megegyező hatáskeresztmetszeteket szolgáltat a Compton-, Møller- és Bhabha-szórás nagyenergiás határesetekben. Egészen másképpen értelmezendők azonban a twistor-gráfok, mint a hagyományos perturbációszámítás eredményeként kapott Feynman-gráfok. A twistor-quantálásnak már most figyelemre méltó előnye a régi kvantumtérelmélettel szemben, hogy a twistorokkal eddig tárgyalható folyamatok leírásában nem jelennek meg divergens tagok. Szerencsés esetben az elméletnek ez a sajátossága a későbbi, komplett változatában is megmarad.

A twistor-quantálástól a fizikai *kontinuum* fogalmának mélyebb megalapozását is remélhetjük [5]. A kontinuum ma egész fizikai világképünk bázisa. Egyrészt a tér és idő absztrakciói, másrészt a kvantumelmélet szuperpozíció-elve a kontinuumfogalom fő alkalmazási területei a fizikában. Hiszen például a valószínűségi amplitúdók kétdimenziós (komplex) kontinuum a szuperpozíció elvének sarkalatos eleme: éppen ez az a kontinuum, amelyen a szuperpozíció elve megvalósul. Tény azonban, hogy a matematikai kontinuumfogalomnak vannak bizonyos, a fizikától idegen tulajdonságai. Ezt a nézetet nemcsak Penrose vallja, hiszen már *Schrödinger* [35] és más fizikusok is hangoztattak hasonló aggályokat.

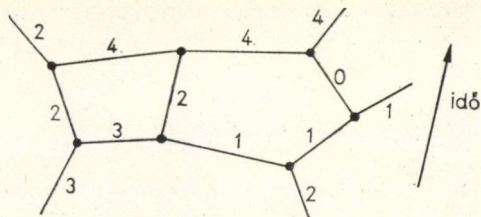
Ha elfogadjuk, hogy a téridő-kontinuum fizikai realitás, akkor ugyanannyi pontnak kell lennie mondjuk egy 10^{-13} cm-es, vagy akár 10^{-100} cm-es élhosszúságú kockában, mint az egész univerzumban. Világos, hogy valójában a pontnak, mint fogalomnak kevés valóságtartalma van, mégis alapvető a mai fizikai elméletekben. Egy másik példa: a nyílt és zárt halmazok fogalma, amely végső soron szintén a kontinuum fogalmára épül, hasznosan alkalmazható ugyan fizikai tételek levezetésében, de vajmi kevés köze van fizikai valósághoz. Úgy tűnik tehát, hogy kontinuum inkább matematikai kezelhetősége miatt, mint közvetlen fizikai értelmezésével jut szerephez a mai elméletekben.

Tulajdonképpen az is jogos kérdés, hogy vajon nem véletlenül alakult-e ki a fizikával való kölcsönhatásában a matematikai analízisnek az az alakja, amelyet általánosan használunk és elfogadunk. Meglepő és alig ismert tény, hogy léteznek az analízisnek nem-hagyományos változatai is (ilyenek találhatók [19–21] *A. Robinson*, *C. Schmieden* és *D. Langwitz* műveiben). Ezekben az analízisekben például az infinitezimális és végtelen elemeket éppoly elemi módon vezetik be, mint a hagyományos analízisben — mondjuk — a valós számokat. Vannak bizonyos előnyei is e nem-hagyományos elméleteknek, mert így pl. lehetővé válik, hogy a disztribúciókat „közönséges” függvényeknek tekintsük. *Penrose* azonban nem megy ilyen messzire a matematikai módszerek megreformálásában, csupán felhívja a figyelmünket arra, hogy nincs biztos alapunk fizikai realitást tulajdonítani a kontinuumfogalomnak. *Penrose* felveti azt a lehetőséget, hogy az alapvető fizikai törvények nem analitikus, hanem kombinatorikai jellegűek. Így a térszerkezet és a valószínűségek egyfajta diszkrét elméletéhez juthatunk. Egyúttal megszabadítjuk a kvantumelméletet attól a régóta kifogásolt árnyoldaltól, hogy a mikrojelenségek leírását a makroszkopikus tapasztalatokból elvonatkoztatott fogalmakkal erőszakolja. Például hullámfüggvényeket valamilyen koordináta-rendszerhez viszonyítva szoktunk megadni. A koordinátatengelyeket — elemi tanulmányainkból emlékszünk — persze vékony merev rudakkal valósíthatjuk meg kísérletileg. Nyilvánvaló e leírás mód abszurditása! Másrészt látjuk majd, hogy a *Penrose*-féle diszkrét térfogalomnak nincs köze azokhoz a korábbi próbálkozásokhoz, amelyekben a geometria diszkrétiségét úgy értelmezték, hogy a térszerkezet egyfajta kristályrácsra emlékeztet. *Penrose* tudomásul veszi, hogy a „merev rudak” valójában bonyolult kvantum-

rendszerek, és az ezek használatára épülő alapfogalmainkat el kell vetnünk az elemi fogalmaink közül. Méréseink kvantumos rendszerek kölcsönhatására vezethetők vissza és fogalmi rendszerünket ennek figyelembevételével kell kiépítenünk. Penrose azokra a geometriai mennyiségekre épít, amelyeket egyszerű kvantummechanikai kísérletekkel mérni tudunk. Eljut ahhoz a felfogáshoz, hogy a pont fogalma másodlagos, és leszámaztatható elemi mérésekkel kapcsolatos alapvetőbb fogalmakból. Egyszerű modellelméletet dolgozott ki, amelyből már látszik, hogy ezekre az alapvetőbb mennyiségekre a diszkréttség jellemző, és a kontinuum csak makroszkopikus közelítésben jelenik meg. Szeretném hangsúlyozni, hogy ez a modell még *nem* a twistorelmélet, csupán annak alapfelfogását hivatott megvilágítani.

2. Impulzusmomentum és geometria

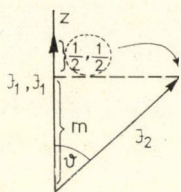
A twistorelmélet szemléletmódját Penrose nemrelativisztikus modellelméletén tanulmányozhatjuk. Ennek a (twistorelméletnél lényegesen egyszerűbb szerkezetű) modellnek az a célja, hogy az impulzusmomentum összeadásának kvantumszabályai-ból kiépítse a térbeli irányok fogalmát. Nem támaszkodunk makroszkopikus mennyiségekre, tehát először is ki kell zárunk az m vetületkvantumszám használatát, hiszen az a kvantálási tengely egy adott választására vonatkozik, és így belopja a kiépíteni kívánt térfogalmat a koordinátaválasztáson keresztül a gondolatmenetbe. Meg kell elégednünk a j teljes impulzusmomentum-kvantumszám megadásával. Tehát adott j értékekkel jellemezhető (zárt) egységekből felépülő kvantummechanikai rendszereket vizsgálunk. Egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az egységek relatív pályamomentuma elhanyagolható, tehát az egységek ütközése igen kis sebességekkel megy végbe. Elhagyunk a spinen kívül minden egyéb kvantumszámot ebben a modellben, és csupán olyan kölcsönhatásokat tételezünk fel, amelyek során két egység összekapcsolódása egyetlen új egységet hoz létre, vagy megfordítva, egy egység elbomlik két másikra. Grafikusan az egyes egységeket egy-egy vonal szemlélteti, amelyhez ráírjuk ($\hbar/2$ egységekben) a spint jellemző pozitív egész számot. A kölcsönhatás a gráfpontokban megy végbe. Természetesen ez inkább logikai térkép, mint valamilyen időbeli szemléltetése a folyamatnak. Az egyes csomópontokba futó egységek megengedett értékeit az impulzusmomentum-összeadási szabályok határozzák meg. Ezeket az ábrákat Penrose *spinhálózatnak* nevezi. De miképpen kaphatunk térbeli irányokat olyan rendszerből, amelyben csupán az iránytól független j teljes spinértékeket használjuk? Ezt a jogos kérdést az alábbi idealizált kísérlet alapján válaszolhatjuk meg. Legyen adva két, nagy J_1 és J_2 impulzusmomentum-értékekkel jellemzett egység. Az első egységről lecsatolunk egy $\frac{1}{2}\hbar$ spinű egységet (tehát mondjuk, egy lassan mozgó elektront) úgy, hogy $J_1 - \frac{1}{2}\hbar$ teljes impulzusmomentum maradjon vissza. Az $\frac{1}{2}\hbar$ impulzusmomentumot most a második egységhez csatoljuk. $J_2 - \frac{1}{2}\hbar$



1. ábra. Spinhálózat

1*

vagy $J_2 + \frac{1}{2}$ impulzusmomentumot kapunk (\hbar egységekben). Most megmutatom, hogy spinfüggetlen kölcsönhatás esetén annak valószínűsége, hogy $J_2 \pm \frac{1}{2}$ -et kapunk, $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cos \vartheta$, ahol ϑ a két impulzusmomentum által bezárt szög.



2. ábra

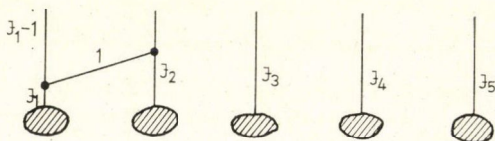
Vegyük fel z tengelyt J_1 irányában. Ekkor a vetületkvantumszám is J_1 . Másrészt, $\cos \vartheta = \frac{m}{J_2}$, ahol m J_2 vetülete. J_1 -ről csak $+\frac{1}{2}$ vetülettel csatolhatjuk le az „elektront”. A keresett valószínűséget tehát a következőképpen kapjuk [16]:

$$\left\langle J_2 \frac{1}{2}, m \frac{1}{2} \left| J_2 + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2} \right. \right\rangle^2 = \frac{J_2 + m + 1}{2J_2 + 1} \approx \frac{1 + m/J_2}{2} = \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \quad (2.1)$$

és

$$\left\langle J_2 \frac{1}{2}, m \frac{1}{2} \left| J_2 - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2} \right. \right\rangle^2 = \frac{J_2 - m}{2J_2 + 1} \approx \frac{1 - m/J_2}{2} = \frac{1 - \cos \vartheta}{2}. \quad (2.2)$$

Ezeket az összefüggéseket Penrose ϑ szög definíciójának tekinti, feltéve, ha az egységek által bezárt szög egyáltalán meghatározható. A szög „meghatározhatósága” most zavaró bonyodalomnak tűnik, de mindjárt látjuk majd, hogy a probléma igen lényeges ebben a gondolatmenetben. Valószínűségméréshez nyilvánvalóan sok példányban kell elkészítenünk a rendszert, hogy várható értéket képezhessünk. Mármost az egységek relatív orientációjának beállítását valamilyen szűrőrendszeren történő átbocsátással érjük el. Ebben az egyszerű modellben az felel meg ennek, hogy a vizsgált egységeket egy bonyolultabb spinhálózat részének tekintjük. Ha az 1. és 2. egységek nem összefüggő spinhálózathoz tartoznak, akkor nyilvánvalóan semmi sem biztosítja, hogy a kijövő 1. és 2. részecskék relatív orientációja meghatározott legyen (3. ábra).



3. ábra

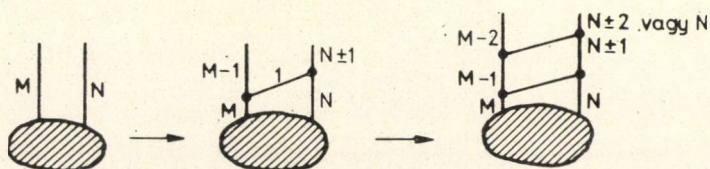
Ilyen össze-nem-függő hálózatokból tetszőlegesen sokat felvehetnénk még. Intuitíven az is nyilvánvaló,

hogy nagy spinértékekre $\frac{1}{2}$ valószínűséggel kapjuk mind a kisebb, mind a nagyobb spint. Definíciónk tehát

$\vartheta = 90^\circ$ -ot szolgáltatna. De ez a felrajzolt öt rendszer közül bármely kettőre igaz, és így öt darab, egymásra kölcsönösen merőleges irányhoz jutunk. Mivel háromdimenziós térben vagyunk, ez nyilvánvaló képtelenség. Ilyenkor tehát *nem* szöget definiál a mért valószínűség, hanem a két nagy rendszer kölcsönös helyzetének „nemtudását” (*ignorancia*) fejezi ki.

Hogyan lehet eldönteni, hogy egy mérés ignoranciát vagy szöget szolgáltat-e? Úgy, hogy többször megismételjük (4. ábra).

Ha az első mérés eredményének ismeretében lényegesen más eloszlást kapunk a második mérés kimenetelére, mint anélkül, akkor az első alkalommal „ignoranciát” mértünk. Az történt, hogy az első mérés adott némi információt a két egység vi-



4. ábra

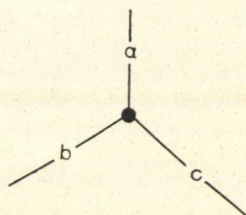
szonylagos helyzetéről. Viszont, ha nem befolyásolja az első mérés a második eredményét, akkor a szög jól definiált.

Szóljunk még röviden arról, hogyan lehet *elméletileg* megjósolni tetszőleges elrendezésű spinhálózattal ábrázolható kísérlet eredményét. *Yutsits, Levinson és Vanagas* [17] munkája nyomán Penrose grafikus módszereket dolgozott ki adott spinelrendezés valószínűségének kiszámolására.

Ha a spinhálózat nem tartalmaz kifutó vonalat, akkor *zárt*nak nevezzük. Zárt spinhálózathoz egész számot rendelünk, a hálózat *értékét*. Ennek kiszámítására mulatságos eljárásokat ad meg *Penrose*. Itt csak a legegyszerűbb módszer bemutatására szorítkozunk.

A spinhálózat tetszőleges csomópontjában három egy-ség fut össze (5. ábra).

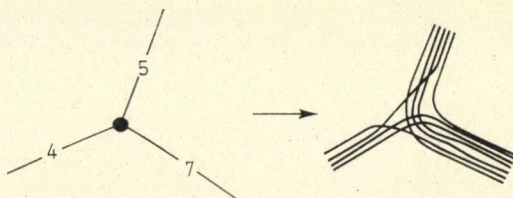
A fermionszám megmaradásának törvénye megköveteli, hogy nem 0 valószínűséggel megvalósuló esetekben $a+b+c$ páros szám legyen. Az impulzusmomentum összeadási szabályából pedig: $a+b+c \geq 2 \cdot \max(a, b, c)$. Rajzoljunk fel a csomópontban összefutó vonalak helyére annyi párhuzamos szálát, ahányszor $\frac{\hbar}{2}$ a spin. A szálakat minden le-



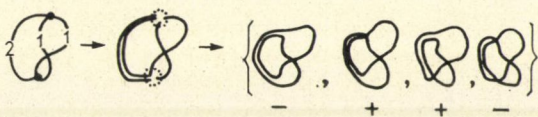
5. ábra

hetséges módon összekötjük. Egy példa látható a 6. ábrán.

Párhuzamosan futó szálakat azonban nem szabad összekötni! Ha az impulzusmomentum és a fermionszám-megmaradás követelményének megfelel a csomópont, akkor maradéktalanul sikerül a szálakat összekötni. Most megszámloljuk valamennyi így kapott ábrán a keresztezési pontokat. Ha páros számú van, akkor az előjel pozitív, ha páratlan, akkor negatív. Ezt a műveletet a zárt spinhálózat valamennyi csomópontjával elvégezve olyan ábrákhoz jutunk, ahol csupa zárt hurkok vannak. Lássunk egy igen egyszerű példát (7. ábra). (A csomópontokon kívül, már eredetileg is meglevő keresztezési pontokat nem számoljuk.)



6. ábra



7. ábra

Minden egyes ábrán megszámloljuk, hány darab hurkot tartalmaz. Legyen ez a szám c . A zárt hálózat

értékét akkor a következő kifejezés definiálja:

$$\frac{\sum_{\text{minden lehetőségre}} \text{előjel } (-2)^c}{\prod_{\text{minden vonalra}} n!}. \quad (2.3)$$

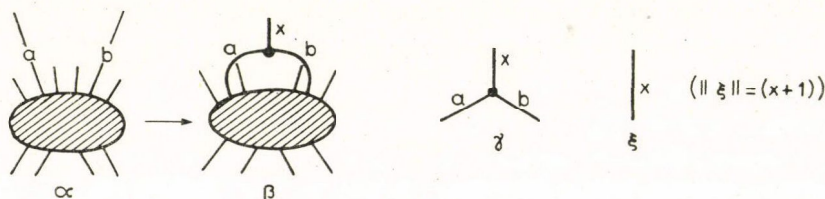
Itt n az egyes vonalakhoz tartozó spinszám. A felrajzolt spinhálózat értéke tehát

$$\frac{1}{2!1!1!} \{ -(-2)^2 + (-2) + (-2) - (-2)^2 \} = -6. \quad (2.4)$$

Bonyolultabb hálózatokra persze ez a módszer igen hosszadalmas, azonban különféle redukciós szabályokat lehet találni, amelyekkel egészen kényelmesen meg lehet határozni az értéket.

Kifutó vonalakat is tartalmazó spinhálózatokhoz nemnegatív egész számot rendelünk, a hálózat *normáját*. Ez úgy történik, hogy a hálózatot lerajzoljuk két példányban, és a megfelelő kifutó vonalakat páronként összekötjük. A kapott zárt hálózat értékének abszolút értéke a norma. Penrose értelmezése szerint a norma azzal arányos, hogy a szóban forgó konfiguráció milyen valószínűséggel valósul meg a természetben. Ha tehát a norma zérus, akkor a megfelelő spinhálózat nem fordul elő, mert például ellentmond az impulzusmomentum megmaradási törvénynek.

A norma segítségével egyszerű kifejezésekkel adhatjuk meg különféle folyamatok valószínűségét. Lássunk egy példát, rövidség kedvéért a levezetés részletei nélkül. Legyen α olyan nagyobb spinhálózat, amelyből — egyebek között — kifutnak a és b vonalak:



8. ábra

Tegyük fel, hogy a és b összecsatolódnak x egységgé. Ekkor kapjuk β spinhálózatot. Ha γ és ξ a rajzon látható spinhálózatokat jelölik, akkor annak valószínűsége, hogy az a és b összecsatolásából kapott impulzusmomentum éppen x értékű legyen:

$$p_x = \frac{\|\beta\| \cdot \|\xi\|}{\|\alpha\| \cdot \|\gamma\|} = \frac{\|\beta\| \cdot (x+1) \left\{ \frac{1}{2}(a+b+x) + 1 \right\}!}{\|\alpha\| \left\{ \frac{1}{2}(a+b-x) \right\}! \left\{ \frac{1}{2}(b+x-a) \right\}! \left\{ \frac{1}{2}(x+a-b) \right\}!}. \quad (2.5)$$

(A spinhálózat normáját páros függőleges vonalak közé zárással jelöljük.)

Ezt az eredményt tehát a hagyományos nemrelativisztikus kvantumelméletből kaptuk. A kissé szokatlan problémafelállítás természetesen szokatlan számolási módszereket követelt. Mármost ebből a sémából kívánja Penrose a térfogalmat

kiépíteni. Pontosabban, e modellből csak a térbeli *irányok* fogalmához juthatunk el, hiszen a spin nem tartalmaz a részecske helyére vonatkozó információt. Penrose bebizonyítja a következő tételt:

Legyen adott egy nagy spinhálózat A, B, C, \dots kifutó vonalakkal, melyekre a szögek jól definiáltak a fenti értelemben. Ekkor a valószínűségmérések által szolgáltatott \mathfrak{g} értékek konzisztensen értelmezhetők euklideszi három dimenziós térbeli irányok közti szögekként.

Meglepődjünk-e ezen az eredményen? Látszólag nincs benne semmi meglepő, hiszen a három dimenziós forgáscsoport tulajdonságaiból indultunk ki, és amit kaptunk, az ismét a három dimenziós tér geometriája (pontosabban irányviszonyai). Hangsúlyoznunk kell, hogy végeredményben a kapott geometriai összefüggéseket maga a *rendszer* definiálja. Egyáltalán nem látszik azonban a pontos logikai kapcsolatot a kiinduláskor felhasznált ábrázolási tér és az eredményül kapott tér között. Megtehetjük például, hogy a részecskéket a szokásos módon, hullámfüggvényekkel ábrázoljuk a háromdimenziós euklideszi térben, és esetleg éppen olyan állapotban vannak a részecskék az általunk felvett koordináta-rendszerben, hogy impulzusmomentumuk iránya meghatározatlan (vagyis $m=0$). Ezután az imént ismertetett eljárással definiáljuk az egységek impulzusmomentuma közti szögeket, és azt találjuk, hogy ezek konzisztensek azzal az értelmezéssel, hogy *valamely* euklideszi térben ők szögek, noha az ábrázolási térben a mondottak értelmében a részecskék által bezárt szögek nem adhatók meg. Ebből Penrose arra következtet, hogy *a valódi tér az, amelyet maga a rendszer definiál*, és az állapotfüggvények ábrázolási tere csak olyanféle, gyakran a fizikai jelentést is nélkülöző számolási segédeszköz, mint például az általános relativitáselméletben a téridő pontjaihoz rendelt általános koordináták.

Felmerül az a kérdés, hogy vajon lehetne-e találni az impulzusmomentum összeadási törvényétől eltérő algebrát, amely ugyancsak egyfajta konzisztens sémához vezethetne, esetleg más dimenziószámú térben. Általános esetben Penrose szerint nem lehet megmondani előre, hogy az eredmények konzisztens módon értelmezhetők-e geometriailag.

Az elmondottakat összefoglalva, a nemrelativisztikus impulzusmomentum kvantumelméletéből leszűrhető az a tanulság, hogy kvantumrendszerek átmeneti valószínűségeinek mérésével olyan fogalomrendszerhez jutunk, amely a klasszikus határátmenetben a háromdimenziós térbeli irányviszonyok geometriájához vezet. Noha a mérések eredményei mindig racionális számok, ezek azonban tetszőleges pontossággal megközelíthetnek valós szögértékeket. A geometriai adatok kombinatorikus módszerekkel nyerhetők, és a bonyolultabb, nagy impulzusmomentummal rendelkező rendszerekre a folytonos geometria alkalmas közelítéssé válik.

A most ismertetett egyszerű modellben elhanyagoltuk a részecskék relatív mozgását, tehát a pályamomentumot is. Ha a részecskék számottevő pályamomentummal is rendelkeznek, akkor már helyviszonyaikkal is foglalkoznunk kell, hiszen a pályamomentum fogalma elválaszthatatlan a térbeli elmozdulásoktól, és tényleges modellekben az elmozdulásokat a pályamomentum megváltozása kísérheti. Penrose tehát olyan koncepciót keresett, amely alkalmas arra, segítségével az impulzusmomentum és az impulzus fogalmát egyszerre megragadjuk. Álláspontja az, hogy elemi rendszerekre e két fogalom még nem jól definiált külön-külön, hanem csak a klasszikus határátmenetben. Tehát véleménye szerint kvantumrendszerekre az impulzusmomentumnak és az impulzusnak csak egyfajta kombi-

nációját definiálhatjuk, amely azonban a klasszikus határesetben a szokásos leírás-módnak megfelelően elkülönül a kétfajta mennyiségre. Ez a kvantumrendszereket jellemző koncepció a twistoralgebra.

A twistorok olyan mennyiségek, amelyek a Minkowski-tér konform transzformációi* hatására az $SU(2, 2)$ csoport egy ábrázolása szerint transzformálódnak. Z^z egyindexes twistor négy komplex komponenssel rendelkezik:

$$(Z^z) = (Z^0, Z^1, Z^2, Z^3). \quad (2.6)$$

Z_α^+ adjungált twistor komponensei:

$$(Z_\alpha^+) = (Z_0^+, Z_1^+, Z_2^+, Z_3^+), \quad (2.7)$$

ahol, definíció szerint

$$Z_0^+ = \bar{Z}^2, \quad Z_1^+ = \bar{Z}^3, \quad Z_2^+ = \bar{Z}^0, \quad Z_3^+ = \bar{Z}^1. \quad (2.8)$$

A $Z^z Z_\alpha^+$ hermitikus alak a twistoradjungálás fenti szabályai értelmében $(+ + - -)$ szignatúrájú, és így invarianciatranszformációi valóban az $SU(2, 2)$ csoportot definiáló mátrixokkal történnek. Ha valamely Z^z twistorra $Z^z Z_\alpha^+ = 0$ teljesül, akkor Z^z -t null twistornak nevezzük**. Mielőtt rátérünk a twistoralgebra részletesebb tárgyalására, lássuk a twistorok geometriai és fizikai jelentését.

Noha az itt következő formalizmus fizikai jelentősége első pillantásra egyáltalán nem nyilvánvaló, a következőkben mégis kitűnik majd, hogy segítségével meglepően egyszerűen megragadhatók egyes részecskefizikai alapfogalmak. A twistorformalizmus segítségével nyerjük majd például azt az önmagában is jelentős eredményt, hogy a zérus nyugalmi tömegű, egyébként azonban tetszőleges (egész vagy félegész spinű) részecsketerek állapotfüggvényei előállíthatók három változós komplex analitikus függvényekre vonatkozó kontúrintegrálokkal (8. pont). Ez az eredmény kicsit hasonlít az állapotfüggvény Fourier-analízisével nyert impulzusképre, azonban általánosabb, „hajlékonyabb” módszert nyújt annál.

3. Null twistorok

Minkowski-térben fényszerű egyenesek ábrázolják a null twistorokat. Derékszögű koordinátarendszert használunk; legyenek a koordináták: $x^i, i=0, 1, 2, 3$. A metrikus tenzor:

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Az origó O pontban van. Legyen az általános helyzetű, fényszerű L egyenes egy P pontjának helyvektora l^i és L -nek jövőbe mutató érintő vektora n^i (9. ábra).

* Itt a konform transzformáció kifejezést szűkebb jelentésében használjuk; azokkal a konform leképezésekkel foglalkozunk tehát, amelyek a Minkowski-teret önmagába viszik át [22]. A 15 paraméteres konform csoport lokálisan izomorf és 2—1 homomorf az $O(4, 2)$ csoporttal, amely viszont lokálisan izomorf és 2—1 homomorf az $SU(2, 2)$ csoporttal. Így a twistorok — transzformáció-tulajdonságaik alapján — a Minkowski-tér konform transzformációinak négyértékű ábrázolásaihoz tartoznak.

** A twistorok nem tévesztendőek össze a négykomponensű Dirac-spinorokkal, mivel egyrészt transzformációs tulajdonságaikban különböznek azoktól, másrészt — mint arra rövidesen kitérünk — nem lokális, hanem globális viszonyokat fejeznek ki a téridőben.

L egyenest egyértelműen jellemző koordinátákat keressünk. E célra választhatjuk például n^i vektorkomponenseket és n^i vektornak O pontra vonatkoztatott nyomatékát:

$$m^{ij} = l^i n^j - n^i l^j. \quad (3.2)$$

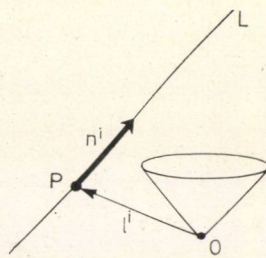
Mivel n^i helyett írhatjuk annak tetszőleges konstansszorosát, αn^i -t is (ha $\alpha \neq 0$), és ekkor (3.2) szerint a nyomaték αm^{ij} lesz, látszik, hogy csak az (n^i, m^{ij}) rendszer *hányadosaira* van szükségünk L meghatározásához. Ezek az egyenes Plücker—Graßmann-féle koordinátái [23]. De ez még túl sok adat. Például, most L fényszerű, tehát

$$n_i n^i = 0, \quad (3.3)$$

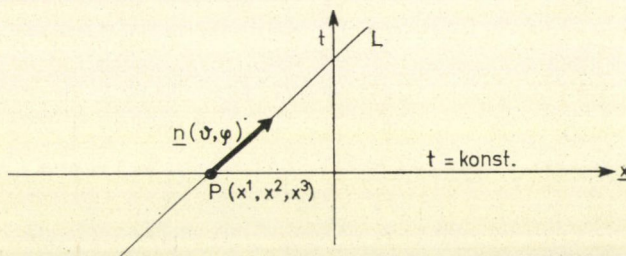
ami máris egy megszorítást jelent az n^i komponensekre. Továbbá, m^{jk} definíciója alapján (3.2):

$$\varepsilon_{ijkl} m^{ik} n^l = 0. \quad (3.4)$$

Ez további három független megszorítást jelent, így a 9 hányadosból 5 független adat marad. Ez megerősíti azt az intuitív benyomást, hogy a fényszerű vonalak ötdimenziós rendszert alkotnak. Ugyanis három adat mondja meg, hogy hol dőf át egy adott térszerű hiperfelületet a vonal, és két adat jellemzi e hiperfelületen a fényjelként elképzelhető egyenes irányát:



9. ábra



10. ábra

A fényszerű irányok matematikai kezelésére igen jól használható a kétkomponensű spinorformalizmus. Most megmutatjuk, hogy az L egyenest jellemző négy feltétel [(3.3) és (3.4) egyenletek] egyetlen spinorfeltétellel helyettesíthető. A kétkomponensű spinoralgebrából itt felhasznált alapvető összefüggéseket A) Függelékben foglaltuk össze.

n^j fényszerű érintő vektorhoz egyindexes spinort rendelhetünk:

$$n^j = \lambda^J \bar{\lambda}^{J'}. \quad (3.5)$$

Hasonlóan, m^{ij} nyomaték (3.2) definíciója alapján

$$m^{jk} = i(\varepsilon^{JK} \mu^{(J'} \bar{\lambda}^{K')} - \varepsilon^{J'K'} \bar{\mu}^{(J} \lambda^{K)}), \quad (3.6)$$

ahol

$$\mu_{A'} = -i \lambda^A l_{AA'}. \quad (3.7)$$

és $I_{AA'} = I_a$. Az indexekre vonatkozó kerek zárójel szimmetrizálást jelöl. Az antiszimmetrikus m^{ij} tenzornak megfelelő szimmetrikus spinor további felbontását itt a (3.4) azonosság tette lehetővé.

λ^A és $\mu_{A'}$ spinorok tehát együttesen meghatározzák L fényszerű egyenest. λ^A szolgáltatja L irányát és $\mu_{A'}$ az O pontra vonatkozó nyomatékát. Látjuk azt is, hogy $\mu_{A'}$ nem függ P pont választásától: ha

$$I_{AA'} \rightarrow I_{AA'} + a\lambda_A \bar{\lambda}_{A'}, \quad (3.8)$$

akkor

$$\mu_{A'} \rightarrow -i\lambda^A (I_{AA'} + a\lambda_A \bar{\lambda}_{A'}) = -i\lambda^A I_{AA'} = \mu_{A'}, \quad (3.9)$$

mivel $\lambda^A \lambda_A = 0$. Kivételes esetektől eltekintve, P pontot választhatjuk úgy, hogy O fénykúpján legyen. Ekkor a fényszerű P vektor $\beta^J \bar{\beta}_{J'}$ alakú, ezért

$$\bar{\lambda}^{A'} \mu_{A'} = -i\lambda^A \bar{\lambda}^{A'} I_{AA'} = -i\lambda^A (\bar{\lambda}^{A'} \bar{\beta}_A) \beta_A = -i|\lambda^A \bar{\beta}_A|^2. \quad (3.10)$$

Minthogy most

$$\mu_{A'} = -i(\lambda^A \bar{\beta}_A) \bar{\beta}_{A'}, \quad (3.11)$$

I^a vektor így írható fel:

$$I_{AA'} = \beta_A \bar{\beta}_{A'} = \frac{1}{|\lambda^R \bar{\beta}_R|^2} \mu_{A'} \bar{\mu}_A = -i(\lambda^R \bar{\mu}_R)^{-1} \bar{\mu}_A \mu_{A'}. \quad (3.12)$$

$\mu_{A'}$ spinor tehát a fénykúp és L döféspontjának irányát jelöli ki.

A $\lambda^A \bar{\mu}_A = 0$ speciális eset akkor fordul elő, ha λ^A és $\bar{\mu}^A$ párhuzamos irányokat definiálnak, vagyis L az O ponton átmenő fényszerű hipersíkban fekszik (11. ábra).

Ebben az esetben L egyenes P pontjához mutató I^a vektor térszerű. Másik speciális eset, ha L O ponton megy át. Ekkor $\mu_{A'} = 0$ ($P = O$). Másrészt, egyelőre a $\lambda^A = 0$ esetet kizárjuk.

Rendeljük tehát L fényszerű vonalhoz az

$$L^0 = \lambda^0, \quad L^1 = \lambda^1, \quad L^2 = \mu_0, \quad L^3 = \mu_1, \quad (3.13)$$

vagy röviden

$$(L^\alpha) = (\lambda^A, \mu_{A'}) \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \quad (3.14)$$

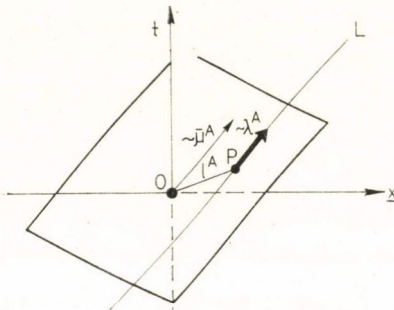
komplex mennyiségek hányadosait.* Ez hat valós adat. Mivel korábban már beláttuk, hogy az egyenest öt adat meghatározza, léteznie L spinorkoordinátái között. Valóban, I^i valós

$$\text{Re}(\lambda^A \bar{\mu}_A) = 0. \quad (3.15)$$

Ez a feltétel biztosítja, hogy L^α fényszerű vonalat határoz meg. A twistoradjungálás és a spinorindexek kezelésének szabályai értelmében

$$L^\alpha L_\alpha^+ = (\lambda^A, \mu_{A'}) \begin{pmatrix} \bar{\mu}_A \\ \bar{\lambda}^{A'} \end{pmatrix} = \lambda^A \bar{\mu}_A + \mu_{A'} \bar{\lambda}^{A'} = 2 \text{Re}(\lambda^A \bar{\mu}_A) = 0. \quad (3.16)$$

* Újabb művek a twistorok egy másik ábrázolását használják; ezekben L^α és L_α^+ szerepe felcserélődik.



11. ábra

Tehát — várakozásunknak megfelelően — L^x null twistor. A fenti kép alapján világos, hogy a twistoroknak nemlokális geometriai jelentés tulajdonítható, amint azt korábban már jeleztük. Ezt eddig csak null twistorokra láttuk be, azonban általános (nem-null) twistorokra is megmutatjuk a következőkben. A nem-null twistorok bizonyos értelemben „komplexesített” fényszerű vonalakat definiálnak, ugyanis komplex I^i -re (3.15) általában nem teljesül. Ez nem a szokásos, $I^i + im^i$ típusú egyesítése két valós vonalnak, mivel a nem-null twistorokra történő áttérés a twistortér dimenziószámát csak eggyel növeli (ugyanis elmarad az $L^x L_x^+ = 0$ megkötés a twistorkoordinátákra).

A nem-null twistorokat két típusba sorolhatjuk:

- ha $\operatorname{Re}(\lambda^A \bar{\mu}_A) > 0$, akkor L^x jobbsodrású twistor,
 ha $\operatorname{Re}(\lambda^A \bar{\mu}_A) < 0$, akkor L^x balsodrású twistor.

Az elnevezések szemléletes jelentése nemsokára világossá válik. A twistorokra általában azt is megengedjük, hogy $\lambda^A = 0$ legyen, noha ilyenkor a null twistoroknak nem felel meg fényszerű vonal.

L^x twistor komponenseinek arányát közvetlenül is kifejezhetjük L egyenes és O fénykúpja P dőféspontjának

$$(n^a) = (u, v, \zeta, \bar{\zeta}) \quad (3.17)$$

spinorkoordinátaival és az egyenes I^i érintő vektorának irányát meghatározó $du:dv:d\zeta:d\bar{\zeta}$ arányokkal. E koordinátadifferenciálok fényszerű ívelemet jellemeznek:

$$du dv - d\zeta d\bar{\zeta} = 0. \quad (3.18)$$

Ha tehát $du = -\alpha d\bar{\zeta}$, ahol α valamilyen komplex szám, akkor $d\zeta = -\alpha dv$. Innen

$$du:dv:d\zeta:d\bar{\zeta} = \alpha\bar{\alpha}:1:-\bar{\alpha}:-\alpha. \quad (3.19)$$

$(L^x) = (\lambda^A, \mu_{A'})$, ahol $\mu_{A'} = -i\lambda^A I_{AA'}$ és

$$\lambda^A \bar{\lambda}^{A'} = \begin{bmatrix} \lambda^0 \bar{\lambda}^{0'} & \lambda^0 \bar{\lambda}^{1'} \\ \lambda^1 \bar{\lambda}^{0'} & \lambda^1 \bar{\lambda}^{1'} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} dx^{00'} & dx^{01'} \\ dx^{10'} & dx^{11'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} du & d\zeta \\ d\bar{\zeta} & dv \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Írhatjuk:

$$-\alpha = \frac{du}{d\bar{\zeta}} = \frac{d\zeta}{dv} = \frac{\lambda^0}{\lambda^1} = \frac{L^0}{L^1}. \quad (3.21)$$

A fennmaradó twistorkomponensek:

$$\begin{pmatrix} L^2 \\ L^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{0'} \\ \mu_{1'} \end{pmatrix} = -i(\lambda^0, \lambda^1) \begin{pmatrix} v & \bar{\zeta} \\ -\zeta & u \end{pmatrix} = -i\lambda^0 \begin{pmatrix} v + \alpha\bar{\zeta} \\ -\bar{\zeta} - \alpha u \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Tehát a twistorkomponensek aránya:

$$L^0:L^1:L^2:L^3 = d\zeta:dv:i\bar{\zeta}dv - ivd\zeta:i\bar{\zeta}d\zeta - iudv. \quad (3.23)$$

Hasonló eljárással kapjuk $(L_x^+) = (\bar{\mu}_A, \bar{\lambda}^{A'})$ adjungált twistor komponenseit:

$$(L_0^+, L_1^+, L_2^+, L_3^+) = L_0^+ (1, \alpha, -i(u + \alpha\bar{\zeta}), -i(\zeta + \alpha v)). \quad (3.24)$$

Igen egyszerű a fényszerű vonalak kölcsönös metszési feltételének twistoralakja. Tekintsük az L -hez képest tetszőleges helyzetű X fényszerű egyenest:

$$(X^\alpha) = (\xi^A, \eta_{A'}), \quad (3.25)$$

ahol

$$\eta_{A'} = -i\xi^A x_{AA'}. \quad (3.26)$$

Ha L és X illeszkednek, akkor választhatjuk a metszéspontot $l^i = x^i$ vektorok közös végpontjának. Ezzel

$$\xi^A \mu_A = i\xi^A l_{AA'} \bar{\lambda}^{A'} = i\xi^A x_{AA'} \bar{\lambda}^{A'} = -\eta_{A'} \bar{\lambda}^{A'} \quad (3.27)$$

és

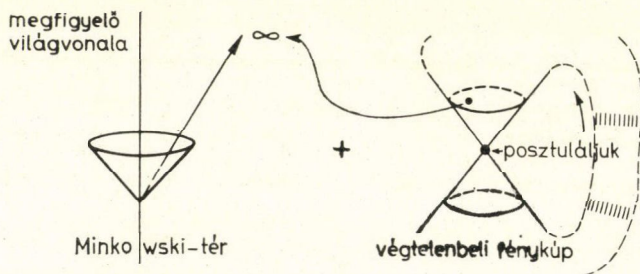
$$X^\alpha L_\alpha^+ = (\xi^A, \eta_{A'}) \begin{pmatrix} \bar{\mu}_A \\ \bar{\lambda}^{A'} \end{pmatrix} = \xi^A \bar{\mu}_A + \eta_{A'} \bar{\lambda}^{A'} = 0. \quad (3.28)$$

Tehát L és X egyenesek illeszkednek, ha

$$X^\alpha L_\alpha^+ = 0 \quad (3.29)$$

(Meg lehet mutatni, hogy az *elégséges* feltétele is a metszésnek). Ennek fényében a null twistorokra érvényes $L^\alpha L_\alpha^+ = 0$ összefüggés úgy értelmezhető, hogy L valós, fényszerű egyenes, ha „önmagát metszi”. Belátható, hogy párhuzamos L és X vonalakra $X^\alpha L_\alpha^+ = 0$ összefüggés azt jelenti, hogy a vonalak egyazon fényszerű hipersíkban fekszenek.

Megjegyezzük, hogy a $\lambda^A = 0$ feltétellel jellemzett twistorok a *kompaktifikált* Minkowski-téren ábrázolhatók. A kompaktifikálás* úgy történik, hogy egy megfigyelő világvonalának minden pontjából kiinduló fénykúpokon az alkotókhoz hozzávesszük a „végtelenpontot” [14]. Így a téridőt kiegészítjük a „végtelenbeli



13. ábra

fénykúppal”, amelynek csúcspontja és végtelenpontjai azonban nem tartoznak véges fényszerű vonalakhoz, így ezek létezését külön posztuláljuk. A komplett végtelenbeli fénykúppal kiegészített Minkowski-téren értelmezhetők az általános

* Egy sokaságot *kompaktnak* nevezünk, ha tetszőleges pontsorozatának van torlódási pontja. Kompakt sokaságnak tehát nincs „pereme” és nincsenek „végtelenhelyei”.

twistorok $\lambda^4=0$ -val. Nincs módunk arra, hogy a téridő kompaktifikálására, amely ugyancsak R. Penrose nevéhez fűződik, itt részletesebben kitérjünk, mindössze azzal a megjegyzéssel elégszünk most meg, hogy konform transzformációkkal a téridő „végtelenpontjai” véges helyekkel egyenrangúvá tehetők, és így kényelmesen kezelhető matematikailag a végtelenfogalom.

4. Robinson-nyalábok

Szeretnénk a nem-null twistoroknak is szemléletes jelentést tulajdonítani. Ehhez az nyújt támpontot, hogy tetszőleges (valós) L fényszerű vonal egyértelműen jellemezhető az összes, őt metsző fényszerű vonalak megadásával. L pontjait tehát a hozzájuk tartozó fénykúp alkotóinak metszéspontjaiként fogjuk fel. Twistornyelven, ha ismerjük az összes olyan X^z twistorokat, amelyekre $X^z X_z^+ = 0$ és $X^z L_z^+ = 0$, ahol $L^z L_z^+ = 0$ és $L^z \neq 0$, akkor ismerjük L^z -t is — arányossági tényezőtől eltekintve.

A 3. pontban megmutattuk, hogy L^z fényszerű vonalat (L) jellemez. Most látjuk, hogy L_z^+ viszont olyan fényszerű nyalábot vagy *kongruenciát* definiál, amely L -et metsző fényszerű vonalakból áll (kongruencia = olyan görbesereg, amelynek — általában — egy eleme megy át a téridő egy tetszőleges pontján). És ez az a geometriai értelmezés, amely már könnyen általánosítható nem-null twistorokra is! Tetszőleges R_z twistort azoknak az X fényszerű ($X^z X_z^+ = 0$) vonalaknak a kongruenciájával ábrázolhatunk a téridőben, amelyekre $X^z R_z = 0$. Ha $R_z R^{+z} \neq 0$, akkor a kongruenciát *Robinson-nyalábnak* nevezzük, ugyanis Ivor Robinson tanulmányozta először e nyaláb tulajdonságait részletesen.

Ha $R_z R^{+z} \geq 0$, akkor a Robinson-nyalábot $\begin{pmatrix} \text{jobb} \\ \text{bal} \end{pmatrix}$ sodrásúnak nevezzük. Az elnevezés oka nemsokára világossá válik. Ehhez röviden áttekintjük a Robinson-nyalábok szerkezetét.

Belátható, hogy tetszőleges két Robinson-nyaláb átvihető egymásba egy Poincaré-transzformációval (tértükrözéseket is ideértve). Vizsgáljuk ezért most az alábbi speciálisan választott Robinson-nyalábot. Legyen ε tetszőleges valós szám, és a nyalábhoz rendelt twistor komponensei

$$(R_z) = (\varepsilon/\sqrt{2}, 0, 1, 0). \quad (4.1)$$

Ekkor

$$R_z R^{+z} = \sqrt{2} \cdot \varepsilon. \quad (4.2)$$

Legyen $(X^z) = (\xi^0, \xi^1, \eta_0, \eta_1)$. X^z a kongruenciához tartozik, ha

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \xi^0 \varepsilon + \eta_0 = 0. \quad (4.3)$$

Legyenek X egy x^i pontjának koordinátái $x^0=t$, $x^1=z$, $x^2=x$ és $x^3=y$. $\eta_{A'} = -i\xi^A x_{AA'}$ összefüggés szerint

$$(\eta_0, \eta_1) = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\xi^0, \xi^1) \begin{bmatrix} t-z & -x+iy \\ -x-iy & t+z \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

(4.3) feltételből:

$$-\varepsilon \xi^0 = i\xi^0(-t+z) + i\xi^1(x+iy). \quad (4.5)$$

Ezért

$$\xi^0, \xi^1 = x + iy : t - z + i\varepsilon. \quad (4.6)$$

ξ^A spinor X érintő vektorát határozza meg, így

$$\begin{bmatrix} \xi^0 \bar{\xi}^{0'} & \xi^0 \bar{\xi}^{1'} \\ \xi^1 \bar{\xi}^{0'} & \xi^1 \bar{\xi}^{1'} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} dt + dz & dx + idy \\ dx - idy & dt - dz \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

E két összefüggésből kapjuk X vonal differenciálegyenleteit:

$$dt + dz : dx - idy = dx + idy : dt - dz = x + iy : t - z + i\varepsilon. \quad (4.8)$$

A megoldás:

$$t - z + i\varepsilon = (x + iy)\alpha \quad (4.9)$$

$$(x - iy) - (t + z)\alpha = \beta,$$

ahol α és β komplex integrációs állandók, amelyekre

$$\text{Im}(\beta\alpha) = \varepsilon. \quad (4.10)$$

α és β mondják meg, hogy a görbeseregnek melyik eleméről van szó. Ehhez éppen három független adat kell.

A Robinson-nyalábok szerkezetéről némileg szemléletes képet nyerhetünk, ha az egyes vonalak érintő vektorát levetítjük egy $t = \tau$ térszerű hiperfelületre. E háromdimenziós hiperfelületen a vetületvektorok görbesereget jellemeznek, melynek egyenleteit (a számolás mellőzésével) az

$$x^2 + y^2 + (z - \tau)^2 - 2\varepsilon(x \sin \varphi + y \cos \varphi) \operatorname{tg} \vartheta = \varepsilon^2 \quad (4.11)$$

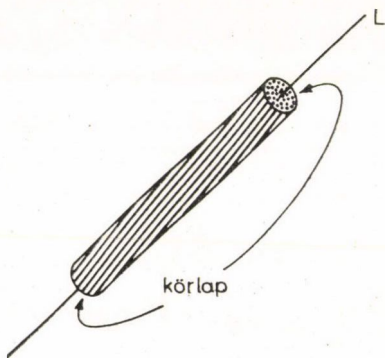
$$z - \tau = (x \cos \varphi - y \sin \varphi) \operatorname{tg} \vartheta$$

alakban kapjuk. ϑ és φ paraméterek definiálják a különböző görbéket. (4.11) szerint ezek gömbök és síkok metszsvonalai, vagyis körök. $\vartheta = 0$ adja meg a legkisebb sugarú ($|\varepsilon|$) kört, melynek középpontja $z = \tau$, $x = y = 0$ helyen van. Ezt valamennyi kör átmetszi. Ha ε kicsiny, akkor τ növekedésével ez a kör a $z = t$, $x = y = 0$ fényszerű vonalat körülhatároló világcsövön halad végig.

A körök érintői merőlegesek azokra a gömbökre, amelyeket $t = \tau$ hipersík és a $z = t$, $x = y = 0$ vonalhoz tartozó fénykúpok metszete definiál.

Kis ε -ra az alábbi szemléletes képet alkothatjuk a Robinson-nyalábról (14. ábra). A nyaláb fényszerű egyenesei tehát „körüljárják” L fényszerű egyenest, de sehol sem metszik. A körlapok első közelítésben az L egyenesen átmenő fényszerű hipersíkokban vannak. Ha $R_\pm R^{\pm\alpha}$ pozitív (negatív), akkor növekvő t irányában

haladva a nyaláb jobb- (ill. bal) sodrású. A nyalábot alkotó egyenesek egymást sem metszik, és a körkeresztmetszetű tárgyak a nyalábbal „megvilágítva” mindenütt körkeresztmetszetű árnyékot vetnek a mögöttük (a három dimenziós térben, az ernyő



14. ábra

nyugalmi rendszerében a nyalábra merőlegesen) elhelyezett ernyőre. Ebből a képből érthető meg a twistor elnevezés is: a *twist* angol ige magyar jelentése: csavarodni.

Megjegyezzük még, hogy a fényszerű vonalak illeszkedési feltétele nem-null twistorokra is általánosítható. Figyelemre méltó, hogy a Robinson-nyalábok „metszéspontjai” nyolc dimenziós sokaságot alkotnak, és a „szokásos” módon komplexifikált Minkowski-tér pontjaiként értelmezhetők.

5. Twistorok ábrázolása spinortereken

Az a tény, hogy egyetlen twistor egészében reprezentál egy spinorteret, ismét aláhúzza a twistorfogalom nemlokális jellegét. Most megmutatjuk, hogyan történik a hozzárendelés a twistorok és spinorterek között. Abból az előző pontban bemutatott eredményből indulunk ki, hogy általános twistorokat Robinson-nyalábokkal ábrázolhatunk. Megkeressük a kapcsolatot a spinorterek és Robinson-nyalábok között.

Írjuk ki részletesen annak feltételét, hogy X a nyalábhoz tartozik:

$$0 \equiv X^\alpha L_\alpha^+ = \xi^A \bar{\mu}_A + \eta_{A'} \bar{\lambda}^{A'} = \xi^A (\bar{\mu}_A - i x_{AA'} \bar{\lambda}^{A'}). \quad (5.1)$$

Innen látszik, hogy ξ^A arányos a zárójelben álló spinorkifejezéssel. Mivel X csak arányossági tényező erejéig adja meg X^α twistort, megválaszthatjuk ezt a tényezőt úgy, hogy éppen

$$\xi_A = \bar{\mu}_A - i x_{AA'} \bar{\lambda}^{A'} \quad (5.2)$$

teljesüljön. Ezt az összefüggést úgy tekinthetjük, hogy adott L_α^+ twistorra *spinorteret* definiál, hiszen ξ_A függ x^i -től (5.2) szerint. A $\xi_A(x^i)$ spinortérhez rendelt $\xi_A \bar{\xi}_{A'}$ fényszerű vektorok tehát a Robinson-kongruencia érintő vektorai.

(5.2) definícióra most hassunk $\nabla_{BB'} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{BB'}}$ operátorral:

$$\nabla_{BB'} \xi_A = i \varepsilon_{BA} \bar{\lambda}_{B'}. \quad (5.3)$$

Itt felhasználtuk, hogy $\nabla_{BB'}$ operátor kielégíti a

$$\nabla_{BB'} x_{AA'} = \varepsilon_{AB} \varepsilon_{A'B'} \quad (5.4)$$

összefüggést. (5.3) szerint ξ_A spinortér eleget tesz a

$$\nabla_{(B'}^{B'} \xi_{A)} = 0 \quad (5.5)$$

differenciálegyenletnek. Megfordítva, ha valamely ξ_A spinortér kielégíti (5.5) egyenletet, akkor mindenesetre (5.3) alakú. (5.4)-ből: $\nabla_C^C \nabla_B^{B'} \xi_A = 0$, ahonnan $\bar{\lambda}_{B'}$ konstans. (5.3)-at integrálva kapjuk (5.2) egyenletet, ahol $\bar{\mu}_A$ újabb (integrációs) konstans spinor.

Ezzel beláttuk, hogy egyértelmű megfeleltetés létezik a twistorok és (5.5)-nek eleget tevő spinorterek között. Megjegyzendő, hogy $L^\alpha L_\alpha^+$ -t kifejezhetjük ξ_A -val:

$$L^\alpha L_\alpha^+ = 2 \operatorname{Re}(\lambda^A \xi_A) = \operatorname{Im}(\bar{\xi}^{B'} \nabla_{B'}^A \xi_A). \quad (5.6)$$

(5.3)-ból:

$$\xi^A \bar{\xi}^{B'} \nabla_{BB'} \bar{\xi}_A = -i \bar{\xi}^{B'} \bar{\lambda}_{B'} \xi_B. \quad (5.7)$$

Az egyenletet tetszőleges $\iota_A (\xi_A \iota^A = 1)$ spinorra levetítve, a bal oldalon felismerjük $Q = \iota^B \xi^A \bar{\xi}^{B'} \nabla_{BB'} \xi_A$ spin koefficiens, melynek valós része a $\xi_A \bar{\xi}^{A'}$ érintő vektorral jellemzett geodetikus nyaláb divergenciája, képzetes része pedig a rotáció*. Meg lehet mutatni, hogy a divergencia nem konformisan invariáns mennyiség, viszont a rotáció invariáns. Hasonlóképpen invariáns a nyaláb nyírása, amely jelen esetben eltűnik, mivel a nyírást $\sigma = \xi^B \xi^A \bar{\iota}^{B'} \nabla_{BB'} \xi_A$ spin koefficiens jellemzi, ámde itt

$$\xi^B \xi^A \nabla_{BB'} \xi_A = 0. \quad (5.8)$$

A nyírás fogalmának szokásos geometriai szemléltetése szolgáltatja azt a korábban említett tulajdonságát a Robinson-nyalábnak, hogy körlapot körlapba visz át.

6. A twistorok kinematikai jelentése

A speciális relativitáselmélet elemeiből ismeretes, hogy zárt fizikai rendszerek meghatározott P^a négyes impulzussal és a koordináta-rendszer O origópontjának választásától függő M^{ab} (antiszimmetrikus) teljes impulzusmomentum-tenzorral rendelkeznek. Az origó $O \rightarrow \tilde{O}$ eltolásának hatására a négyesimpulzus nem változik meg, az impulzusmomentum pedig az

$$M^{ab} \rightarrow \tilde{M}^{ab} = M^{ab} - 2X^{[a} P^{b]} \quad (6.1)$$

összefüggés szerint transzformálódik**, ahol x^a az $\overline{O\tilde{O}}$ eltolásvektor.

Definiáljuk a rendszer spinvektorát (Pauli—Lubanski vektor):

$$S_a = -\frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} P^b M^{cd}. \quad (6.2)$$

A spinvektor eltolásinvariáns: $S_a = \tilde{S}_a$. A rendszer tömegközéppontjának történetét az origónak azon lehetséges választásai ábrázolják, amelyekre

$$\tilde{P}_a \tilde{M}^{ab} = 0. \quad (6.3)$$

(6.3) definiálja tehát a tömegközéppont világvonalát. A tömegközéppont X^a koordinátáit kifejezhetjük (6.3)-ból. Ehhez célszerű külön tárgyalni azokat az eseteket, ha a rendszer négyes impulzusa időszerű, ill. fényszerű.

1. Legyen

$$P_a P^a > 0. \quad (6.4)$$

Ekkor (6.3) megoldása:

$$X^a = \frac{M^a{}_b P^b}{P_c P^c} + \lambda P^a. \quad (6.5)$$

* A spin koefficiensek módszerének magyar nyelvű összefoglalása megtalálható 24. hivatkozásban, amely görbült térbeli alkalmazásokat is tárgyal.

** Indexek szögletes zárójellezése antiszimmetrizálást jelöl, például

$$X^{[a} P^{b]} \equiv \frac{1}{2!} (X^a P^b - X^b P^a).$$

Behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk arról, hogy (6.5) valóban megoldás:

$$\begin{aligned} P_a(M^{ab} - 2X^{[a}P^{b]}) &= P_a \left(M^{ab} - 2 \frac{M^{[a}P^{b]}P^r}{P_s P^s} - 2\lambda P^{[a}P^{b]} \right) = \\ &= P_a M^{ab} + \frac{P_a M^{br} P_r P^a}{P^s P_s} = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Tömegközépponti rendszerben

$$\tilde{M}^{ab} = \frac{\varepsilon^{abcd} S_c P_d}{P_r P^r}. \quad (6.7)$$

2. Legyen a rendszer teljes négyesimpulzusa fényyszerű:

$$P_a P^a = 0. \quad (6.8)$$

A tömegközéppontot definiáló (6.3) összefüggést így írjuk fel:

$$P_b(M^{ab} + X^b P^a) = 0. \quad (6.9)$$

Innen

$$\begin{aligned} M^{ab} P_b &\sim P^a \rightarrow P^{[a} M^{b]} P_c = 0 \rightarrow \\ P^{[a} M^{bc]} P_c &= 0 \rightarrow P_{[c} S_{d]} = 0 \\ &\rightarrow S_a = s P_a. \end{aligned} \quad (6.10)$$

s arányossági tényezőt helicitásnak nevezzük és $|s|$ a spin ($\hbar=1$ egységrendszerben, kvantumrendszerekre $|s|$ félegész).

M^{ab} és P^a mozgásállandók, így (6.9)-ből $X P^a = k$ (k =konstans) következik. P^a -hoz találhatunk olyan A^a vektort, hogy éppen $P^a A_a = k$ teljesüljön. Az $Y^a = X^a - A^a$ jelöléssel a tömegközéppont egyenlete: $Y^a P_a = 0$. Ez az összefüggés fényyszerű hipersíkot definiál. Úgy tűnik tehát, hogy most a tömegközéppont „világvonala” háromdimenziós tartománnyá változott. Ennél azonban többet is mondhatunk, ha különválasztva tárgyaljuk a spintelen és spinnel rendelkező fényyszerű rendszereket:

a) $|s|=0$. Ekkor M^{ab} a pályamomentum, ezért így írhatjuk fel: $M^{ab} = 2A^{[a}P^{b]}$. Itt A^a tetszőlegesen választható vektor. Innen a tömegközéppont koordinátái:

$$X^a = A^a + \lambda P^a. \quad (6.11)$$

Valóban, e vonal bármely \tilde{O} pontjára nézve $\tilde{M}^{ab}=0$. Spintelen esetben tehát a fényyszerű hiperfelületet annak egy tetszőleges fényyszerű egyenesével helyettesíthetjük, és ezt az egyenest tekinthetjük a tömegközéppont világvonalának.

b) $|s| \neq 0$. Ekkor az $X^b P_b = k$ hiperfelület tetszőleges két pontja átvihető egymásba Poincaré-transzformációval. A hipersík pontjai tehát egyenértékűek. Ebben az értelemben a rendszer most nem lokalizálható.

A zérus tömegű részecskék kinematikája előnyösen tárgyalható twistorokkal. P^a fényyszerű vektor $\pi_{A'}$ spinornak felel meg:

$$P^a = \bar{\pi}_A \pi_{A'}. \quad (6.12)$$

P^a vektor nem határozza meg $\pi_{A'}$ spinort egyértelműen; a $\pi_{A'} \rightarrow e^{i\theta} \pi_{A'}$ alakú transz-

formációk megengedettek. Az impulzusmomentum-tenzort szimmetrikus spinornak feleltetjük meg (l. A) Függelékét):

$$M^{ab} = \mu^{AB} \varepsilon^{A'B'} + \varepsilon^{AB} \bar{\mu}^{A'B'}. \quad (6.13)$$

Az $S^b = sP^b$ egyenlőség spinoralakja:

$$S_{BB'} = i\bar{\pi}^A \mu_{AB} \pi_{B'} - i\bar{\pi}_B \pi^{A'} \bar{\mu}_{A'B'} = s\bar{\pi}_B \pi_{B'}. \quad (6.14)$$

Kontrahálunk $\bar{\pi}^B$ -vel:

$$\mu_{AB} \bar{\pi}^A \bar{\pi}^B = 0. \quad (6.15)$$

Innen következik, hogy μ_{AB} spinor

$$\mu_{AB} = i\omega_{(A} \bar{\pi}_{B)} \quad (6.16)$$

alakú. Az impulzusmomentum-tenzor:

$$M^{AA'BB'} = i\bar{\pi}^{(A} \omega^{B)} \varepsilon^{A'B'} - i\pi^{(A'} \bar{\omega}^{B')} \varepsilon^{AB}. \quad (6.17)$$

Ezzel beláttuk, hogy a (P^a, M^{ab}) rendszert $(\omega_A, \pi^{A'})$ spinorpárral helyettesíthetjük. A megfeleltetés nem egy-egyértelmű: az $(e^{i\theta} \omega_A, e^{i\theta} \pi^{A'})$ spinorpár ugyanezen impulzust és impulzusmomentumot határozza meg.

A $(-\omega_A, \pi^{A'})$ spinorpár a koordináta-rendszer egy adott választására Z^+_α twistort definiál. Ez a definíció nyilván nem érvényes tetszőleges koordináta-rendszerben, hiszen pl. ω_A megváltozik az origó eltolásakor.

A koordináta-rendszer fenti választásával

$$(Z^\alpha) = (\bar{\pi}^A, -\bar{\omega}_{A'}), \quad (6.18)$$

és ezért

$$Z^\alpha Z^+_\alpha = \omega^A \bar{\pi}_A + \bar{\omega}^{A'} \pi_{A'} = 2s. \quad (6.19)$$

Itt felhasználtuk (6.14) összefüggést. Látjuk, hogy $s=0$ esetén Z^α null twistor és fényszerű vonallal (a tömegközéppont világvonalával) ábrázolható. Ha viszont $s \neq 0$, akkor a tömegközéppont nem lokalizálható.

7. Twistortér és Minkowski-tér

Az előző pontokban bemutattuk, hogy csupán a twistorkomponensek *hányadosainak* tulajdoníthatunk fizikai jelentést. L^α twistor komponenseinek három komplex hányadosa, $L^0:L^1:L^2:L^3$ háromdimenziós komplex projektív tér egy pontját jelöli ki. E projektív teret C térnek nevezzük. C tér pontjai tehát az M Minkowski-tér komplexifikált fényszerű vonalainak felelnek meg. Abból a célból, hogy a C képet konkrét fizikai problémák tárgyalására használni tudjuk, meg kell találnunk C térben annak feltételét, hogy M Minkowski-tér egy fényszerű vonala *valós*. Ismernünk kell ezenkívül M tér fényszerű vonalainak *metszési feltételét* C térben, és M tér egy *pontjának* képét is tudnunk kell C térben. Mindehhez szükséges az adjungálás műveletének C képbeli megfogalmazása.

Feleltessük meg L_α^+ adjungált twistornak azon komplex síkot C térben, amelynek X^α pontjaira

$$X^\alpha L_\alpha^+ = 0. \quad (7.1)$$

A pont \leftrightarrow sík megfeleltetéssel ekvivalens $L^\alpha \leftrightarrow L_\alpha^+$ megfeleltkezést $(++--)$ szignatúrájú hermitikus korrelációnak nevezzük. A szignatúrát az

$$X^\alpha X_\alpha^+ = X^0 \bar{X}^2 + X^1 \bar{X}^3 + X^2 \bar{X}^0 + X^3 \bar{X}^1 = (X^0, X^1, X^2, X^3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}^0 \\ \bar{X}^1 \\ \bar{X}^2 \\ \bar{X}^3 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

hermitikus forma definiálja. Tekintsük ugyanis $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix karakterisztikus egyenletét:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = +\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0. \quad (7.3)$$

A sajátértékek

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -1. \quad (7.4)$$

A hermitikus forma diagonalizálásával tehát valóban a $(++--)$ szignatúra adódik.

M tér valós fényyszerű vonalai C térben az öt dimenziós N alteret képezik, melyet a null twistorokra érvényes

$$X^\alpha X_\alpha^+ = 0 \quad (7.5)$$

feltétel határoz meg. C teret N két, egymással össze nem függő részre osztja. E tartományok:

C^+ , ahol $X^\alpha X_\alpha^+ > 0$ (jobbsodrású komplex fényyszerű vonalak),

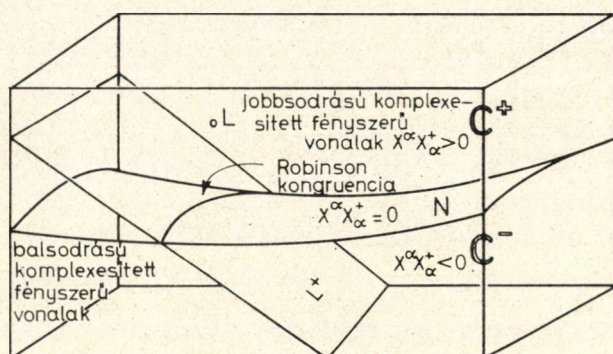
C^- , ahol $X^\alpha X_\alpha^+ < 0$ (balsodrású komplex fényyszerű vonalak).

C^+ és C^- közös határa N (15. ábra). C tér L pontjának „polár síkja” L^+ . A polár sík X^α pontjaira tehát

$$X^\alpha X_\alpha^+ = 0, \quad X^\alpha L_\alpha^+ = 0. \quad (7.6)$$

Most megkeressük M tér egy pontjának képét C térben. Ehhez felhasználjuk a fényyszerű vonalak metszési feltételét. M tér egy P pontját ugyanis meghatározza az a fénykúp, amelynek csúcsa éppen P . Legyen K és L a fénykúp két tetszőleges alkotója. A K és L egyeneseket metsző fényyszerű vonalak rendszerét C képben K^+ és L^+ síkok ábrázolják. A fénykúp, amelynek alkotói K és L egyenest is metszik (P csúcspontban), nyilván ezen síkok közös része C képben, vagyis komplex egyenes. Ez az egyenes N altérben fekszik, mert a fénykúp alkotói valósak. K^α és L^α twistorokra

$$K^\alpha K_\alpha^+ = 0, \quad L^\alpha L_\alpha^+ = 0, \quad K^\alpha L_\alpha^+ = 0. \quad (7.7)$$



15. ábra

Ezek a feltételek teljesülnek akkor is, ha például L^x twistort helyettesítjük

$$X^\alpha = \lambda L^\alpha + \mu K^\alpha \quad (7.8)$$

twistorral, ahol λ és μ tetszőleges komplex számok. (7.7) és (7.8) szerint X vonal is metszi K és L vonalat, vagyis P pont fénykúpjához tartozik. P pontot így a

$$P^{\alpha\beta} = L^\alpha K^\beta - K^\alpha L^\beta \quad (7.9)$$

antiszimmetrikus, kétindexes twistorral adjuk meg. Ha ugyanis L alkotót X alkotóval helyettesítjük:

$$P'^{\alpha\beta} = (\lambda L^\alpha + \mu K^\alpha) K^\beta - K^\alpha (\lambda L^\beta + \mu K^\beta) = \lambda P^{\alpha\beta}. \quad (7.10)$$

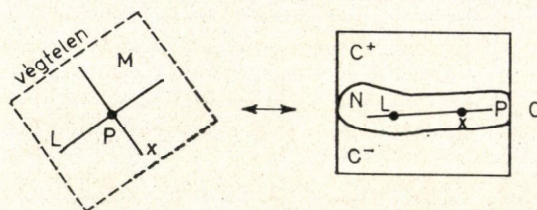
Mivel a twistorokat csak arányossági tényező erejéig ábrázoljuk, (7.10) szerint $P^{\alpha\beta}$ twistor nem függ P pont fénykúpja alkotóinak választásától.

Látjuk, hogy M pontjai antiszimmetrikus, kétindexes twistoroknak felelnek meg, melyek (7.9) következtében „egyszerűek”, tehát kielégítik a

$$P^{[\alpha\beta} P^{\gamma]\delta} = 0 \quad (7.11)$$

összefüggést. M tér P pontjának a C -képben megfelelő egyenest ugyancsak P -vel jelöljük. Tetszőleges, N altérben fekvő egyenesnek megfelel M tér egy pontja. Megjegyezzük még, hogy C -képben az N altér egy P egyenesével illeszkedő L pontnak M térben megfelel az L fényszerű vonallal illeszkedő P pont (16. ábra).

C és M tehát egyfajta „duális leírását” adják a geometriai viszonyoknak. E duális megfeleltetés további példái: M két pontja fényszerűen elválasztott, ha C -képben



16. ábra

a megfelelő N altérbeli egyenesek illeszkednek. M két fényszerű vonala illeszkedik, ha C -ben a megfelelő pontokat összekötő egyenes N altérben van.

$P^{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ értékű twistor. Általában,

a $K^{\alpha\beta \dots \varphi}_{\rho\sigma \dots \tau}$ p darab felső indexet és q darab alsó indexet tartalmazó

twistort $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ értékűnek nevezzük. Adjungáltját, mely $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ értékű twistor, (2.8) szabály indexenként történő alkalmazásával kapjuk. A transzformált twistor

$$\tilde{K}_{\alpha\beta\dots\tau}^{\sigma\dots\varphi} = K_{\lambda\dots\nu}^{\psi\dots\vartheta} t_{\psi}^{\alpha} t_{\chi}^{\beta} t_{\vartheta}^{\sigma} t_{\tau}^{\lambda} \tilde{t}_{\varphi}^{\nu}, \quad (7.12)$$

ahol t_{β}^{α} unimoduláris mátrix, amely invariánsan hagyja a $Z^{\alpha}Z_{\alpha}^{+}$ hermitikus alakot. Mivel ennek szignatúrája $(++--)$, t_{β}^{α} mátrixok az $SU(2,2)$ csoport definiáló ábrázolását alkotják. A twistortranszformációkat M térben a konform transzformációk ábrázolják. Mivel a konform csoport tartalmazza az inverziókat, a téridő „végtelenpontja”, amely a végtelenbeli fénykúp csúcspontja (3. pont), nem konformisan invariáns: inverziók I pontot az origóba viszik át. A konform csoportnak $I^{\alpha\beta}$ twistort invariánsan hagyó alcsoportja éppen a Poincaré-csoport. Tehát, ha a Minkowski-tér konform szerkezetén túlmenően a metrikus szerkezetét is twistorokkal kívánjuk leírni, akkor bevezetjük $I^{\alpha\beta}$ „metrikus twistort”, és csak olyan (Poincaré) transzformációkat engedünk meg, amelyek $I^{\alpha\beta}$ alakját változatlanul hagyják. Az általunk használt koordinátarendszerben $I^{23} = -I^{32} = 1$ és a többi komponensek nullák.

Térjünk most át a Robinson-nyalábok C -térbeli ábrázolására. Ehhez felhasználjuk a twistorelmélet egyik fontos eszözét, a Kerr-tételt [1]:

M tér egy fényyszerű vonalakból álló kongruenciája akkor és csakis akkor nyírásmentes, ha C -ben ábrázolható N és valamely komplex analitikus felület metszeteként.

A komplex analitikus felületeket a twistorkoordináták adott $f(Z^{\alpha})$ alakú analitikus függvénye definiálja az

$$f(Z^{\alpha}) = 0 \quad (7.13)$$

helyeken. (7.13) speciális esete a Robinson-nyalábok

$$R_{\alpha}Z^{\alpha} = 0 \quad (7.14)$$

definíciója, ahol tehát $f(Z^{\alpha}) = R_{\alpha}Z^{\alpha}$. (7.14) komplex analitikus síkot határoz meg, ezért a Robinson-kongruenciákat a C térben N altér és komplex analitikus sík metszete ábrázolja.

8. A zérus tömegű részecsketerek Penrose-ábrázolása

A twistorelmélet egyik legjelentősebb eredménye, hogy az

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (8.1)$$

spinű, zérus nyugalmi tömegű szabad részecsketerek hullámfüggvénye előállítható analitikus függvény alkalmasan választott konturintegrálja alakjában [3]. Az s spinű, zérus nyugalmi tömegű szabad részecsketér egyenletei [25]:

$$\nabla^{P'A}\Phi_{AB\dots L} = 0. \quad (8.2)$$

Itt $\Phi_{AB\dots L}$ $2s$ indexes spinortér, a részecske állapotfüggvénye. Skalár ($s=0$), zérus tömegű részecske a Klein—Gordon egyenlettel írható le:

$$\nabla_{AA'}\nabla^{AA'}\Phi=0. \quad (8.3)$$

Új jelölést vezetünk be a független spinorkomponensekre. Legyen

$$\Phi_0=\Phi_{000\dots 0}, \quad \Phi_1=\Phi_{10\dots 0}, \dots, \quad \Phi_{2s}=\Phi_{11\dots 1}, \quad (8.4)$$

röviden: $\Phi_r, r=0, 1, \dots, 2s$. u, v, ζ és $\bar{\zeta}$ „spinorkoordinátákkal” $s \neq 0$ -ra így írhatók fel a téregyenletek:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_r}{\partial \bar{\zeta}} &= \frac{\partial \Phi_{r+1}}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_r}{\partial v} &= \frac{\partial \Phi_{r+1}}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad r=0, 1, \dots, 2s-1. \quad (8.5)$$

Skalár részecskére legyen $\Phi=\Phi_0$. A téregyenlet:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \right) \Phi_0 = 0. \quad (8.6)$$

(8.5 és 6) egyenletek automatikusan kielégülnek, ha a térmennyiségeket $F=F(\lambda, \mu, v)$ három komplex változós analitikus függvény kontúrintegráljaként írjuk fel:

$$\Phi_r = \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^r F(\lambda, u + \lambda \bar{\zeta}, \zeta + \lambda v) d\lambda. \quad (8.7)$$

Itt $\mu = u + \lambda \bar{\zeta}$ és $v = \zeta + \lambda v$. A kontúr körülveszi F szingularitásait és folytonosan változik u, v, ζ és $\bar{\zeta}$ paraméterekben.

Behelyettesítéssel közvetlenül meggyőződhetünk arról, hogy a (8.7) alakú Φ_r függvények kielégítik a téregyenleteket. Utóbbiakat tehát F analicitásának következményei.

Megfordítva, a téregyenletek bármely analitikus megoldása felírható (8.7) alakban (határátmenettel nem-analitikus terek is előállíthatók). Ekkor azonban F nem konstruálható meg egyértelműen $\Phi_{AB\dots L}$ ismeretében. Nyilvánvaló ugyanis, hogy tetszőleges, a kontúr belsejében reguláris függvényt F -hez adva, az integrál értéke nem változik. Az F megválasztásában jelentkező önkény egyfajta „mértékcsoportot” alkot, melynek szerkezete függ a kontúr választásától. F pólusainak alkalmas megválasztásával igen egyszerűen konstruálhatjuk meg a téregyenletek algebrailag speciális és „null” megoldásait [3]. Ennek részletes tárgyalása azonban eltérést jelentene a twistor-kvantálás gondolatmenetétől, így itt nem foglalkozunk a témával. Tárgy-körünk szempontjából viszont lényeges a Penrose-ábrázolás alapösszefüggéseinek twistoralakja.

F függvény argumentumaiban felismerjük Z^a twistorkomponensek hányadosait (1.(3.23) arányokat). Írhatjuk tehát:

$$F(\lambda, u + \lambda \bar{\zeta}, \zeta + \lambda v) \equiv F\left(-\frac{Z^0}{Z^1}, i\frac{Z^3}{Z^1}, i\frac{Z^2}{Z^1}\right). \quad (8.8)$$

ahol

$$du + \lambda d\bar{\zeta} = 0 = d\zeta + \lambda dv. \quad (8.9)$$

Vezessük be most Z^α twistorkomponensek $f(Z^\alpha)$ függvényét az alábbi definícióval:

$$f(Z^\alpha) \equiv (iZ^1)^{-2s-2} F\left(-\frac{Z^0}{Z^1}, i\frac{Z^3}{Z^1}, i\frac{Z^2}{Z^1}\right). \quad (8.10)$$

$f(Z^\alpha)$ tehát Z^α -ban $-2s-2$ fokú homogén függvény, és persze analitikus függvény is. Mindjárt meglátjuk, hogy miért célszerű a homogenitási foknak ez a választása.

(8.8)-ban u, v és ζ adják meg P pont koordinátáit és λ határozza meg a P ponton átmenő fényszerű vonal irányát (1.3. pontot). Válasszuk ki P fénykúpjának $\lambda = \infty$ és $\lambda = 0$ irányú alkotóit. A megfelelő twistorokat X^α és Y^α -val jelölve, a twistorok ábrázolásában lévő önkényt (arányossági tényező) is felhasználva:

$$(X^\alpha) = (i, 0, v, -\bar{\zeta}), \quad (Y^\alpha) = (0, -i, \zeta, -u). \quad (8.11)$$

Az X^α, Y^α bázisban

$$Z^\alpha = \lambda X^\alpha + Y^\alpha. \quad (8.12)$$

Most tehát $Z^1 = -i$. A Penrose-ábrázolást* definiáló (8.7.) összefüggést így írhatjuk fel:

$$\Phi_r(X^\alpha, Y^\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^r f(\lambda X^\alpha + Y^\alpha) d\lambda \quad (r=0, 1, \dots, 2s). \quad (8.13)$$

Itt Φ_r argumentuma X^α és Y^α twistorokat tartalmazza. Φ_r alakja ugyanis függ a spinorbázis választásától, amelyet általában a Pauli-mátrixok (összekötő mennyiségek) konkrét ábrázolásának megjelölésével érünk el. X^α és Y^α twistorok spinoralakja azonban szintén felhasználható a spinorbázis definiálására. X^α és Y^α tehát teljesen meghatározzák Φ_r térmennyiséget. Ha X^α és Y^α fenti speciális választása (8.11) helyett tetszőleges, P ponton átmenő \hat{X}^α és \hat{Y}^α twistorokat választunk bázisként, amelyekre csupán az

$$\hat{X}^\alpha \hat{X}_\alpha^+ = \hat{Y}^\alpha \hat{Y}_\alpha^+ = \hat{X}^\alpha \hat{Y}_\alpha^+ = 0 \quad (8.14)$$

feltételek teljesülését követeljük meg, akkor a P pontot reprezentáló

$$P^{\alpha\beta} = X^\alpha Y^\beta - Y^\alpha X^\beta \quad (8.15)$$

antiszimmetrikus twistort nem változtattuk meg. Konkrét alakban felírva a régi és új twistorbázis kapcsolatát,

$$\hat{X}^\alpha = \varrho X^\alpha + \sigma Y^\alpha, \quad \hat{Y}^\alpha = \tau X^\alpha + \omega Y^\alpha, \quad (8.16)$$

ahol

$$\varrho\omega - \sigma\tau = 1. \quad (8.17)$$

Ez éppen a P pontbeli spintranszformáció. \hat{X}^α és \hat{Y}^α twistorok (8.16) alakját (8.13) kontúrintegrálba írva és bevezetve μ változót a

$$\lambda \equiv \frac{\varrho\mu + \tau}{\sigma\mu + \omega} \quad (8.18)$$

* Miért is ne nevezhetnénk el a twistorelméletnek ezt a szép eredményét megtalálójáról?

definícióval, a következő eredményt kapjuk:

$$\Phi_r(X^\alpha, Y^\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint (\varrho\mu + \tau)^r (\sigma\mu + \omega)^{2s-r} f(\mu\hat{X}^\alpha + \hat{Y}^\alpha) d\mu. \quad (8.19)$$

Ha ezt az alakot összehasonlítjuk a transzformált twistorokkal felírt

$$\Phi_r(\hat{X}^\alpha, \hat{Y}^\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint \mu^r f(\mu\hat{X}^\alpha + \hat{Y}^\alpha) d\mu \quad (r=0, 1, \dots, 2s) \quad (8.20)$$

kontúrintegrállal, akkor látjuk, hogy a homogén Lorentz-csoport $D(s, 0)$ típusú ábrázolásának transzformációs törvényéhez [23] jutottunk. Ezzel bebizonyítottuk, hogy (8.13) kontúrintegrál valóban a kívánt transzformációs tulajdonságokkal rendelkező $f(Z^\alpha)$ függvényt állítja elő. Egyúttal azt is megindokoltuk, hogy miért célszerű $-2s-2$ fokú homogén függvénynek választani $f(Z^\alpha)-t$.

(8.13)-ból következik a téregyenletek twistoralakja:

$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial X^\alpha} = \frac{\partial \Phi_{r+1}}{\partial Y^\alpha} \quad (r = 0, 1, \dots, 2s-1). \quad (8.21)$$

Skalár részecskére ($s=0$):

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial X^\alpha \partial Y^\beta} = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial Y^\alpha \partial X^\beta}. \quad (8.22)$$

(8.13) szerint az egyes Φ_r komponensek X^α -nak $-(r+1)$ és Y^α -nak $-2s-r+1$ fokú homogén függvényei. Alkalmazzuk az Euler-tételt:

$$X^\alpha \frac{\partial \Phi_r}{\partial X^\alpha} = -(r+1)\Phi_r, \quad Y^\alpha \frac{\partial \Phi_r}{\partial Y^\alpha} = -(2s-r+1)\Phi_r. \quad (8.23)$$

(8.21), (8.22) és (8.23) a zérus nyugalmi tömegű részecske terek twistoregyenletei. Φ_r térmennyiségek tehát *kétpontfüggvények* a twistortérben. Valóban: láttuk, hogy X és Y fényszerű vonalak P metszéspontja megfelel C tér X és Y pontjait összekötő P egyenesnek. Az a tény, hogy Φ_r térmennyiség függ X és Y pontok választásától P egyenesen, M térben $\Phi_{AB\dots L}$ komponensek függésének felel meg a spinorbázis választásától.

Az állapotfüggvény (8.13) alakú előállítását általánosíthatjuk nem-null X^α és Y^α twistorokra is. Ekkor X és Y vonalak metszéspontja komplex Minkowski-térben helyezkedik el. A Penrose-ábrázolás tehát alkalmas a részecsketerek komplex általánosítására. A komplexifikálásnak ez a módja azonban nem tévesztendő össze az *állapotfüggvény* komplex általánosításával, amely egyszerűen két valós állapotfüggvény egyesítéséből származik. Ehelyett itt a (komplex vagy valós) állapotfüggvényt komplex Minkowski-téren értelmezzük.

(8.13) komplex általánosítása lehetővé teszi, hogy megtaláljuk a *pozitív frekvenciás* és *negatív frekvenciás* terek twistorelőállítását [2]. Anélkül, hogy a bizonyítás részleteire kitérnénk, megemlítjük, hogy $f(Z^\alpha)$ analitikus függvény pozitív frekvenciás teret állít elő, ha NUC^+ -ban a szinguláris tartomány elkülöníthető két diszjunkt részre. Ennek megfelelően negatív frekvenciás a tér, ha szingularitási tartománya NUC^- -ban két diszjunkt tartományra különül el. E megszorítástól függetlenül,

természetesen bárhol lehetnek szingularitások C^+ -ban (illetőleg pozitív frekvenciás terekre C^- -ban).

A pozitív frekvenciás terek legegyszerűbb példáját az

$$f_{2s}(Z^\alpha) = \frac{1}{(A_\alpha Z^\alpha)^{1+r} (B_\beta Z^\beta)^{1-r+2s}} \quad (8.24)$$

analitikus függvénnyel állíthatjuk elő. A_α és B_β twistorok olyan egyenesen vannak, amely teljes egészében C^+ -ban fekszik (17. ábra).

A (8.24) alakú állapotfüggvénnyel reprezentált állapotokat *elemi állapotoknak* nevezzük.

Később, amikor a twistorelmélet eredményeit szeretnénk majd összehasonlítani a „hagyományos” kvantumtérelméletből kapott eredményekkel, célszerű lesz majd impulzus- és helicitásajátállapotokat képviselő f függvényekkel dolgozni. Legyenek

$$A_x = (\kappa_A, 0), \quad B_x = (\tau_A, 0) \quad (\kappa_A \tau_A = 1) \quad (8.25)$$

a „végtelenbeli fénykúp” két tetszőleges alkotóját ábrázoló twistorok és legyen $K_x (K_x = (0, \bar{\kappa}_A))$ az A alkotóval illeszkedő fényszerű egyenes. Az impulzusajátállapotot

$$f_n(Z^x) = \frac{\exp \left(\frac{K \cdot Z}{B \cdot Z} \right)}{(A \cdot Z)(B \cdot Z)^{n+1}} \quad (8.26)$$

függvényből kapjuk. Tekintsük például az állapotfüggvény Φ_0 komponensét, amelyből egyébként lezármasztatható [13] a többi komponens is:

$$\Phi_0(X, Z) = \frac{1}{2\pi i} \oint f_n(\lambda Z + Y) d\lambda = \frac{(A \cdot Z)^n}{(A_\alpha B_\beta P^{\alpha\beta})^{n+1}} \exp \left(\frac{A_\alpha K_\beta P^{\alpha\beta}}{A_\alpha B_\beta P^{\alpha\beta}} \right). \quad (8.27)$$

Itt $P^{\alpha\beta}$ (vagyis $x^{AA'}$) Y és Z metszéspontja. A teljes állapotfüggvény:

$$\Phi^{A' B' \dots L'} = \kappa^{A'} \dots \kappa^{L'} \exp(-ik_q x^q), \quad (8.28)$$

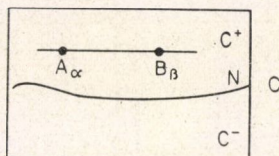
ahol $k_q = \bar{\kappa}_Q \kappa_{Q'}$.

A fentiekből kitűnik, hogy a twistorelméletben meglepően egyszerű alakúak a zérus tömegű részecsketerekre vonatkozó alapvető összefüggések. Nem foglalkoztunk eddig nyugalmi tömeggel rendelkező részecsketerekkel. *R. Penrose* véleménye szerint azonban a zérus tömegű részecskéknak van elsődleges szerepe a természetben. Például, ha a Dirac-egyenletet felírjuk kétkomponensű spinorokkal [25],

$$\nabla^{B'A} \Phi_A = \mu \psi^{B'}, \quad \nabla_{B'A} \psi^{B'} = -\mu \Phi_A \quad (8.29)$$

(itt $m = \sqrt{2} \hbar \mu$ a részecske nyugalmi tömege), akkor szembeűnő, hogy μ konstans Φ_A és $\psi^{B'}$ spinorterek csatolási állandójának szerepét tölti be. $\mu = 0$ -ra Φ_A és $\psi^{B'}$ szabad, kétkomponensű neutrínókat írunk le, és ekkor a téregyenletek konform-invariánsak.

A nyugalmi tömeg tehát felfogható a szabad terek konform invarianciáját megsértő kölcsönhatás csatolási állandójaként. Másik lehetséges felfogás, hogy μ valójában új térmennyiség, amely valamilyen okból földi körülmények között jó közelítéssel konstansnak tekinthető. Ha tehát (8.29)-et közelítő egyenletnek tekintjük, akkor



17. ábra

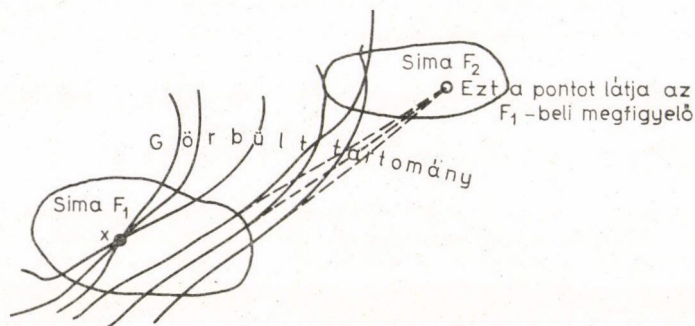
az egzakt téregyenletek ismét konform-invariáns elmélethez vezetnek, amelyben három tér írja le a részecskét. Lehetséges végül, hogy a helyzet sokkal bonyolultabb, és a Dirac-egyenlet „kölsönhatási tagjai” csak durva közelítést adják egy más alapkonceptiókat felhasználó egzakt leírásmódnak. Úgy tűnik, hogy az általános relativitáselméletnek igen fontos szerep jut a nyugalmi tömeg tárgyalásában, mert ez az egyetlen olyan elmélet, ahol meg kell választanunk az energiaskála zéruspontját (amely éppen a teret görbítő tömeg zérushelye).

9. Twistorok görbült térben

A Minkowski-geometria a valóságos téridő-szerkezet idealizálása; közelebb jutunk a valósághoz, ha feltesszük, hogy a négy dimenziós világ görbült (Riemann-féle szerkezetű). Három különböző módszer kínálkozik a twistorok értelmezésére általánosabb (görbült) tereken.

A globális twistorokhoz úgy jutunk el, hogy a Minkowski-tér fényszerű egyenesét a görbült tér fényszerű geodetikus vonalaival pótoljuk. Ezek ábrázolják a Riemann-térben a null twistorokat. A nem-null twistoroknak azonban így nem tudunk közvetlen geometriai jelentést tulajdonítani. Ennek oka az, hogy a geodetikus nyalábok nyírása görbült térben helyről-helyre változhatik; ha valamely pontban zérus, akkor ebből nem következik, hogy a nyaláb *mindenütt* nyírásmentes. Nem tudjuk tehát átvenni az általános twistorok nyírásmentes Robinson-nyalábokkal történő ábrázolását a görbült térre. Ennek ellenére *posztulálnunk kell* a nem-null twistorok létezését, hiszen az előzőekben láttuk, hogy ezekre szükségünk van a részecsketerek tárgyalásában (pl. a pozitív frekvenciás terek definíciójához (8.13) összefüggést nem-null twistorra is értelmeznünk kell).

A geodetikus nyalábok nyírása nem konformisan invariáns mennyiség, és így gravitációs térben, a görbületi tenzor részét képező konform tenzor megjelenésével helytől függővé válik a nyalábok nyírás szerkezete. Másrészt, a Kerr-tétel értelmében (8. pont) a nyírás szerkezetet a twistortér analitikus struktúrája determinálja. Ezért a nem-analitikus twistortranszformációk végső soron a térszerkezet megváltozását eredményezik. Ez megfelel annak a várákozásnak, hogy a twistorformalizmus alkalmas a kvantumjelenségek és a téridő görbületisége közti kapcsolat matematikai leírására. Világos, hogy a görbületiségnek ez a felfogása túlmegegy a Riemann-geometria kerekein. Tekintsük ugyanis az alábbi helyzetet:



18. ábra

F_1 és F_2 tartományokban legyen a téridő sima, a közöttük elhelyezkedő részek pedig görbültek. Az egy pontban találkozó fényszerű geodetikusok sima térben nyírásmentesek (a fordított állítás általában nem igaz). Az F_1 -ben tartózkodó megfigyelő például úgy találja, hogy a felrajzolt, F_2 -be áthaladó nyaláb egyetlen pontot jelöl ki. Valójában a nyaláb a görbült térségben nyírásra tesz szert, és az ábrán látható, hogy közös metszéspont nem létezik; az F_2 -ben tartózkodó megfigyelő számára a nyaláb forrása diffúz.

Ez a példa rávilágít arra, hogy miért nem lehet fenntartani a szokásos analízisre épülő térelméleti leírásmódot a kvantumgeometria számára. Itt az analízis alapeleme, a matematikai pontfogalom bonyolultabb struktúrával helyettesítendő. A példa egyúttal rámutat a lokális twistorok bevezetésének lehetőségére is. A téridő szerkezete elég kicsiny tartományra szorítkozva ugyanis Minkowski-geometriával közelíthető; tetszőleges x ponthoz találhatunk olyan F_1 tartományt, amely adott közelítésben Minkowski-térnek tekinthető. Helyről-helyre bevezetjük a valóságos tér görbületlen „tangens terét”, ahol valamennyi, a null és nem-null twistorokra elmondott összefüggés érvényes. A lokális twistor tér szerkezete persze helyről-helyre változik. És mivel itt már a kiinduláskor felhasználtuk a téridőpontok fogalmát, ez a formalizmus nem alkalmas a pontfogalom megkonstruálására az 1. pontban mutatott gondolatmenettel. A lokális twistorok mégsem haszontalanok, mert segítségükkel bevezethetők az *aszimptotikus twistorok* olyan téridőben, amelynek görbülete eltűnik a végtelenben — tehát *aszimptotikusan sima téridőben*.

Az aszimptotikusan sima terek felhasználhatók a szórási folyamatok S -mátrixelméletének kidolgozására, és ezért igen fontosak a twistorelméletben. Az aszimptotikus twistorok tere komplex analitikus szerkezettel rendelkezik. Újabban *E. T. Newman* és munkatársai jelentős előrehaladást értek el az aszimptotikus twistorelmélettel kapcsolatos problémák vizsgálatában [36]. E szerzők a végtelenbeli fénykúp kanonikus metszésével kapott komplex skalárfüggvénnyel képesek a fényszerű geodetikus vonalaknak olyan nyalábját generálni, amely aszimptotikusan nyírásmentes.

Tekintettel arra, hogy az aszimptotikus twistorelmélet jelenleg még a fejlesztés stádiumában van, itt nem foglalkozhatunk vele részleteiben. A kvantálási szabályok tárgyalásához elegendő olyan gravitációs tereket vizsgálni, amelyek „szendvicsszerkezetűek”, vagyis két sima (Minkowski) tartomány közé zárt görbült térrészből állnak. Nem foglalkozunk majd a görbült közbenső tartomány twistorleírásával, csupán azt vizsgáljuk, hogyan fejezhető ki a C -képben a két sima térrész kapcsolata.

10. Klasszikus szórási folyamatok a twistorképben

Megmutatjuk, hogy a klasszikus gravitációs és elektromágneses tereken történő szórás kezdőállapotából a végállapotba a twistorkoordináták nem-analitikus transzformációja visz át. A Minkowski-tér konform transzformációit a twistortér Z^α pontjainak

$$Z'^\alpha = Z^\beta t_\beta^\alpha \quad (10.1)$$

alakú transzformációi ábrázolják. Itt az új twistorkoordináták analitikus függvényei a régieknek, tehát a konform transzformációkra nézve a twistortér invariáns analitikus szerkezettel rendelkezik. Így például a Kerr-tételben (7. pont) $f(Z^\alpha)$ függvény analicitását megőrzik (10.1) transzformációk. Ezt az invariáns struktúrát rombolják le a köl-

csönhatásokat ábrázoló twistortranszformációk, melyek — rendkívül meglepően — alakilag megegyeznek a klasszikus mechanika Hamilton-féle kanonikus egyenleteivel. Z^a twistorhoz a kanonikusan konjugált változó Z_a^+ adjungált twistor.

A 11. pontban a kanonikusan konjugált twistorváltozókra a jól ismert kvantálási szabályokat alkalmazzuk. Kitűnik majd, hogy a kvantálás eredményeképpen helyreáll a twistortér invariáns analitikus szerkezete. A relativisztikus kvantálás hagyományos módszere, hogy a kanonikusan konjugált változókra kirójuk az egyidejű kommutátorokat. Innen fáradságos út vezet a szabad terek egyenletein keresztül a propagátorokat tartalmazó kovariáns kommutátorokig. Ezzel szemben a twistorelmélet közvetlenül szolgáltatja a kovariáns (és ezen túlmenően, konform-invariáns) kvantálási szabályokat. Úgy tűnik tehát, hogy a twistorelmélettel a speciális relativitáselméletbe szervesen illeszkedő kvantálási módszerhez és szemléletmódhoz jutunk.

Most megvizsgáljuk a gravitációs síkhullámok jelenlétének hatását a twistortér szerkezetére. Az elképzelés az, hogy az általános gravitációs tér ilyen egyszerű esetek nemlineáris szuperpozíciójával épül fel. A gravitációs egyenletek síkhullámmegoldásait még 1923-ban találta meg *Brinkmann* [26]. A helyes fizikai interpretáció azonban egészen 1958-ig váratott magára, amikor *Robinson* újra felfedezte e megoldásokat, majd *Kundt* [27] részletesen leírta viselkedésüket. Az általános síkhullám-megoldás ívelemnégyzete

$$ds^2 = 2(du + R(v, \zeta, \bar{\zeta})dv)dv - 2d\zeta d\bar{\zeta} \quad (10.2)$$

alakú, ahol $R(v, \zeta, \bar{\zeta})$ valós függvényre az üres tér gravitációs egyenletei a

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} = 0 \quad (10.3)$$

differenciálegyenletet írják elő. $R \rightarrow 0$ -ra (10.2) a spinorkoordinátákkal felírt (A.14) Minkowski-ívelembe megy át. Szendvicsszerkezetű térben legyen a $v_1 < v < v_2$ tartományban $R \neq 0$. Határesetben a görbült tartomány infinitezimális $dv = v_2 - v_1$ vastagságú, és ekkor

$$R(v, \zeta, \bar{\zeta}) = \delta(v) r(\zeta, \bar{\zeta}). \quad (10.4)$$

(10.3)-ból $r(\zeta, \bar{\zeta}) = q(\zeta) + \bar{q}(\bar{\zeta})$, ahol q komplex analitikus függvény.

Ezt a világot úgy is megkonstruálhatjuk, hogy a Minkowski-teret a $v=0$ fényszerű hipersík mentén kettévágjuk, és a kapott M^- és M^+ tartományokat ismét „összeragasztjuk”, de most a kapott világ e hipersík mentén „megvetemedett”: a határoló $v=0$ hipersíkoknak más pontpárjait illesztjük össze. Célszerű M^- -ban az u, v, ζ koordinátákat, M^+ -ban pedig az u^*, v^* és ζ^* koordinátákat használni. Akkor

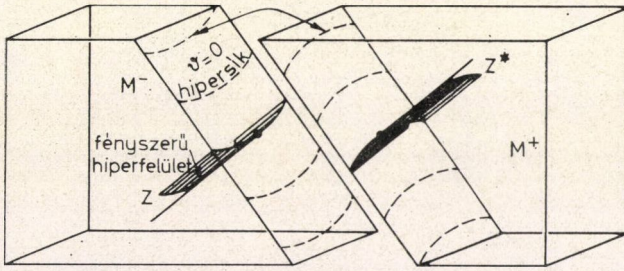
$$M^- \text{-ban} \quad ds^2 = 2(du dv - d\zeta d\bar{\zeta}), \quad v \leq 0, \quad (10.5)$$

$$M^+ \text{-ban} \quad ds^2 = 2(du^* dv^* - d\zeta^* d\bar{\zeta}^*), \quad v^* \geq 0$$

és a „ragasztási felületen”

$$v=0=v^*, \quad \zeta=\zeta^*, \quad u^* = u - r(\zeta, \bar{\zeta}). \quad (10.6)$$

A fényszerű egyenesek általában ($v=0$ hipersíkkal párhuzamos egyeneseket kivéve) átdöfik a hullámsíkot. Itt megtörnek, hiszen a helyzetet felfoghatjuk a folytonos



19. ábra

hullámcsomag határesetenként, ahol a görbült tartományban a fényyszerű geodetikusok irányt változtatnak. M^- egy általános fényyszerű vonalát Z^α twistor reprezentálja (1.3. pontot), melyre (3.21) és (3.23) szerint fennáll

$$Z^0 d\bar{\zeta} = Z^1 du, \quad Z^0 dv = Z^1 d\bar{\zeta} \quad (10.7a)$$

$$Z^2 = i\bar{\zeta} Z^1, \quad Z^3 = i\bar{\zeta} Z^0 - iu Z^1. \quad (10.7b)$$

Itt az egyenes P pontját éppen a $v=0$ döféspontnak választottuk. (10.7) csillagos változata Z^* egyenest ábrázolja. (10.7b) csillagos változatából (10.6) segítségével kiküszöbölhetjük a csillagos koordinátákat:

$$Z^{*2} = i\bar{\zeta} Z^{*1}, \quad Z^{*3} = i\bar{\zeta} Z^{*0} - i(u-r)Z^{*1}. \quad (10.8)$$

A csillagos mennyiségekkel felírt (10.7a) egyenletekben az egyenes irányát ábrázoló koordinátadifferenciálok szerepelnek. Ezeket kifejezhetjük du , dv és $d\bar{\zeta}$ differenciálokkal. Itt felhasználjuk a fényyszerű geodetikus vonalaknak azt a tulajdonságát, hogy ha egy pontban benne fekszenek egy fényyszerű L hiperfelületben, akkor mindenütt e hiperfelületben maradnak. A fényyszerű hiperfelület és a síkhullám metszésvonalának irányát jellemezzék a δu , δv , $\delta\bar{\zeta}$ differenciálok arányai (M^- -ben). A metszésvonal merőleges Z -re, így

$$\delta u dv + 0 \cdot du = \delta\bar{\zeta} d\bar{\zeta} + \delta\bar{\zeta} d\bar{\zeta} \quad (10.9)$$

(10.7a)-val

$$\delta u = \delta\bar{\zeta} \frac{\bar{Z}^0}{\bar{Z}^1} + \delta\bar{\zeta} \frac{Z^0}{Z^1}. \quad (10.10)$$

A mondottak szerint Z^* ugyanerre a metszésvonalra merőleges. (10.10) csillagos változatából

$$\delta u = \frac{\partial r}{\partial \bar{\zeta}} \delta\bar{\zeta} + \frac{\partial r}{\partial \bar{\zeta}} \delta\bar{\zeta} + \delta\bar{\zeta} \frac{\bar{Z}^{*0}}{\bar{Z}^{*1}} + \delta\bar{\zeta} \frac{Z^{*0}}{Z^{*1}}. \quad (10.11)$$

(10.10) és (10.11) ugyanazokat a $\delta u : \delta v : \delta\bar{\zeta}$ arányokat határozzák meg, ezért teljesül:

$$Z^0 : Z^1 = Z^{*0} : Z^{*1} + Z^{*1} \frac{\partial r}{\partial \bar{\zeta}} : Z^{*1}. \quad (10.12)$$

(10.7b), (10.8) és (10.12) összefüggésekből

$$\begin{aligned} Z^{*0} &= Z^0 - Z^1 \frac{\partial r}{\partial \bar{\zeta}}, & Z^{*1} &= Z^1 \\ Z^{*2} &= Z^2, & Z^{*3} &= Z^3 + iZ^1 \left(r - \bar{\zeta} \frac{\partial r}{\partial \bar{\zeta}} \right), \end{aligned} \quad (10.13)$$

ahol ((10.7b) szerint) $\zeta = -i \frac{Z^2}{Z^1}$. (10.13)-at tömören a

$$Z^{*z} = Z^z + i \frac{\partial h}{\partial Z^+_{\alpha}} \quad (10.14)$$

alakban írhatjuk fel, ahol

$$h(Z^z, Z^+_{\alpha}) = |Z^1|^2 r. \quad (10.15)$$

(10.14)-et a $v=0$ helyzetű hullámfrontra vezettük le, de a twistorinvarianciából már következik, hogy tetszőleges helyzetű síkhullámfrontra is igaz.

Az általános gravitációs tereken történő szóródás (10.14) alakú infinitezimális twistortranszformációkból építhető fel. $Z^{*z} - Z^z = \delta Z^z$ infinitezimális megváltozás esetén

$$\delta Z^z = -i \frac{\partial H(Z^z, Z^+_{\alpha})}{\partial Z^+_{\alpha}} \quad H = \bar{H}. \quad (10.16)$$

Általános esetben H (10.15) alakú függvények lineárkombinációja, a twistorkoordináták elsőfokú homogén függvénye. Az adjungált egyenletek:

$$\delta Z^+_{\alpha} = i \frac{\partial H}{\partial Z^z}. \quad (10.17)$$

(10.16) és (10.17) egyenletek szerkezete megegyezik a Hamilton-féle kanonikus egyenletekével. H a Hamilton függvény, Z^z és Z^+_{α} a kanonikusan konjugált változók. E transzformációkkal szemben $Z^z Z^+_{\alpha}$ invariáns:

$$\delta(Z^z Z^+_{\alpha}) = Z^z \delta Z^+_{\alpha} + Z^+_{\alpha} \delta Z^z = 0. \quad (10.18)$$

Itt felhasználtuk a homogén függvényekre vonatkozó Euler-tételt: $Z^z \frac{\partial H}{\partial Z^z} = H$. Definiáljuk a Poisson-zárójeleket Ψ és χ twistorfüggvényekre:

$$[\psi, \chi] \equiv -i \frac{\partial \psi}{\partial Z^z} \frac{\partial \chi}{\partial Z^+_{\alpha}} + i \frac{\partial \psi}{\partial Z^+_{\alpha}} \frac{\partial \chi}{\partial Z^z}. \quad (10.19)$$

Ezzel

$$\delta Z^z = [Z^z, H], \quad \delta Z^+_{\alpha} = [Z^+_{\alpha}, H] \quad (10.20)$$

és tetszőleges ψ függvényre

$$\delta \psi = [\psi, H]. \quad (10.21)$$

Tehát tetszőleges, (10.21)-et kielégítő ψ függvény C tér invariáns szerkezetébe tartozik.

(10.18) szerint például $\psi = Z^\alpha Z_\alpha^+$ ilyen függvény. C tér invariáns szerkezetéhez tartoznak még bizonyos differenciális formák. (A differenciális formákra vonatkozó alapismeretek megtalálhatók B) Függelékben). Így például

$$\begin{aligned} Z^\alpha dZ_\alpha^+, \quad Z_\alpha^+ dZ^\alpha, \\ dZ^\alpha \wedge dZ_\alpha^+, \end{aligned} \quad (10.22)$$

C invariáns szerkezetéhez tartoznak. A $dZ^\alpha \wedge dZ_\alpha^+$ exterior szorzat szimplektikus struktúrát definiál a twistortérben. A twistorok kinematikai értelmezése alapján (6. pont) a twistortér szimplektikus szerkezetét kapcsolatba hozhatjuk a fázistér szimplektikus szerkezetével [28],

$$idZ^\alpha \wedge dZ_\alpha^+ = dP_a \wedge dX^a. \quad (10.23)$$

(10.16), (10.17) egyenletek már kézenfekvővé teszik a twistorkvantálási szabályokat. Mielőtt azonban rátérnénk a kvantálás tárgyalására, foglalkozzunk $H(Z^\alpha, Z_\alpha^+)$ függvény néhány rendkívül figyelemre méltó tulajdonságával. Említettük, hogy H (10.15) alakú függvények lineárkombinációja. Így általában felbontható

$$H = H^+ + H^- \quad (H^- = \overline{H^+}) \quad (10.24)$$

alakban, ahol

$$H^+ = Z_\alpha^+ I^{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial Z^\beta}. \quad (10.25)$$

$g(Z^\beta)$ a twistorkoordináták analitikus és másodfokú homogén függvénye. Speciálisan, a $H = -h$ -val jellemzett síkhullámesetre

$$H^+ = |Z^1|^2 q \left(-i \frac{Z^2}{Z^1} \right) \equiv Z_\alpha^+ I^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial Z^\beta} g \left(-i \frac{Z^2}{Z^1} \right), \quad (10.26)$$

ezért most

$$g(Z^\alpha) = -i(Z^1)^2 \int_{x_0}^{-iZ^2/Z^1} q(x) dx. \quad (10.27)$$

(10.26)-ban megjelenik $I^{\alpha\beta}$ metrikus twistor (lásd 7. pontot). Ez kapcsolatban van azzal, hogy a gravitációs tér nem konform-invariáns. $I^{\alpha\beta}$, amely a „végtelenpontot” képviseli, a konform invarianciát sértő mennyiség.

Gyenge gravitációs teret (amelynek hatására az infinitezimális transzformációk visszavezetők) a linearizált gravitációelmélet tárgyal. A sima Minkowski-világban a gravitációs térmennyiség ψ_{ABCD} Weyl-spinor, mely eleget tesz a gyenge térre vonatkozó

$$\nabla^{A'A} \psi_{ABCD} = 0 \quad (10.28)$$

téregyenleteknek [2]. A Penrose-ábrázolásban (8. pont) $f(Z^\alpha)$ analitikus, -6 homogenitási fokú twistorfüggvény reprezentálja a teret. Magától értetődik, hogy a fenti példában $g(Z^\beta)$ függvényt előállíthatjuk f térmennyiség segítségével. Másrészt, most $q(x)$ függvény jellemzi a gravitációs teret. Így azt várjuk, hogy (10.27) twistorkovariáns változata szolgáltatja g és f keresett összefüggését. Tekintve, hogy f szingularitás-

szervezete a lényeges a térmennyiség jellemzésében, $g(Z^\alpha)$ előállítása várhatóan kontúrintegrál alakjában történik, tehát

$$g(Z^\alpha) = \frac{1}{(2\pi i)^3} \oint p(Z^\alpha, W_\beta) DW \quad (10.29)$$

alakú lesz, ahol $p(Z^\alpha, W_\beta)$ analitikus függvénye Z^α és W_β twistorváltozóknak.

Megköveteljük, hogy a kontúrintegrál értéke ne változzék, ha a kontúrt folytonosan deformáljuk az integrandus regularitási tartományában. Állítás: ezt teljesíti DW differenciális forma (B. Függelék)

$$DW = \frac{1}{6} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} W_\alpha dW_\beta \wedge dW_\gamma \wedge dW_\delta \quad (10.30)$$

alakú választása, feltéve, hogy $p - 4$ fokú homogén függvénye W_β változóknak. B) Függelék szerint a folytonos deformációk nem változtatják meg az integrál értékét, ha

$$d(pDW) = p dDW + \frac{\partial p}{\partial W_\mu} dW_\mu \wedge DW = 0. \quad (10.31)$$

Valóban, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ mennyiség tulajdonságait felhasználva,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial W_\mu} dW_\mu \wedge DW &= \frac{1}{6} \frac{\partial p}{\partial W_\mu} W_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} dW_\mu \wedge dW_\beta \wedge dW_\gamma \wedge dW_\delta = \\ &= \frac{1}{4!6} \frac{\partial p}{\partial W_\mu} W_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\mu\beta\gamma\delta} \varepsilon^{\lambda\varrho\sigma\tau} dW_\lambda \wedge dW_\varrho \wedge dW_\sigma \wedge dW_\tau = \\ &= \frac{1}{4} W_\mu \frac{\partial p}{\partial W_\mu} \frac{1}{6} \varepsilon^{\lambda\varrho\sigma\tau} dW_\lambda \wedge dW_\varrho \wedge dW_\sigma \wedge dW_\tau, \end{aligned} \quad (10.32)$$

és az Euler-tételből kapott

$$\frac{1}{4} W_\mu \frac{\partial p}{\partial W_\mu} = -f \quad (10.33)$$

összefüggést beírva (10.32)-be, majd figyelembe véve, hogy

$$dDW = \frac{1}{6} \varepsilon^{\lambda\varrho\sigma\tau} dW_\lambda \wedge dW_\varrho \wedge dW_\sigma \wedge dW_\tau, \quad (10.34)$$

végül megkapjuk (10.31) feltételt. (10.27) megfelel a $p(Z^\alpha, W_\beta) = f(W_\beta)(W_\alpha Z^\alpha)_{-2}$ választásnak, ahol az

$$(x)_k = (-x)^{-k} \Gamma(k) \quad (10.35)$$

jelölést használtuk. Így p valóban -4 fokú homogén függvénye W_α -nak. $g(Z^\alpha)$ függvényt tehát f térmennyiség a

$$g(Z^\alpha) = \frac{1}{(2\pi i)^3} \oint f(W_\alpha)(W_\beta Z^\beta)_{-2} DW \quad (10.36)$$

alakban állítja elő. (10.36) szinguláris kifejezést tartalmaz a jobboldalon: $\Gamma(k)$ függvénynek pólusa van a $k = -2$ helyen. Másrészt, az általunk vizsgált esetekben az in-

tegrandusban f pólusait $W_\beta Z^\beta$ zérushelye kompenzálja, így a kontúr ponttá zsugorítható a twistortérben, tehát az integrál értéke zérus.

(10.36) kiszámításakor a mondottak értelmében cselhez kell folyamodnunk. (10.35)-ben a $k = -2 + \varepsilon$ helyettesítéssel az integrál reguláris. $g(Z^\alpha)$ függvényt ezután az $\varepsilon \rightarrow 0$ limeszben kapjuk. Azonban még így sem jól definiált általában a kontúrintegrál. Topológiai okokból meg kell követelnünk, hogy $f(W_\alpha)$ függvény szingularitásai a twistortér *három* diszjunkt tartományában legyenek. Ilyen típusú megszorítással már találkoztunk a 8. pontban, ahol a pozitív frekvenciás terekre f függvény C^+ -beli szingularitásainak két diszjunkt tartományban kellett elhelyezkedniük. Az *elemi állapotok* (8.24) függvényében most a $(B_\beta Z^\beta)$ faktorok némelyikét $C_\gamma Z^\gamma$ -val kell helyettesítenünk. Például, az

$$f(W_\alpha) = \frac{1}{(A^\alpha W_\alpha)(B^\beta W_\beta)(C^\gamma W_\gamma)^4} \quad (10.37)$$

elemi állapotból — melynek szinguláris helyei $(A, W)=0$, $(B, W)=0$ és $(C, W)=0$ —

$$g(Z^\alpha) = \frac{(A^\alpha B^\beta K^\gamma Z^\delta \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta})^3}{A^\lambda B^\mu C^\nu Z^\tau \varepsilon_{\lambda\mu\nu\tau}} \quad (10.38)$$

függvényt kapjuk (gravitációs térre $n=4$). Itt C a végtelenbeli fénykúp [14] egy alkotója: $C^\alpha I_{\alpha\beta}=0$ és K^γ tetszőleges twistor. (10.37) síkhullámot ábrázol. Az általános esetet ismét (10.37) típusú állapotok lineárkombinációjával kapjuk.

$f(W_\alpha)$ állapotfüggvény homogenitási foka -6 ; $g(Z^\alpha)$ $+2$ fokú homogén függvény. $g(Z^\alpha)$ a szórás leíró (10.24) Hamilton-függvényben szerepel, ezért *aktív* gravitációs függvénynek nevezzük. Ezzel szemben $f(W_\alpha) - t$ *passzív* függvénynek nevezzük. Utóbbi elnevezés oka a 11. pontban, a terek szórásának tárgyalásakor nyilvánvalóvá válik. (10.36) szerint úgy térünk át a passzív függvényről az aktívra, hogy nyolccal megnöveljük a homogenitási fokot.

Mindeddig a *gravitációs* térnek a twistorokra gyakorolt hatásával foglalkoztunk. Az elmondottak azonban könnyen alkalmazhatók *elektromágneses* térre is. A vele kölcsönható twistorok zérus tömegű, e töltésű részecskéket ábrázolnak. Szigorúan véve, ilyen részecskék nem léteznek, ez tapasztalati tény. Közel fénysebességgel mozgó töltött részecskéket azonban már ábrázolhatunk twistorokkal (ha a részecske lokalizálható, akkor a világvonala jó közelítésben fényszerű). A mozgásegyenlet:

$$P^a \nabla_a P^b = e F^{ab} P_a. \quad (10.39)$$

Itt F^{ab} az elektromágneses tértenzor és P^a a részecske négyes impulzusa. Ismét síkhullámfront esetére szorítkozva, az infinitezimális twistortranszformáció H Hamilton-függvénye ezúttal Z^α és Z_α^+ twistorkoordináták zérus fokú homogén függvénye. Ha F^{ab} kielégíti az üres tér Maxwell-egyenleteit, $H^+ = p(Z^\alpha)$, ahol $p(Z^\alpha)$ a twistorkoordináták zérus homogenitási fokú analitikus függvénye. $p(Z^\alpha)$ a Penrose-ábrázolás $q(W_\alpha)$ állapotfüggvényéből a

$$p(Z^\alpha) = \frac{1}{(2\pi i)^3} \oint q(W_\alpha)(W_\beta Z^\beta)_0 DW \quad (10.40)$$

kontúrintegrállal kapható. Az elektromágneses tér passzív függvényéről az aktív függvényre való áttérésekor tehát négygel megnöveljük a homogenitási fokot.

11. Kvantálás, kölcsönható terek

Zérus tömegű részecsketerek kölcsönhatásával foglalkozunk. Felírjuk a terek állapotfüggvényének skalárszorzatát Penrose-ábrázolásban, majd a kanonikusan konjugált változókra alkalmazzuk az ismert kvantálási szabályokat, és a kölcsönhatás Hamilton-operátora segítségével felírjuk a szórási amplitudókat. Utóbbiakat ismét a twistorváltozókra vonatkozó kontúrintegrálok szolgáltatják. Célszerű az integrandusok szingularitásszerkezetét grafikusán ábrázolni. A szórási folyamatokat ábrázoló twistorgráfok bizonyos fokú rokonságot mutatnak a hagyományos kvantumtérelmélet Feynman-gráfjaival, most azonban nem kell perturbációs számításához folyamodunk a szórási amplitúdók kiszámításához. A twistorgráfok tehát — a Feynman-gráfokkal ellentétben — *egzaktnul* ábrázolják valamennyi „virtuális folyamat” összegét. Bizonyos lépésekben (pl. előjelek megválasztásában) azonban nem tudjuk még *levezetni* a gráfszabályokat valamilyen átfogó elméletből, így a kísérleti tényeket kell segítségül hívni. *Penrose* szavait idézve: „A komplettebb tárgyaláshoz meg kell várunk a komplett elméletet”.

A zérus tömegű részecsketerekre még 1940-ben sikerült *Fierznek* kovariáns skalárszorzatot [30] találnia. *L. Gross* [31] később bebizonyította, hogy a skalárszorzat konform-invariáns is. Felhasználjuk, hogy a zérus tömegű szabad részecsketerek

(8.2) egyenleteiből következik olyan $\Phi_{EF\dots L}^{(k)A'B'\dots D'}$ k darab index potenciálok létezése, melyekre

$$\begin{aligned}\nabla_{AA'}\Phi_{B\dots L}^{(1)A'} &= \Phi_{A\dots L} \\ \nabla_{DD'}\Phi_{E\dots L}^{(k)A'\dots D'} &= \Phi_{D\dots L}^{(k-1)A'\dots C'} \\ \nabla^{EE'}\Phi_{EF\dots L}^{(k)A'B'\dots D'} &= 0.\end{aligned}\quad (11.1)$$

Itt $\Phi_{EF\dots L}^{(k)A'B'\dots D'}$ a k . potenciál. Az n . potenciál kielégíti a

$$\nabla^m \nabla_m \Phi_{A'B'\dots L'}^{(n)A'B'\dots L'} = 0 \quad (11.2)$$

hullámegyenletet. (11.1) rekurziós formulák nem határozzák meg egyértelműen a potenciálokat; $\Phi_{E\dots L}^{A'\dots B'}$ határozatlansága mértékcsoportot definiál. χ és Φ terek skalárszoizata

$$\langle \chi | \Phi \rangle = \oint_S \Phi_L^{A'B'\dots K'} \bar{\chi}_{A'B'\dots L'} dS^{LL'}. \quad (11.3)$$

Itt S tetszőlegesen választott térszerű hiperfelület (a skalárszorzat független a választástól), $dS^{LL'}$ a felületelem normális vektora és k alkalmasan választott numerikus faktor. (11.3) Φ és χ felcserélésével szemben hermitikus szimmetriát mutat, és különböző spinű részecskékre eltűnik.

A következő feladat (11.3) felírása Penrose-ábrázolásban. Legyenek a megfelelő állapotfüggvények, $f(Z^\alpha)$ és $g(Z^\alpha)$, $-2s-2$ fokú homogén függvények (elég azzal az esettel foglalkozni, ha a spinek egyenlők, hiszen ellenkező esetben a terek ortogonálisak). Akkor a skalárszorzat

$$\langle g | f \rangle = ik\Gamma(2-2s) \oint \bar{g}(W_\alpha) f(Z^\alpha) (W_\beta Z^\beta)^{2s-2} D_{WZ}, \quad (11.4)$$

ahol

$$D_{WZ} = DW \wedge DZ. \quad (11.5)$$

A 10. pontban mutatott eljárás általánosításával igazolhatjuk, hogy (11.4) értéke nem változik meg a kontúr folytonos deformációi hatására. $s > \frac{1}{2}$ -re a (11.4) skalár-szorzatot ismét limeszként kell értelmeznünk. Legyen például A_α és B_α két olyan twistor, amelyekre a kontúr kikerüli az $A_\alpha Z^\alpha B^\beta W_\beta = 0$ tartományt (az általunk tekintett esetekben mindig lehet ilyen twistorokat találni). Ekkor az $f \rightarrow f \cdot (A_\gamma Z^\gamma)^\varepsilon$ helyettesítésekkel (11.4) $s > \frac{1}{2}$ -re jól definiálttá válik. Határátmenetben, a l'Hospital szabályt alkalmazva:

$$\begin{aligned} \langle g | f \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ ik \Gamma(2 - 2s + \varepsilon) \oint \bar{g}(W_\alpha) (B^\beta W_\beta)^\varepsilon f(Z^\alpha) (A_\gamma Z^\gamma)^\varepsilon (Z^\mu W_\mu)^{2-2s-\varepsilon} D_{WZ} \} = \\ &= \frac{ik(-1)^{2s-2}}{(2s-2)!} \oint \bar{g}(W_\alpha) f(Z^\alpha) (Z^\mu W_\mu)^{2s-2} \ln \left(\frac{B^\beta W_\beta A_\gamma Z^\gamma}{Z^\varepsilon W_\varepsilon} \right) D_{WZ}, \end{aligned} \quad (11.6)$$

ha $s = 1, 1\frac{1}{2}, 2, \dots$. Az a tény, hogy $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb spinekre (11.4) bonyolultabb szerkezetűvé válik, kapcsolatban áll megmaradási törvények létezésével $s > \frac{1}{2}$ esetén. $s = 1$ -re például megmaradó mennyiség az elektromos töltés, melyet a Penrose-ábrázolás állapotfüggvényéből

$$Q = k_1 \oint f(Z^\alpha) DZ \quad (11.7)$$

kontúrintegrállal állítunk elő. $s = 2$ a linearizált gravitációs teret jellemzi. Megmaradó mennyiség a

$$G^{\alpha\beta} = k_2 \oint Z^\alpha Z^\beta f(Z^\alpha) DZ \quad (11.8)$$

szimmetrikus twistor. $G^{\alpha\beta}$ a tér forrásának energia-, impulzus- és impulzusmomentum-twistora. k_1 és k_2 alkalmas numerikus faktorok.

(11.4) skalár szorzat bevezetésével a Penrose-ábrázolás állapotfüggvényeinek tere Hilbert-tér. Hogyan hat a kölcsönhatások Hamilton-operátora ebben a térben? Más-képpen: a Hamilton-függvényből hogyan alkossunk Hamilton-operátort? A klasszikus fizikáról a kvantumfizikára történő áttérés jól ismert szabályai szerint a fizikai mennyiségekhez rendelt operátorokat úgy kapjuk meg, hogy a megfelelő kifejezésekben a kanonikusan konjugált változókat operátorokkal helyettesítjük, melyekre teljesülnek a szokott alakú felcserélési relációk. (10.16) és (10.17) szerint most Z^α -hoz kanonikusan konjugált változó Z_α^+ . A megfelelő \mathcal{Z}^α és \mathcal{Z}_α^+ operátorok, melyek az $f(Z^\alpha)$ állapotfüggvényekre hatnak, $\hbar = 1$ választással

$$\mathcal{Z}^\alpha = Z^\alpha \quad \mathcal{Z}_\alpha^+ = -\frac{\partial}{\partial Z^\alpha}, \quad (11.9)$$

tehát

$$\mathcal{Z}^\alpha \mathcal{Z}_\beta^+ - \mathcal{Z}_\beta^+ \mathcal{Z}^\alpha = \delta_\beta^\alpha. \quad (11.10)$$

Hasonlóképpen, az operátorok $f(Z_\alpha^+)$ függvények terén is ábrázolhatók:

$$\mathcal{Z}^\alpha = \frac{\partial}{\partial Z_\alpha^+}, \quad \mathcal{Z}_\alpha^+ = Z_\alpha^+. \quad (11.11)$$

A helicitás, $s = -\frac{1}{2} Z^\alpha Z_\alpha^+$ operátorának sajátértékproblémája:

$$\mathcal{H}f(Z_\alpha^+) = -\frac{1}{2}(-2s-2+2)f(Z_\alpha^+) = sf(Z_\alpha^+). \quad (11.12)$$

Itt felhasználtuk a $-2s-2$ fokú $f(Z)$ függvényre az Euler-tételt.

A Hamilton-operátort tehát a

$$H(Z^\alpha, Z_\alpha^+) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Z}^\alpha, \mathcal{Z}_\alpha^+) \quad (11.13)$$

helyettesítéssel kapjuk. Például, a gravitációs térre

$$H^+ \rightarrow I^{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial Z^\beta} \frac{\partial}{\partial Z^\alpha}. \quad (11.14)$$

Problemátikusnak látszik viszont a $H^- \rightarrow Z^\alpha I_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial Z_\beta^+} \right]_{Z_\beta^+ \rightarrow \frac{\partial}{\partial Z^\beta}}$ helyettesítés. Itt az segít, hogy valójában mindig

$$\langle g|H|f \rangle = \langle g|H^-|f \rangle + \langle g|H^+|f \rangle \quad (11.15)$$

alakú átmeneti mátrixelemeket kell kiszámolnunk. Ezért nem kell $H^-|f \rangle$ értelmezésével bajlódunk, hiszen H^- operátorral $\langle g|$ állapotra is lehet hatni, és ekkor

$$H^- \rightarrow \frac{\partial}{\partial Z_\alpha^+} I_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{g}}{\partial Z_\beta^+}. \quad (11.16)$$

A (11.15) alakú mátrixelemek a H operátorral jellemzett kölcsönhatással az $|f \rangle$ in-állapotból a $\langle g|$ out-állapotba történő átmenet valószínűségi amplitúdói. Itt az in- és out-állapotok igen általános alakúak lehetnek; tetszés szerinti hullámcsomagok megengedettek. Mivel a „hagyományos” elméletben impulzussajátállapotokkal lehet jól számolni, a twistorelmélet eredményeit gyakran nehéz összehasonlítani a kvantumtérelmélet ismert eredményeivel. Számolhatunk például (8.26) alakú impulzussajátállapotokkal, és ilyen esetben már könnyű az összehasonlítás.

Az átmeneti mátrixelem legegyszerűbb példája a (11.4) skalárszorzat, melyet a (10.35) jelöléssel célszerű

$$\langle g|f \rangle = k \oint f(Z^\alpha) g(W_\alpha) (W_\beta Z^\beta)_{-n+2} D_{ZW} \quad (n=2s) \quad (11.17)$$

alakban felírni. (11.17) annak az esetnek felel meg, ha nincs kölcsönhatás. $a(W)$ és $b(W)$ terek között a gravitációs kölcsönhatás $\langle a|H^+|b \rangle$ mátrixeleme ((10.36) és (11.14) irandó H^+ operátorba):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi i)^5} \oint a(W) (W_\gamma Z^\gamma)_{2-n} I^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial Z^\alpha} b(Z) \frac{\partial}{\partial Z^\beta} \{ (U_\delta Z^\delta)_{-2} p(U) \} D_{WZU} = \\ & = -\frac{1}{(2\pi i)^5} \oint a(W) b(Z) p(U) (W \cdot Z)_{3-n} (U \cdot Z)_{-1} (I^{\alpha\beta} W_\alpha U_\beta) D_{WZU}. \end{aligned}$$

Hasonlóan, az elektromágneses kölcsönhatás esetében az $\langle a|H^+|b\rangle$ mátrixelem

$$\frac{1}{(2\pi i)^5} \oint a(W)b(Z)q(U)(W \cdot Z)_{2-n}(U \cdot Z)_0 D_{WZU}. \quad (11.19)$$

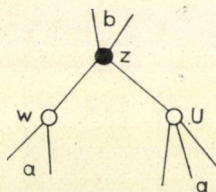
Itt a kontúr 9 dimenziós felület a változók 18 dimenziós terében, amely körülveszi az integrandus szingularitásait. Célszerű az integrandus szingularitásszerkezetét grafikusán ábrázolni. Jelöljük a felső indexes integrációs twistorokat (pl. Z^α) fekete köröcskével, az alsó indexeseket (pl. W_α) pedig karikával. A pettyet a karikával összekötő vonal megfelel a twistorváltozók skalárszorzata zérushelyének ($W_\alpha Z^\alpha = 0$). Tehát a vonalak csak karika és petty között rajzolhatók meg. Az állapotfüggvények szinguláris helyeit a megfelelő köröcskébe futó vonalakkal ábrázoljuk. Tehát a, b stb. *passzív függvények* szingularitásait két vonal ábrázolja általában, mert ezek szinguláris tartománya két részre osztható. Az aktív függvények szingularitásai három vonallal ábrázolhatók.

E jelöléssel (11.17) skalárszorzatnak a



$$(11.20)$$

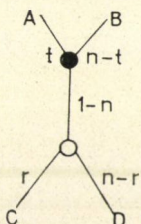
gráfot feleltetjük meg. (11.19) elektromágneses mátrixelem szingularitásszerkezete



$$(11.21)$$

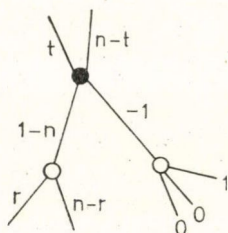
A mátrixelemek kiszámítását célszerű $b(Z) = (A \cdot Z)_{r+1} (B \cdot Z)_{n-r+1}$ alakú elemi állapotokkal végezni. A_α és B_α konstans twistorokat ekkor a befutó vonalak végén hiányzó köröcskék „ábrázolják”. Valamely $(W \cdot Z)_{r+1}$ faktor szingularitásvonalán fel-tüntethetjük r értékét.

$a(W) = (W \cdot C)_{t+1} (W \cdot D)_{n-t+1}$ és $b(Z) = (A \cdot Z)_{r+1} (B \cdot Z)_{n-r+1}$ elemi állapotok skalárszorzatára



$$(11.22)$$

Ugyanezen állapotok között a $q(Z) = (E \cdot Z)_1 (F \cdot Z)_1 (G \cdot Z)_2$ „elemi elektromágneses tér” H^+ operátora a



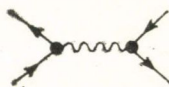
(11.23)

mátrixelemet szolgáltatja. Ez a folyamat körülbelül a



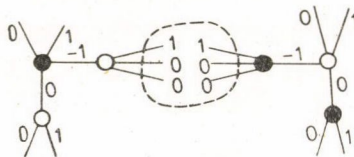
(11.24)

Feynman-gráfnak felel meg, ahol a nyíl a helicitás irányát tünteti fel. Megkísérelhetjük az elektron-elektron szórás,



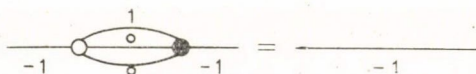
(11.25)

Møller-féle hatás keresztmetszetét [18] reprodukálni arra az esetre, ha az elektronok nyugalmi tömege elhanyagolható (nagy energiájú szórás). Megpróbálkozhatunk a



(11.26)

twistorfolyamattal, ahol a bekarikázással azt jelöltük, hogy a közbenső állapotokra valamiképpen összegezni kell. A részletes számolás szerint (ilyen számolásokat C) Függelékben mutatunk be)



(11.27)

és így a

(11.28)

mátrixelemhez jutunk. Ez H^+ operátor mátrixeleme, melynek a Feynman-elméletben a virtuális foton

(11.29)

helicitássajátállapotának kicserélése felel meg (kettős nyíllal jelöltük, hogy a foton helicitása $2 \cdot \frac{\hbar}{2}$). Hasonlóan, H^- operátorral

(11.30)

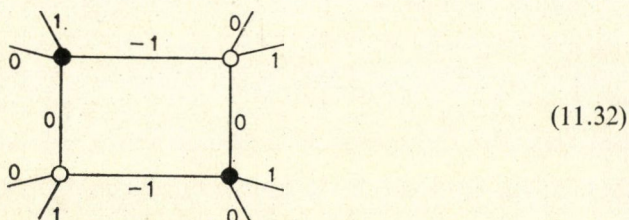
és a megfelelő Feynman-gráf:

(11.31)

Az olvasó most talán úgy gondolja, hogy a Møller-szórás amplitúdója (11.28) és (11.30) tagok összege, vagy a Feynman-jelölésben (11.29) és (11.31) összege. Ez azt jelentené, hogy a virtuális foton két helicitássajátállapot összegeként fogható fel. Ámde a Feynman-elméletben feltesszük, hogy virtuális részecskék a tömeghéjon kívül helyezkednek el. Itt a virtuális foton nem zérus tömegű, és ezért nem beszélhetünk a helicitássajátállapotairól! Várható tehát, hogy a két folyamat összegzése nem vezet helyes eredményre. Erre először *B. S. DeWitt* mutatott rá. Így tükröződik majd a twistor-elméletben (ahol a tömeghéjon kívül elhelyezkedő részecskék fogalma értelmezhetetlen és ezért elvetendő) a Feynman-elméletnek az a kijelentése, hogy a virtuális foton a tömeghéjon kívül helyezkedik el.

Valóban, a mátrixelemek kiszámolásával kapott eredmény megegyezik a -1 vonalak elhagyásával kapott eredménnyel. Ez azt jelenti, hogy a részecskék között nincs

kölcsönhatás. Összegzés helyett ezért megpróbálkozhatunk (11.28) és (11.30) -1 vonalainak egyetlen gráfra rajzolásával:

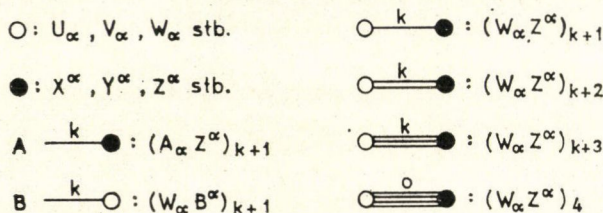


(11.32)

És ez a mátrixelem a helyes hatáskeresztmetszetet szolgáltatja! (11.28) és (11.30) bármilyen más kombinációja arra vezet, hogy nincs kölcsönhatás. Nemcsak az elektromágneses kölcsönhatás esetében, hanem egyéb kölcsönhatásokra is a megfelelő twistorgráfok „egymásmácsolásával” jutunk a helyes hatáskeresztmetszetekhez. Eddig nem sikerült egzakt levezetést adni erre az eljárásra*, de látszik, hogy szükségessége a „virtuális foton” nem-zérus nyugalmi tömegével hozható kapcsolatba.

12. Gráfszabályok

Az előző fejezetben már bevezettünk bizonyos grafikus módszereket az átmeneti mátrixelemek szingularitásszerkezetének ábrázolására. Most továbbfejlesztjük ezt az eljárást — részben a Möller-szóráshoz rendelhető (11.32) gráf tanulmányozásával — a szórási folyamatok egyértelmű ábrázolására. (11.32) mintájára megköveteljük, hogy tetszőleges gráfpontban *négy vonal* találkozzék. Ekkor a skalár szorzat (11.20) ábráján a belső vonalat *kettős* vonalnak kell tekintenünk, mely a $(W_\alpha Z^\alpha)_{r+2}$ faktornak felel meg, végpontjain a W_α és Z^α vertexekkel. E kettős vonalhoz az r egész számot rendeljük. Hasonlóan, a $(W_\alpha Z^\alpha)_{r+3}$ faktort *hármass* vonallal ábrázoljuk. Előfordulhat még a $(W_\alpha Z^\alpha)_{r+4}$ faktornak megfelelő *négyes vonal* is, de tekintettel arra, hogy egy pontban éppen négy vonal fut össze, a négyes vonalak nem kapcsolódhatnak más gráfrészekhez. Ezek tehát „vákuumbuborékoknak” tekintendők. Négyes vonalra $r=0$, mivel a konturintegrál alatt -4 homogenitási fokú függvénynek kell szerepelnie. Ugyanezért *tetszőleges vertexpontra a befutó vonalakhöz rendelt számok összege zérus*. Jelölési szabályainkat a 12.1 ábrán foglaltuk össze.



12.1. ábra. Gráfszabályok

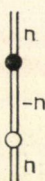
* E sorok megírása óta már rendelkezésre áll az egzakt levezetés. Ezt a twistorelméleti potenciálok bevezetése tette lehetővé [7]. A twistorpotenciálok segítségével tárgyalhatók a nyugalmi tömeggel rendelkező részecsketerek is az elméletben.

Az egyes gráfokhoz rendelt integrálok elé célszerűen $(2\pi i)^{-3v+r}$ faktor írandó. Itt v a vertexpontok száma és r azoknak a vonalaknak a száma, amelyeket letörölve nem maradnának az ábrán többszörös vonalak.

A fenti szabályok szerint a $(W_\alpha A^\alpha)_1 (W_\beta B^\beta)_{n+1}$ és $(C_\alpha Z^\alpha)_1 (D_\beta Z^\beta)_{n+1}$ elemi állapotok skalár szorzatát így ábrázolhatjuk:


(12.1)

Tekintve, hogy elemi állapotokon kívül másféle in- és out-állapotok mátrixelemeivel is foglalkozunk, általában elegendő a külső vonalpárhoz tartozó egészek összegét feltüntetni (ez a spin kétszerese). Így az in- és out-állapotokat is *kettős vonallal* ábrázoljuk. (12.1) skalár szorzat e jelöléssel

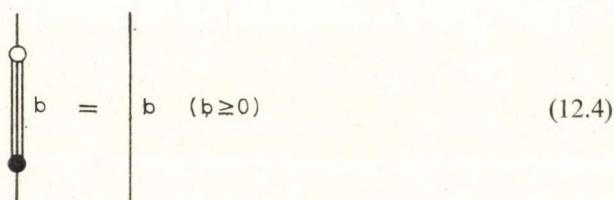

(12.2)

A kettős *külső* vonalak jelentése azonban különbözik a kettős *belső* vonalakétól: utóbbiak a kontúr topológiai szerkezetével kapcsolatosak. Az egyszeres vonallal ábrázolt szingularitást egydimenziós zárt görbével (amely topológiailag ekvivalens a körrel [32]) vesszük körül, a kettős vonalhoz tartozó szingularitást viszont háromdimenziós kontúrral (topológiailag három dimenziós gömb). A hármas belső vonalat ötdimenziós kontúr veszi körül. A mátrixelemekben a kontúr általában ezektől különböző dimenziójú (V darab vertex esetén $3V$ dimenziós), ezért a dimenziószámot körökkel történő kellő számú topológiai szorzás (vagy osztás) útján növelnünk vagy csökkentenünk kell. Például a négyes vonallal ábrázolt „buborékra” a kontúr topológiai szempontból három komplex dimenziós projektív tér (a hét dimenziós valós gömb és a kör hányadostere [32]).

A belső vonalaknak ez az összefüggése a kontúr szerkezetével problematikusá teszi a két vertexpont között két darab, de *egyszeres* vonal jelentését:

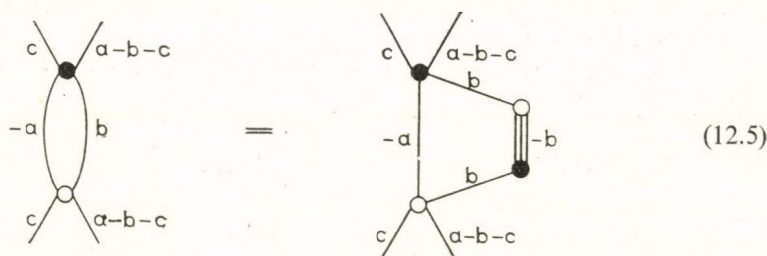

(12.3)

Itt a fenti kontúrszabályok szerint a kontúr külön körülveszi a $(W_\alpha Z^\alpha)_{1-a} (W_\beta Z^\beta)_b$ szorzat $(WZ)_{1-a}$ és $(WZ)_b$ faktorának szingularitását. Ámde most e szingularitások egybeesnek, így értelmeznünk kell erre az esetre azt a tényt, hogy a kontúrok a szingularitások „között” elhaladnak. Ezt a



$$\text{Contour with poles} = \text{Line} \quad (b \geq 0) \quad (12.4)$$

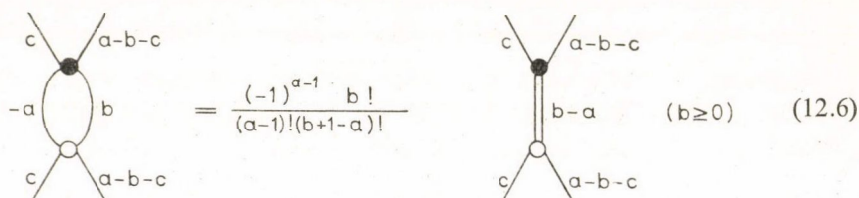
azonosság (C) Függelék) teszi lehetővé, ugyanis ennek segítségével (12.3) így írható:



$$\text{Left configuration} = \text{Right configuration} \quad (12.5)$$

Itt a jobboldali ábra már problémamentesen értelmezhető.

A kettős vonal bizonyos értelemben „összejutt” két darab egyszeres vonalként fogható fel. Fennáll ugyanis



$$\text{Double line} = \frac{(-1)^{a-1} b!}{(a-1)!(b+1-a)!} \text{Single line} \quad (b \geq 0) \quad (12.6)$$

azonosság. Feltűnő az összefüggés kombinatorikus jellege. Ez valószínűleg Penrose-nak azzal az 1. pontban említett sejtésével áll kapcsolatban, hogy az elemi jelenségekre vonatkozó fizikai törvények kombinatorikus jellegűek.

A vonalakhoz írt egész számok a megfelelő helicitások kétszeresei. Az egyes vertexpontokba befutó vonalakhoz rendelt értékek összege zérus. Ez következik abból, hogy a megfelelő integrandus a változók -4 homogenitási fokú függvénye. Az összeg eltűnése a *helicitás megmaradásának törvényét* fejezi ki. A gráfokon a részecskéknak mindig *vonalpár* felel meg. Jelöljük a helicitást $(\hbar/2)$ egységekben) az értékének megfe-

elő számú és irányú nyilakkal. Például a kölcsönhatás nélkül in-állapotból out-állapotba jutó fotonra

$$\begin{array}{c} \text{2} \\ \bullet \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \circ \\ \text{2} \end{array} = \begin{array}{c} \text{2} \\ \bullet \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \circ \\ \text{2} \end{array} = - \begin{array}{c} \text{2} \\ \bullet \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \circ \\ \text{2} \end{array} = -1 \begin{array}{c} \text{2} \\ \bullet \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \circ \\ \text{2} \end{array} \quad (12.7)$$

Itt felhasználtuk (12.6) azonosságot. A jobb oldalon, a közbenső állapotban azonos irányúak a helicitások. Tüntessük most fel a (11.32) Møller-szórásban a helicitásokat:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (12.8)$$

Látjuk, hogy itt a vízszintes vonalpárnak megfelelő kicserélt foton vonalainak helicitása ellentétes. Tehát a virtuális foton egészében nem rendelkezik meghatározott helicitással, ami várható is a 11. pontban mondottak értelmében.

A Møller-szórásban a

$$\begin{array}{c} \text{1} \\ \bullet \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{1} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \sim \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (12.9)$$

megfelelkezés mutatkozik a Feynman-ábca vertexével. A baloldalon a fotonvonalak ellentétes helicitásai arra utalnak, hogy a vertex virtuális folyamatot fejez ki. De akkor hogyan építsünk fel e vertexekből olyan folyamatokat, amelyekben a fotonvonalak befutó (ill. kifutó) részecskét ábrázolnak?

Tekintsük a legegyszerűbb, külső fotonvonalakat tartalmazó folyamatot, a Compton-szórást [18]:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (12.10)$$

A (12.9) vertexek

$$(12.11)$$

mintájú összekapcsolása nem felel meg a Compton-szórás leírására, hiszen $+2$ értékű kettős külső fotonvonalakra van szükségünk. Ezt szabályaink értelmében úgy érhetjük el, ha az egyes vertexekről „összegyűjtjük” az azonos helicitású vonalakat egy-egy újabb twistorváltozó bevezetésével:

$$(12.12)$$

Látjuk, hogy a külső fotonvonalak és a (nagyenergiájú) elektronvonalak úgy kapcsolódnak egymáshoz, hogy a két vertexfolyamat időbeli sorrendjét összekeverik. (12.12) így önmagában a teljes

$$(12.13)$$

folyamatot ábrázolja. Valóban, (12.12) mátrixelemet impulzussajátállapotok között kiértékelve, megkapjuk a Compton-szórás ismert hatáskeresztmetszetét nagyenergiás határesetben*. Ez a figyelemre méltó eredmény megerősíti a (12.12) levezetésében követett gondolatmenet helyességét.

* Megjegyzendő, hogy a „hagyományos” elméletben a perturbációs számítás első közelítéséből kapott Klein—Nishina-féle hatáskeresztmetszet nagy fotonenergiákra is kitűnően egyezik a mérésekkel. A magasabbrendű korrekciók ugyanis minden energiánál kicsik [18].

A) FÜGGELEK

Spinoralgebra

Kétkomponensű spinorokkal foglalkozunk. A négykomponensű (Dirac-) spinorokra vonatkozó összefüggések is felbonthatók kovariáns módon kétkomponensű spinoregyenletekre [25]. ξ^A spinor olyan mennyiség, amely a

$$\hat{\xi}^A = \Lambda_B^A \xi^B \quad (\text{A.1})$$

minta szerint transzformálódik. A, B, \dots spinorindexek a 0 és 1 értékeket vehetik fel. $[\Lambda_B^A]$ unimoduláris 2×2 -es mátrixok az $SL(2, C)$ csoport definiáló ábrázolását alkotják a mátrixszorzásra, mint csoportműveletre nézve.

ξ^A kontravariáns spinor. Kovariáns spinorok Λ mátrix inverzével transzformálандók:

$$\hat{\eta}_A = \eta_B (\Lambda^{-1})_A^B. \quad (\text{A.2})$$

Innen látszik, hogy $\xi^A \eta_A$ invariáns. Kontravariáns spinorokból is alkothatunk invariánst az antiszimmetrikus*

$$[\varepsilon_{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

spinor segítségével: $\xi^A \eta^B \varepsilon_{AB}$. A kétféle úton kapott invariánsokat azonosnak tekintve, a spinorindexek lehúzásának szabályához jutunk:

$$\xi_B = \xi^A \varepsilon_{AB}. \quad (\text{A.4})$$

Hasonlóképpen, az indexek felhúzása ε^{AB} „inverz spinorral” (melyre $\varepsilon^{AB} \varepsilon_{CB} = \delta_C^A$) történik:

$$\xi^A = \varepsilon^{AB} \xi_B. \quad (\text{A.5})$$

(A.1) komplex konjugálásával látjuk, hogy ξ^A spinor komplex konjugáltja $\bar{\Lambda}$ mátrixszal transzformálандó:

$$\bar{\xi}^{A'} = \bar{\Lambda}_{B'}^{A'} \bar{\xi}^{B'}. \quad (A', B', \dots = 0', 1'). \quad (\text{A.6})$$

Itt a spinorindexeket vesszővel láttuk el, hogy megkülönböztessük a Λ -val transzformálандó indexektől. Látszik, hogy vesszős indexek komplex konjugáláskor vesszőtlenné lesznek és megfordítva. Vesszős indexeket az

$$\varepsilon_{A'B'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

fundamentális vesszős spinor (illetőleg inverze, $\varepsilon^{A'B'}$) segítségével húzunk fel (ill., le). Vesszős indexet természetesen nem kontrahálhatunk vesszőtlennel, hiszen ily módon nem jutunk invariáns kifejezéshez.

A fundamentális spinor antiszimmetriája következtében egyindexes spinor „hossza” zérus:

$$\xi_A \xi^A = -\xi^A \xi_A = 0. \quad (\text{A.8})$$

* A mátrixjelölésben az első index a sorindex és a második az oszlopindex, függetlenül attól, hogy felső vagy alsó indexekről van-e szó.

Ha két spinor $\xi^A \eta_A$ skalárszorzata zérus, akkor e spinorok arányosak egymással:

$$\xi^A = s\eta^A. \quad (\text{A.9})$$

Spinorok és tenzorok között a $\sigma_a^{AA'}$ „összekötő mennyiségek” teremtenek kapcsolatot. a index rögzített értékére $[\sigma_a^{AA'}]$ hermitikus mátrix: $\sigma_{aAA'} = \bar{\sigma}_{aA'A}$ és kielégíti a

$$\sigma_{aAR'}\sigma_{bB'}^{R'} + \sigma_{bAR'}\sigma_{aB'}^{R'} = \varepsilon_{AB}g_{ab} \quad (\text{A.10})$$

összefüggést. A Lorentz-csoport és az $SL(2, C)$ -csoport lokális izomorfiája lehetővé teszi, hogy Minkowski-térben $\sigma_a^{AA'}$ mennyiségek a (derékszögű) koordinátarendszer választásától függetlenül a Pauli-mátrixokkal azonosíthatók ($\sigma_0^{AA'}$ az egységmátrix, és itt még egy közös $\frac{1}{\sqrt{2}}$ faktort is bevezetünk). Tetszőleges tenzorhoz az összekötő mennyiségekkel történő kontrakcióval spinort rendelhetünk:

$$X_c^{ab} \leftrightarrow X_{CC'}^{AA'BB'}. \quad (\text{A.11})$$

Itt — az ún. Battelle-konvenciót követve — a tenzorindexnek megfelelő spinorindexpárt ugyanazzal a latin nagybetűvel jelöljük, mint a tenzorindexet jelölő latin kisbetű [14]. Ha az indexek kiírása ellenére a tenzorokat és spinorokat nem *komponenseik* összességének, hanem — a koordinátarendszer választásától függetlenül — magának a geometriai objektumnak tekintjük, akkor egyenlőséget írhatunk a fenti megfeleltetésben. Ekkor természetesen az indexeknek nem tulajdoníthatunk számértékeket, hiszen azok csupán a tenzor *szerkezetéről* nyújtanak információt. E jelölésben a metrikus tenzor [24] $g_{ab} = \varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}$.

A kétkomponensű formalizmusban antiszimmetrikus tenzornak kétindexes spinor felel meg:

$$F_{ab} = F_{AA'BB'} = \frac{1}{2}(\Phi_{AB}\varepsilon_{A'B'} + \bar{\Phi}_{A'B'}\varepsilon_{AB}). \quad (\text{A.12})$$

A szokásos Minkowski-koordináták helyett bevezethetünk „spinorkoordinátákat” az alábbi definíciókkal:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \leftrightarrow [x^{AA'}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x^0 + x^1 & x^2 + ix^3 \\ x^2 - ix^3 & x^0 - x^1 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} u & \zeta \\ \bar{\zeta} & v \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Spinorkoordinátákkal így írhatjuk fel az ívelemet:

$$ds^2 = 2(du dv - d\zeta d\bar{\zeta}). \quad (\text{A.14})$$

Tetszőleges egyindexes spinor valós fényszerű vektort jelöl ki a Minkowski-térben:

$$\xi_A \bar{\xi}_{A'} = \xi_a. \quad (\text{A.15})$$

ξ_a vektor fényszerű, amint ez (A.10) összefüggés alapján igazolható. Az ε_{abcd} teljesen antiszimmetrikus egységtenzor spinormegfelelője [11]:

$$\varepsilon_{abcd} = i\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}\varepsilon_{A'D'}\varepsilon_{B'C'} - i\varepsilon_{AD}\varepsilon_{BC}\varepsilon_{A'C'}\varepsilon_{B'D'}. \quad (\text{A.16})$$

B) FÜGGELÉK

Exterior algebrai alapismeretek

Az exterior algebra (külső algebra v. Graßmann-algebra) többszörös integrálok jele alatt előforduló mennyiségekkel foglalkozik [33, 34]. Például, az

$$\int u_a dx^a \quad (a=1, 2, \dots, n) \quad (\text{B.1})$$

vonalintegrál alatt a változók differenciáljaiban lineáris kifejezés fordul elő:

$$\omega = u_a dx^a. \quad (\text{B.2})$$

ω kifejezést *elsőrendű differenciális formának* nevezzük.

Az

$$\iint A(x, y) dx dy \quad (\text{B.3})$$

kettős integrál $\Phi = A(x, y) dx dy$ *másodrendű differenciális formát* tartalmazza. Vezessük be (B.3)-ban az új u és v integrációs változókat az

$$x = x(u, v) \quad (\text{B.4})$$

$$y = y(u, v)$$

helyettesítéssel:

$$\iint A(x, y) dx dy = \iint A[x(u, v), y(u, v)] J du dv. \quad (\text{B.5})$$

Itt

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (\text{B.6})$$

a transzformáció Jacobi-determinánsa. x és y változókat felcserélhetjük az $u=y$ és $v=x$ helyettesítéssel. Akkor $J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$. (B.5) szerint tehát a differenciálokra a

$$dy dx = -dx dy \quad (\text{B.7})$$

antiszimmetrikus felcserélési tulajdonság áll fenn. Általában n -szeres integrál alatt

$$dx^i dx^j = -dx^j dx^i, \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, n, \\ j=1, 2, \dots, n. \end{matrix} \quad (\text{B.8})$$

Így az n -edrendű α differenciális forma ($n=1, 2, \dots$) általános alakja:

$$\alpha = a_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n} \quad (n=1, 2, \dots, n), \quad (\text{B.9})$$

ahol $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ valamennyi indexében antiszimmetrikus tenzorkifejezés. A skalár függvényeket *nulladrendű differenciális formának* tekintjük. A koordinátarendszer adott választására skalár függvények maguk az x^i koordináták is.

a -ad rendű és b -ed rendű differenciális formák *exterior szorzata* definíció szerint $a+b$ -ed rendű differenciális forma, melynek képzése az alábbiak szerint történik.

Az exterior szorzást a differenciális formák közé írt \wedge szimbólum jelöli. Legyenek α és β rendre a és b rendű differenciális formák. Exterior szorzatuk legyen

$$\psi = \alpha \wedge \beta. \quad (\text{B.10})$$

Ekkor

$$\psi = a_{i_1 i_2 \dots i_a} b_{i_{a+1} i_{a+2} \dots i_{a+b}} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_{a+b}}. \quad (\text{B.11})$$

A fenti definíció értelmében α és β exterior szorzatára

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{ab} \beta \wedge \alpha. \quad (\text{B.12})$$

Az exterior szorzat tehát antikommutál, ha mindkét tényező páratlan rendű, egyébként pedig kommutál. Speciálisan, páratlan rendű θ differenciális formára

$$\theta \wedge \theta = 0. \quad (\text{B.13})$$

Most áttérünk a differenciális formák deriválásának szabályaira. Ezeket is többszörös integrálok tulajdonságaiból vonatkoztatjuk el. Tekintsük például Stokes tételét:

$$2! \int_{V_2} \partial_{[a} u_{b]} dx^a dx^b = \int_{\partial V_2} u_b dx^b. \quad (\text{B.14})$$

Itt V_2 adott korlátos, orientálható tartomány, melynek határoló görbéje ∂V_2 . Defináljuk $\omega = u_b dx^b$ differenciális forma exterior deriváltját:

$$d\omega \stackrel{\text{def}}{=} 2! \partial_{[a} u_{b]} dx^a dx^b. \quad (\text{B.15})$$

Ekkor (B.14) Stokes-tétel így írható fel:

$$\int_{V_2} d\omega = \int_{\partial V_2} \omega. \quad (\text{B.16})$$

Általában, n -edrendű forma exterior deriváltját úgy kapjuk, hogy a megfelelő antiszimmetrikus tenzortér koordináták szerinti deriváltjához $n+1$ rendű differenciális formát rendelünk:

$$d\alpha = (n+1)! \partial_{i_{n+1}} a_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \dots dx^{i_n} dx^{i_{n+1}}. \quad (\text{B.17})$$

Így az n dimenziós V_n tartományra érvényes Gauss-tételt a

$$\int_{V_n} d\alpha = \int_{\partial V_n} \alpha \quad (\text{B.18})$$

alakban írhatjuk fel. Itt ∂V_n a tartomány határa. (B.18) a Gauss—Osztrogradszkij-formula.

Nulla rendű differenciális forma (skalár függvény) exterior deriváltja elsőrendű differenciális forma:

$$df = \partial_a f dx^a. \quad (\text{B.19})$$

Az exterior derivált tehát éppen a függvény differenciálja, amelyet szintén df jelöl. Speciálisan, adott koordinátarendszerben az x^a skalárok $\partial_b x^a = \delta_b^a$ gradiensehez rendelt elsőrendű differenciális forma — tehát x^a skalárok exterior deriváltja —

$$dx^a = \partial_b x^a dx^b = \delta_b^a dx^b = dx^a. \quad (\text{B.20})$$

Vegyük észre, hogy a baloldalon *differenciális formát* írtunk le, a jobboldalon viszont koordinátadifferenciál szerepel. A dx^a szimbólumnak ez a kettős jelentése lehetővé teszi hogy például a $dZ^1 dZ^2 dZ^3$ twistorkoordináták szorzatát a dZ^1 , dZ^2 és dZ^3 elsőrendű differenciális formák exterior szorzataként értelmezzük:

$$dZ^1 dZ^2 dZ^3 = dZ^1 \wedge dZ^2 \wedge dZ^3. \quad (\text{B.21})$$

Ezzel tetszőleges ω differenciális formára adott koordináta-rendszerben

$$\omega = \Omega_{i_1 i_2 \dots i_n} dZ^{i_1} dZ^{i_2} \dots dZ^{i_n} = \Omega_{i_1 i_2 \dots i_n} dZ^{i_1} \wedge dZ^{i_2} \wedge \dots \wedge dZ^{i_n}. \quad (\text{B.22})$$

(B.17) definíció értelmében differenciális formák szorzatának exterior deriváltját a

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^a \alpha \wedge d\beta \quad (\text{B.23})$$

szabállyal képezhetjük (itt $a = \alpha$ rendje). A parciális deriváltak felcserélhetősége következtében a második exterior derivált eltűnik:

$$d^2 \alpha = 0. \quad (\text{B.24})$$

Ezt *Poincaré-lemmának* nevezzük.

A Gauss—Osztrogradszkij-formulából (B.18) levezethetjük, hogy α differenciális formára felírt $\oint \alpha$ kontúrintegrál értéke független C kontúr választásától, ha $d\alpha = 0$. Legyen ugyanis C' az integrandus regularitási tartományában folytonos deformációval elérhető másik kontúr és V e két kontúr által bezárt tartomány, melynek határa tehát $C \cup C'$. (B.18)-ből

$$\int_V d\alpha = \int_{C \cup C'} \alpha = \oint_C \alpha - \oint_{C'} \alpha. \quad (\text{B.25})$$

Itt figyelembe vettük, hogy a CUC' -re történő integrálásban C és C' orientációja ellentétes. (B.25) szerint $\oint_C \alpha = \oint_{C'} \alpha$, ha $d\alpha = 0$.

C) FÜGGELÉK

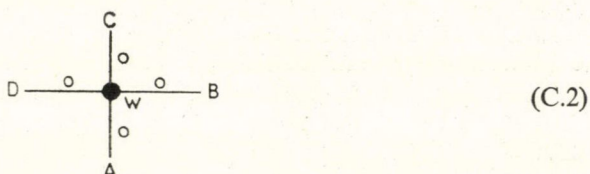
Módszerek és példák a twistorábrák kiértékelésére

Az átmeneti mátrixelemek jellegzetessége, hogy sok antiszimmetrizált twistorkn fejezést tartalmaznak. A szokásos jelölésben az ilyen kifejezések szerkezete nehezei áttekinthető. Célszerű ezért bevezetni az alábbi jelöléseket [15].

A twistorokat indexek helyett „vegyértékvonalakkal” látjuk el. Alsó index vonala lefelé, felső indexé felfelé mutat. Az indexek kontrakcióját így a megfelelő „vegyértékvonalak” összekötésével jelöljük. Az indexek antiszimmetrizálását úgy jelöljük, hogy az antiszimmetrizált „vegyértékeket” vízszintes vonallal áthúzzuk:

$$\begin{array}{l} W_\alpha A^\alpha \rightarrow \begin{array}{c} W \\ | \\ A \end{array}, \quad \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \rightarrow \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \rightarrow \begin{array}{c} \hline \hline \hline \hline \end{array} \\ 2! A_\alpha B_\beta C^{[\alpha} D^{\beta]} \rightarrow \begin{array}{cc} A & B \\ | & | \\ \hline C & D \end{array}, \quad 3! A_\alpha B_\beta C_\gamma D^{[\alpha} E^\beta F^{\gamma]} \rightarrow \begin{array}{ccc} A & B & C \\ | & | & | \\ \hline D & E & F \end{array} \end{array} \quad (\text{C.1})$$

Tekintsük például a következő egyszerű gráfot:



(C.2)

A megfelelő kontúrintegrál

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi i)^3} \oint \frac{\frac{1}{6} \overline{\begin{array}{c} W \\ A \end{array}} \overline{\begin{array}{c} dw \\ B \end{array}} \overline{\begin{array}{c} dw \\ C \end{array}} \overline{\begin{array}{c} dw \\ D \end{array}}}{\begin{array}{c} W \\ A \end{array} \begin{array}{c} W \\ B \end{array} \begin{array}{c} W \\ C \end{array} \begin{array}{c} W \\ D \end{array}}, \quad (C.3)$$

ahol a kontúr körülveszi a nevező zérushelyeit.

Legyen $\frac{A}{W} = \alpha$, $\frac{B}{W} = \beta$, $\frac{C}{W} = \gamma$, $\frac{D}{W} = \delta$. $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ twistor tulajdonságait felhasználva

$$\frac{\overline{\begin{array}{c} A \\ W \end{array}} \overline{\begin{array}{c} B \\ W \end{array}} \overline{\begin{array}{c} C \\ W \end{array}} \overline{\begin{array}{c} D \\ W \end{array}}}{\begin{array}{c} W \\ A \end{array} \begin{array}{c} W \\ B \end{array} \begin{array}{c} W \\ C \end{array} \begin{array}{c} W \\ D \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{array}{c} C \\ D \end{array}} \frac{\overline{\begin{array}{c} A \\ W \end{array}} \overline{\begin{array}{c} B \\ W \end{array}} \overline{\begin{array}{c} C \\ W \end{array}} \overline{\begin{array}{c} D \\ W \end{array}}}{\begin{array}{c} W \\ A \end{array} \begin{array}{c} W \\ B \end{array} \begin{array}{c} W \\ C \end{array} \begin{array}{c} W \\ D \end{array}}. \quad (C.4)$$

$$\text{Itt } \frac{A}{dW} = d\left(\frac{A}{W}\right) = d\alpha, \quad \frac{B}{dW} = d\beta, \quad \frac{C}{dW} = d\gamma \quad \text{és} \quad \frac{D}{dW} = d\delta,$$

mivel A_α , B_β , C_γ és D_δ konstans twistorok. Írhatjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\begin{array}{c} A \\ W \end{array}} \overline{\begin{array}{c} B \\ W \end{array}} \overline{\begin{array}{c} C \\ W \end{array}} \overline{\begin{array}{c} D \\ W \end{array}}}{\begin{array}{c} W \\ A \end{array} \begin{array}{c} W \\ B \end{array} \begin{array}{c} W \\ C \end{array} \begin{array}{c} W \\ D \end{array}} &= 4! A_\alpha B_\beta C_\gamma D_\delta W^{[\alpha} dW^\beta \wedge dW^\gamma \wedge dW^{\delta]} = \\ &= 3! (\alpha d\delta \wedge d\beta \wedge d\gamma + \beta d\alpha \wedge d\delta \wedge d\gamma + \gamma d\alpha \wedge d\beta \wedge d\delta - \delta d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma) = \\ &= -3! \delta^4 \left(\frac{d\alpha}{\delta} \wedge \frac{d\beta}{\delta} \wedge \frac{d\gamma}{\delta} - \alpha \frac{d\delta}{\delta^2} \wedge \frac{d\beta}{\delta} \wedge \frac{d\gamma}{\delta} - \frac{d\alpha}{\delta} \wedge \beta \frac{d\delta}{\delta^2} \wedge \frac{d\gamma}{\delta} - \frac{d\alpha}{\delta} \wedge \frac{d\beta}{\delta} \wedge \gamma \frac{d\delta}{\delta^2} \right) = \\ &= -3! \delta^4 d\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) \wedge d\left(\frac{\beta}{\delta}\right) \wedge d\left(\frac{\gamma}{\delta}\right), \end{aligned} \quad (C.5)$$

$$\text{mivel például } d\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) = \frac{d\alpha}{\delta} - \alpha \frac{d\delta}{\delta^2} \quad \text{és} \quad d\delta \wedge d\delta = 0.$$

Bevezetjük az $\frac{\alpha}{\delta} = u$, $\frac{\beta}{\delta} = v$, $\frac{\gamma}{\delta} = z$ jelöléseket:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{(2\pi i)^3} \oint \frac{1}{6} \frac{-3! \delta^4 d\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) \wedge d\left(\frac{\beta}{\delta}\right) \wedge d\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)}{\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}} = -\frac{1}{(2\pi i)^3} \oint \frac{du \wedge dv \wedge dz}{\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ & & & uvz \end{array}} = \\
 &= -\frac{1}{(2\pi i)^3} \frac{1}{\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ | & | & | & | \end{array}} \left(\oint \frac{du}{u} \right) \left(\oint \frac{dv}{v} \right) \left(\oint \frac{dz}{z} \right) = -\frac{1}{\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ | & | & | & | \end{array}}. \quad (C.6)
 \end{aligned}$$

Hasonlóan,

$$\begin{array}{c} C \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ A \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ B \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ D \end{array} = -\frac{1}{\begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array}} \quad (C.7)$$

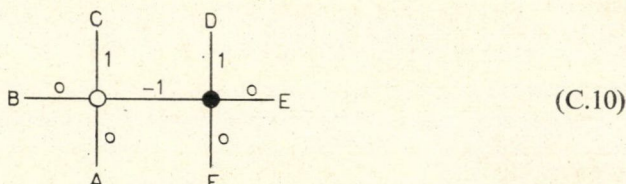
Eredményünk felhasználásával meghatározzuk az alábbi gráf értékét:

$$\begin{array}{c} C \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ A \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ B \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ W \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ D \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ E \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ F \end{array} \quad (C.8)$$

Felírjuk és kiszámoljuk a megfelelő kontúrintegrált:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{(2\pi i)^6} \oint \frac{D_{WZ}}{\begin{array}{cccccc} W & W & W & W & D & E & F \\ | & | & | & | & | & | & | \\ A & B & C & Z & Z & Z & Z \end{array}} = -\frac{1}{(2\pi i)^3} \oint \frac{DZ}{\begin{array}{cccccc} D & Z & & & D & E & F \\ | & | & | & | & | & | & | \\ A & B & C & Z & Z & Z & Z \end{array}} = \\
 &= \frac{-1}{\begin{array}{cccccc} A & B & C & & D & E & F \\ | & | & | & | & | & | & | \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cccccc} D & E & F & & A & B & C \\ | & | & | & | & | & | & | \end{array}}. \quad (C.9)
 \end{aligned}$$

Tekintsük most a következő ábrát:



Itt már zérustól különböző értékű vonalak is szerepelnek. Vegyük észre, hogy (C.10) kontúrintegrálja I_2 -ből kapható a C^α és D_α twistorok szerint vett deriválással*:

$$I_3 = \frac{1}{(2\pi i)^6} \oint \frac{\left(\begin{smallmatrix} W \\ | \\ Z \end{smallmatrix} \right)_0 D_{WZ}}{\begin{smallmatrix} W & W & (W)^2 & (D)^2 & E & F \\ | & | & | & | & | & | \\ A & B & C & Z & Z & Z \end{smallmatrix}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial D_\alpha} \frac{\partial}{\partial C^\alpha} I_2 = - \frac{\begin{smallmatrix} E & F \\ | & | \\ A & B \\ | & | \\ D & E & F \\ | & | & | \\ A & B & C \end{smallmatrix}}{\left(\begin{smallmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ A & B & C \end{smallmatrix} \right)^2}. \quad (C.11)$$

Az I_3 kiszámoláshoz mutatott módszerrel az összes olyan fát kiértékelhetjük, amelyek külső vonalai nem-negatív helicitásúak. A nem-fa gráfok legegyszerűbb példája az elemi állapotok skalárszorzatának alábbi esete:



Az ábrán szaggatott vonallal feltüntettük, hogy az

$$I_4 = \frac{1}{(2\pi i)^5} \oint \frac{D_{WX}}{\begin{smallmatrix} A & B & (X)^2 & X & X \\ | & | & | & | & | \\ W & W & W & C & D \end{smallmatrix}} \quad (C.13)$$

kontúrintegrál kiszámításához bevezetjük a P Q és R S segédtwistorokat, hogy

$$\text{áttérhessünk az } \begin{smallmatrix} A \\ | \\ W \end{smallmatrix} = \alpha, \quad \begin{smallmatrix} B \\ | \\ W \end{smallmatrix} = \beta, \quad \begin{smallmatrix} P \\ | \\ W \end{smallmatrix} = \pi, \quad \begin{smallmatrix} Q \\ | \\ W \end{smallmatrix} = \chi, \quad \begin{smallmatrix} X \\ | \\ C \end{smallmatrix} = \zeta, \quad \begin{smallmatrix} X \\ | \\ D \end{smallmatrix} = \delta, \quad \begin{smallmatrix} X \\ | \\ R \end{smallmatrix} = \varrho,$$

* A formális $\left(\begin{smallmatrix} W \\ | \\ Z \end{smallmatrix} \right)$ kifejezést $\frac{\partial}{\partial Z^\alpha} \left(\begin{smallmatrix} W \\ | \\ Z \end{smallmatrix} \right)_k \equiv W_\alpha \left(\begin{smallmatrix} W \\ | \\ Z \end{smallmatrix} \right)_{k+1}$ definiálja $k=0$ -ra az integrál jele alatt.

$\begin{array}{c} X \\ | \\ S \end{array} = \sigma$ komplex változókra:

$$D_{WX} = \frac{1}{\begin{array}{c} A \quad B \quad P \quad Q \\ | \quad | \quad | \quad | \\ C \quad D \quad R \quad S \end{array}} d\alpha \wedge d\beta \wedge (\pi d\chi - \chi d\pi) \wedge d\xi \wedge d\delta \wedge (Qd\sigma - \sigma dQ) \quad (C.14)$$

és

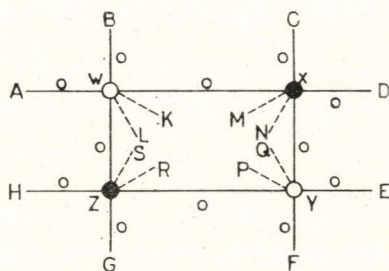
$$I_4 = \frac{36}{(2\pi i)^5} \frac{\begin{array}{c} A \quad B \quad P \quad Q \\ | \quad | \quad | \quad | \\ C \quad D \quad R \quad S \end{array}}{\alpha \beta \xi \delta} \oint \frac{d\alpha \wedge d\beta \wedge (\pi d\chi - \chi d\pi) \wedge d\xi \wedge d\delta \wedge (Qd\sigma - \sigma dQ)}{\left(\begin{array}{c} A \quad B \quad P \quad Q \\ | \quad | \quad | \quad | \\ W \quad X \\ | \quad | \quad | \quad | \\ C \quad D \quad R \quad S \end{array} \right)^2} = \quad (C.15)$$

$$= \frac{\begin{array}{c} A \quad B \quad P \quad Q \\ | \quad | \quad | \quad | \\ C \quad D \quad R \quad S \end{array}}{2\pi i} \oint \frac{(\pi d\chi - \chi d\pi) \wedge (Qd\sigma - \sigma dQ)}{\left(\begin{array}{c} P \quad Q \\ | \quad | \\ W \quad A \quad B \\ | \quad | \quad | \\ X \quad C \quad D \\ | \quad | \\ R \quad S \end{array} \right)^2}.$$

Mint az előző példákban, itt is áttérhetünk a változók hányadosaira, és most négy hányados terén külön-külön topológiailag kör a kontúr, a másik kettőben pedig gömb. Végeredményben [8]

$$I_4 = \frac{1}{\begin{array}{c} A \quad B \\ | \quad | \\ C \quad D \end{array}}. \quad (C.16)$$

A Møller-szóráshoz célszerű először a



(C.17)

gráfot tekinteni. (Berajoltunk a számoláshoz használt segédtwistorokat.) A megfelelő kontúrkifejezés:

$$I_5 = \frac{1}{(2\pi i)^{12}} \oint \frac{D_{WXYZ}}{\begin{array}{cccccccccccc} A & B & X & X & X & X & E & F & Z & Z & Z & Z \\ \hline W & W & W & C & D & Y & Y & Y & Y & G & H & W \end{array}} \quad (C.18)$$

Kiszámolásához bevezetjük az $\alpha = \frac{A_\alpha W^\alpha}{L_\lambda W^\lambda}$, $\beta = \frac{B_\beta W^\beta}{L_\lambda W^\lambda}$, $\varkappa = \frac{K_\varkappa W^\varkappa}{L_\lambda W^\lambda}$, $\xi = \frac{X_\alpha C^\alpha}{X_\nu N^\nu}$,
 $\delta = \frac{X_\alpha D^\alpha}{X_\nu N^\nu}$, $\mu = \frac{X_\alpha M^\alpha}{X_\nu N^\nu}$, $\varepsilon = \frac{E_\alpha Y^\alpha}{Q_\varrho Y^\varrho}$, $\varphi = \frac{F_\alpha Y^\alpha}{Q_\varrho Y^\varrho}$, $\pi = \frac{P_\alpha Y^\alpha}{Q_\varrho Y^\varrho}$, $\gamma = \frac{Z_\alpha G^\alpha}{Z_\varrho S^\varrho}$,
 $\zeta = \frac{Z_\alpha H^\alpha}{Z_\varrho S^\varrho}$, $\varrho = \frac{Z_\alpha R^\alpha}{Z_\varrho S^\varrho}$

változókat:

$$D_{WXYZ} = \frac{d\alpha_\Lambda d\beta_\Lambda d\varkappa_\Lambda d\xi_\Lambda d\delta_\Lambda d\mu_\Lambda d\varepsilon_\Lambda d\varphi_\Lambda d\pi_\Lambda d\gamma_\Lambda d\zeta_\Lambda d\varrho}{\begin{array}{cccc|cccc} A & B & K & L & E & F & P & Q \\ \hline C & D & M & N & G & H & R & S \end{array}}$$

$$I_5 = \frac{\begin{array}{cccc|cccc} ABKL & EFPQ \\ \hline CDMN & GHRS \end{array}}{(2\pi i)^{12}} \oint \frac{d\alpha_\Lambda d\beta_\Lambda d\varkappa_\Lambda d\xi_\Lambda d\mu_\Lambda d\varepsilon_\Lambda d\varphi_\Lambda d\pi_\Lambda d\gamma_\Lambda d\zeta_\Lambda d\varrho}{\begin{array}{cccc|cccc|cccc} A & B & K & L & E & F & P & Q & E & F & P & Q & A & B & K & L \\ \hline W & & & & Y & & & & Y & & & & W & & & \\ X & & & & X & & & & Z & & & & Z & & & \\ \hline C & D & M & N & C & D & M & N & G & H & R & S & G & H & R & C \end{array}}$$

$$I_5 = \frac{\begin{array}{cc} A & B & K & L \\ | & | & | & | \\ C & D & M & N \end{array} \begin{array}{cc} E & F & P & Q \\ | & | & | & | \\ G & H & R & S \end{array}}{(2\pi i)^4} \int \frac{d\kappa_\Lambda d\mu_\Lambda d\pi_\Lambda d\varrho}{\begin{array}{cc} K & L \\ | & | \\ W & A & B \\ | & | & | \\ X & C & D \\ | & | \\ M & N \end{array} \begin{array}{cc} P & Q \\ | & | \\ Y & E & F \\ | & | & | \\ X & C & D \\ | & | \\ M & N \end{array} \begin{array}{cc} P & Q \\ | & | \\ Y & E & F \\ | & | & | \\ Z & G & H \\ | & | \\ R & S \end{array} \begin{array}{cc} K & L \\ | & | \\ W & A & B \\ | & | & | \\ Z & G & H \\ | & | \\ R & S \end{array}}$$

Papírtakarékosság céljából használjuk az alábbi jelöléseket:

$$\begin{array}{c} A & B \\ | & | \\ C & D \end{array} = \bigcirc, \quad \begin{array}{c} A & B \\ | & | \\ G & H \end{array} = \bullet, \quad \begin{array}{c} E & F \\ | & | \\ C & D \end{array} = \square, \quad \begin{array}{c} E & F \\ | & | \\ G & H \end{array} = \blacksquare$$

Felhasználjuk, hogy

$$\begin{array}{c} K & L \\ | & | \\ W & \bigcirc \\ | & | \\ X & \\ | & | \\ M & N \end{array} = K, \quad \begin{array}{c} X & L \\ | & | \\ M & N \end{array} - \begin{array}{c} X & K \\ | & | \\ M & N \end{array} = \begin{array}{c} X & L \\ | & | \\ M & N \end{array} \bigcirc - \begin{array}{c} X & K \\ | & | \\ M & N \end{array} \bigcirc, \quad \begin{array}{c} K & L \\ | & | \\ W & \bullet \\ | & | \\ Z & \\ | & | \\ R & S \end{array} = K, \quad \begin{array}{c} Z & L \\ | & | \\ R & S \end{array} - \begin{array}{c} Z & K \\ | & | \\ R & S \end{array} = \begin{array}{c} Z & L \\ | & | \\ R & S \end{array} \bullet - \begin{array}{c} Z & K \\ | & | \\ R & S \end{array} \bullet$$

$$\begin{array}{c} P & Q \\ | & | \\ Y & \square \\ | & | \\ X & \\ | & | \\ M & N \end{array} = \pi, \quad \begin{array}{c} X & Q \\ | & | \\ M & N \end{array} - \begin{array}{c} X & P \\ | & | \\ M & N \end{array} = \begin{array}{c} X & Q \\ | & | \\ M & N \end{array} \square - \begin{array}{c} X & P \\ | & | \\ M & N \end{array} \square, \quad \begin{array}{c} P & Q \\ | & | \\ Y & \blacksquare \\ | & | \\ Z & \\ | & | \\ R & S \end{array} = \pi, \quad \begin{array}{c} Z & Q \\ | & | \\ R & S \end{array} - \begin{array}{c} Z & P \\ | & | \\ R & S \end{array} = \begin{array}{c} Z & Q \\ | & | \\ R & S \end{array} \blacksquare - \begin{array}{c} Z & P \\ | & | \\ R & S \end{array} \blacksquare$$

Először κ és π szerint integrálunk, azután μ és ϱ szerint:

$$I_5 = - \frac{\begin{array}{cc} A & B & K & L \\ | & | & | & | \\ C & D & M & N \end{array} \begin{array}{cc} E & F & P & Q \\ | & | & | & | \\ G & H & R & S \end{array}}{(2\pi i)^2} \int \frac{d\mu_\Lambda d\varrho}{\begin{array}{cc} X & K & L & Z & X & P & Q & Z \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ \bigcirc & \bullet & & \square & \blacksquare & & & \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ M & N & S & R & M & N & S & R \end{array}}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X & K & L & Z \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline M & N & S & R \\ \hline \end{array} = \mu \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline K & L & Z & \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline N & S & R & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline K & L & Z & \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline M & S & R & \\ \hline \end{array} ; \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X & P & Q & Z \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline M & N & S & R \\ \hline \end{array} = \mu \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline P & Q & Z & \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline N & S & R & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline P & Q & Z & \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline M & S & R & \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

$$I_5 = \frac{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & B & K & L \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline C & D & M & N \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline E & F & P & Q \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline G & H & R & S \\ \hline \end{array}}{(2\pi i)} \oint \frac{d\varphi}{\varphi^2} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline L & K & P & Q \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline S & M & N & R \\ \hline \end{array} - \varphi \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline L & K & P & Q \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline S & M & N & R \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline L & K & P & Q \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline R & M & N & S \\ \hline \end{array} \right) + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline L & K & P & Q \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline R & M & N & R \\ \hline \end{array} \right)$$

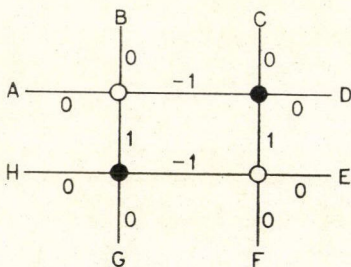
$$I_5 = \frac{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & B & K & L \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline C & D & M & N \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline E & F & P & Q \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline G & H & R & S \\ \hline \end{array}}{\left[\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline L & K & P & Q \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline S & M & N & R \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline L & K & P & Q \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline R & M & N & S \\ \hline \end{array} \right)^2 - 4 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline L & K & P & Q \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline R & M & N & R \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline L & K & P & Q \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline S & M & N & S \\ \hline \end{array} \right]}^{-\frac{1}{2}}$$

Legyen

$$a = \frac{1}{4} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline C & D \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline E & F \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline G & H \\ \hline \end{array} ; \quad b = \frac{1}{4} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline G & H \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline E & F \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline C & D \\ \hline \end{array} ; \quad c = \frac{1}{4} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & B & E & F \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline C & D & G & H \\ \hline \end{array} ;$$

$$I_5 = -(2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2)^{-\frac{1}{2}} = -Q \quad (C.13)$$

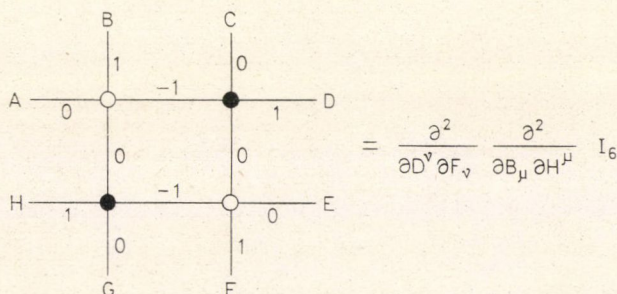
Ezt felhasználva kiszámolhatjuk a skalár részecskék elemi állapotaira vonatkozó



átmeneti mátrixelemet. Ennek értéke

$$I_6 = \left(1 + \frac{a-c}{b} \right) Q. \quad (C.25)$$

Innen a Møller-szórás *elemi állapotokra* vonatkozó mátrixeleme:



Ezt az eredményt közvetlenül még nem tudjuk összehasonlítani a hagyományos elmélet Møller-féle hatáskeresztmetszet-képletével, mivel elemi állapotokra vonatkozik. Összehasonlítás céljából elemi állapotok helyett (8.26) alakú impulzussajátállapotokkal kell dolgoznunk. (Impulzussajátállapotokra vonatkozó mátrixelemek kiszámolására a 7. hivatkozásban található példák.) Figyelembe véve a helicitás és a statisztika között fennálló összefüggést, a tömegközépponti rendszerben a differenciális hatáskeresztmetszetre

$$N \left[\tan^4 \vartheta/2 + \cot^4 \vartheta/2 + \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta/2} \mp \frac{1}{\cos^2 \vartheta/2} \right)^2 \right] \delta(k) \quad (C.27)$$

adódik, ahol ϑ szórási szög és N numerikus állandó. Az előjelbizonytalanság onnan származik, hogy egyelőre a kontúr irányítására nem sikerült módszert találni. Ha (C.27)-ben az alsó előjelet választjuk, akkor a kísérletileg széles energiatartományban igazolt Møller-féle formula [18] nagyenergiájú $\left(\frac{E}{m} \rightarrow \infty \right)$ határesetét kapjuk.

IRODALOM

1. R. Penrose, J. Math. Phys. 8, 345, 1967.
2. R. Penrose, Int. J. Theor. Phys. 1, 61, 1968.
3. R. Penrose, J. Math. Phys. 10, 38, 1969.
4. R. Penrose: Angular Momentum: An Approach to Combinatorial Space-Time, a *Quantum Theory and Beyond* c. kötetben, szerk. Ted Bastin, Cambridge Univ. Press, 1971.
5. R. Penrose: On the Nature of Quantum Geometry. J. A. Wheeler's Festschrift. 1970.
6. R. Penrose, J. Synge Festschrift kötet, szerk. L. O'Raifeartaigh, Oxford Univ. Press, 1972.
7. R. Penrose és M. A. H. MacCallum, Twistor Theory: An Approach to Quantisation of Fields and Space-Time. Physics Reports 6, 241, 1973.
8. Qadir, A.: Ph. D. disszertáció, Birkbeck College, London, 1971.
9. M. Crampin és F. A. E. Pirani: Twistors, Symplectic Structure and Lagrange's Identity. Rosen Festschrift kötet, 1970.
10. R. Penrose: An Analysis of the Structure of Space-Time, Adam's Prize Essay, Princeton University, 1967.
11. R. Penrose: Ann. Phys. 10, 171, 1960.
12. R. Penrose: Proc. Roy. Soc. 284A, 159, 1965.
13. R. Penrose: Null Hypersurface Initial Data, A. R. L. Tech. Report 63—56, szerk. P. G. Bergmann. Office of Aerospace Research, U.S. Air Force 1963.

14. R. Penrose: Structure of Space-Time, a *Battelle Rencontres* c. kötetben, szerk. C. M. DeWitt és J. A. Wheeler, Benjamin, 1968.
15. R. Penrose: Applications of Negative Dimensional Tensors, a *Combinatorial Mathematics* c. kötetben, szerk. D. J. A. Welsh, Academic Press, 1971.
16. A. R. Edmonds: Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton 1957.
17. A. P. Yutsits, I. B. Levinson and V. V. Vanagas: Mathematical Apparatus of the theory of Angular Momentum, Monson 1962.
18. W. Heitler: A sugárzás kvantumelmélete. Akadémiai Kiadó, 1959.
19. A. Robinson: Proc. Nederl. Akad. Wetensch. 64, 1961.
20. C. Schmieden és D. Langwitz, Math. Zeitschr. 69, 1, 1958.
21. D. Langwitz: Sitz. Bayer. Akad. Wiss. 4, 41, 1959.
22. T. Fulton, F. Rohrlich és L. Witten: Rev. Mod. Phys. 34, 442, 1962.
23. I. M. Gelfand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin: *Generalized Functions V. Integral Geometry and Representation Theory*. Academic Press. New York, 1966.
24. Perjés Z., kandidátusi értekezés, KFKI, Budapest, 1971.
25. E. M. Corson: *Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations*. Blackie and son ltd., London, 1954.
26. H. W. Brinkmann, Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.) 9, 1, 1923.
27. W. Kundt, disszertáció, Hamburg, 1958.
28. G. W. Mackey: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1963.
29. F. A. E. Pirani: Introduction to Gravitational Radiation Theory, a *Lectures on General Relativity* c. kötetben, szerk. S. Deser és K. W. Ford, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
30. M. Fierz: Helv. Phys. Acta 13, 45, 1940.
31. L. Gross: J. Math. Phys. 5, 687, 1963.
32. A. H. Wallace: *Algebraic Topology*. New York, 1963.
33. H. Flanders: *Differential Forms, with Applications to the Physical Sciences*. Academic Press, New York és London, 1963.
34. W. V. D. Hodge: *Theory and Applications of Harmonic Integrals*, Cambridge Univ. Press, 1952.
35. E. Schrödinger: *Science and Humanism*. Cambridge Univ. Press, 1956.
36. B. Aronson, R. Lind, J. Messmer és E. Newman, J. Math. Phys. 12, 2462, 1971.

A GAMOW-ÁLLAPOTOKRÓL*

GYARMATI BORBÁLA

MTA Atommag Kutató Intézet, Debrecen

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés	465
2. Előzmények	466
Az S-mátrix definíciója	466
Az S-mátrix analitikus tulajdonságai. A Gamow-függvény definíciója	469
A Gamow-függvények tulajdonságai	470
Ortogonalitás, normálhatóság	471
Teljességi összefüggés	471
Átlagértékképzés Gamow-állapotban	474
Összefoglalás, problémák	474
3. Saját vizsgálatok	476
A Gamow-függvény normálásáról	476
A norma létezése	476
A Gamow-függvény normája neutronra	478
A Gamow-függvény normájának numerikus közelítésre alkalmas általános formája	479
Az átlagértékről	481
Bevezetés	481
Az r^2 operátor mátrixeleme	482
Numerikus eredmények	483
Következtetések	486
A Gamow-függvények alkalmazása izobár analóg rezonanciák leírásában	486
A módszer	486
Numerikus példák	489
A leggyakrabban használt rezonanciállapot hullámfüggvények összehasonlítása egy négy- szög-modellben	492
4. Összefoglalás	494
Köszönetnyilvánítás	495
1. Függelék	495
2. Függelék	496
3. Függelék	497
Irodalomjegyzék	499

1. Bevezetés

Egy kvantummechanikai rendszer energiaspektruma két, tulajdonságaiban el-
különült részre oszlik: a diszkrét és folytonos nívók csoportjára. Van azonban egy
olyan közbenső lehetőség, amely mintegy egyesíti mindkettő tulajdonságait: ez a
bomló állapot. Ennél a spektrum szigorúan véve folytonos, mégis bizonyos ideig egy

* Kandidátusi értekezés.
Érkezett 1972. okt. 6.

diszkrét sajátállapothoz nagyon hasonlóan viselkedik. Természetes ezért az a törekvés, hogy a bomló állapotok leírását kontinuumállapotok gondosan elkészített szuperpozíciója helyett a kötött állapotok valamilyen alkalmas általánosításával kíséreljük meg.

A kötött állapotok a Schrödinger-egyenletnek tisztán kifutó aszimptotikájú negatív energiához (képzetes hullámszámhoz) tartozó megoldásai. A tisztán kifutó aszimptotikájú nem-negatív energiájú megoldások komplex energiához (komplex hullámszámhoz) tartoznak. Ezeket azonosíthatjuk a bomló állapotokkal: az energia valós része az állapotnak az energiaskálán elfoglalt helyét, képzetes részének reciproka az állapot közepes életidejét határozza meg. Az állapotfüggvény időben exponenciálisan csökkenő, térben a kezdőponttól távol exponenciálisan növekvő amplitúdójú hullámot ír le. Az állapot időbeli viselkedéséről tehát annyi információt tartalmaz, hogy annak valószínűsége, hogy a rendszer a t időpillanatban a $t=0$ -beli állapotában található, exponenciálisan csökken. Térbeli viselkedése, bár szemléletesen összhangban van az állapot bomlékonyságával, kizárja a kvantummechanikában megengedett függvények családjából, mivel ortodox értelemben vele belső szorzat nem mindig képezhető. Emiatt ezeknek a függvényeknek az alkalmazási köre igen korlátozott volt. Körülbelül egy időben az α -bomlás leírására vezette be őket *F. Gamow* és *Kudár János*. Az irodalomban a „Gamow-függvények” elnevezés terjedt el.

Újabban sikerült normát rendelni a Gamow-függvényekhez, előírást adni a fizikai mennyiségek Gamow-állapotbeli átlagértékének számítására, kimutatni, hogy kötött állapotokból, Gamow-állapotokból és megfelelően választott kontinuumállapotokból egy teljes rendszer építhető fel. Így megnyílt a lehetőség arra, hogy a Gamow-állapotokat a kötött állapotokkal azonos módon használjuk a többtestprobléma leírásánál.

A kulcskérdés a teljes rendszer elemeit tartalmazó belső szorzat általánosítása. Ez két előírást tartalmaz: 1. Ha két helyzetben a teljes rendszer valamelyik eleme áll, bra helyzetbe időtükrözöttje írandó. 2. Az integranduszba egy $\exp[-\varepsilon r^2]$ konvergenciafaktor vezetendő be és az integrál $\varepsilon \rightarrow 0$ határértéke tekintendő az általánosított belső szorzat értékének.

Ez a dolgot a következő kérdések vizsgálatát tűzte ki céljaul: Milyen mértékben függ az általánosított belső szorzat értéke a konvergenciafaktor alakjától? Az általánosított átlagérték az életidő növelésével átmegy-e simán a megfelelő kötött állapot értékbe, az életidő csökkentésével mikor válik fizikailag értelmetlenné az átlagérték számítására adott előírás? Jár-e valamilyen fogalmi vagy technikai előnnyel a Gamow-függvények használata a magreakciókban fellépő rezonanciajelenségek leírásában? Végül: várható-e, hogy fizikai jelenségek kitüntetik a Gamow-függvényeket a bomló állapotok leírásában használatos más függvényekkel szemben?

2. Előzmények

Az S-mátrix definíciója

Egy magreakció, amely nukleonok összetett rendszerét érintő folyamatként fogható fel, leírható mint ezen rendszernek az átalakulása egy kezdeti állapotból vagy „belépő csatornából” egy végállapotba vagy „kilépő csatornába”.

Belépő csatorna az a konfiguráció, amelyben a rendszer két elkülönült részből —

céltárgyból és bombázó részből áll, amelyek meghatározott relatív mozgásban vannak egymás felé. A kilépő csatorna ismét két vagy több elkülönült részt tartalmaz, amelyek távolodnak egymástól.

A belépő és kilépő csatornák rendszerei között lineáris összefüggés áll fenn, amelyet egy operátor, az S -mátrix fejez ki. Ez az operátor úgy tekinthető, mint annak az operátornak a $t - t_0 \rightarrow \infty$ re vett határértéke, amely a t_0 -beli kezdeti állapotot bármely későbbi t időpontbeli megváltozott állapothoz rendeli. Így az S -mátrix a folyamat teljes dinamikáját tartalmazza és a Hamilton-operátorból elvben levezethető. A Hamilton-operátor időmegfordítással szembeni invarianciája miatt a belépő és kilépő csatornák szerepe felcserélhető.

Adott energián az összetett rendszer bármely stacionárius állapota megadható olyan állapotok szuperpozíciójaként, amelyeket meghatározott csatornáknak megfelelő aszimptotikus konfiguráció jellemez, és az adott energiához tartoznak.

Valamely (pozitív) energián lehetséges aszimptotikus konfigurációkat nyitott csatornáknak, a többiekét zárt csatornáknak nevezzük. Stacionárius leírásban az S -mátrix a nyitott csatornákat összekötő lineáris operátor. Sorra véve a rendszernek azon állapotait, amelyben csak egy csatornában van befutó hullám, az S -mátrix elemeit, amelyek ezt a csatornát kötik össze a többivel, megadhatjuk (normálástól eltekintve) mint az egyes csatornáknak kifutó hullámok amplitúdójának és a befutó hullám amplitúdójának a viszonyszámait.

Az összetett rendszer E energiához tartozó állapotát előállító, a (nem degenerált) nyitott csatorna konfigurációkkal megadott sajátfüggvény-bázis Ψ_c elemeinek aszimptotikus alakja két tényező szorzataként felírható

$$\Psi_c \sim \varphi_c \frac{u_c(r_c)}{r_c}. \quad (2.1)$$

Az $u_c(r_c)$ csak egy radiális koordinátától függ, amely két részre bomló összetett rendszer esetén (továbbiakban ilyenekre korlátozódik a tárgyalás) a két elkülönült rész tömegközéppontjai közötti távolság, φ_c minden más koordinátától függ. A radiális tényező egy $I_c(r_c)/r_c$ befutó és egy $O_c(r_c)/r_c$ kifutó hullámot tartalmaz

$$u_c(r_c) = x_c O_c(r_c) + y_c I_c(r_c). \quad (2.2)$$

Ez a parciális komponens a csatorna I_c pályaimpulzusmomentumára vonatkozik és függ a csatorna k_c hullámszámától, amely az energiával a

$$\frac{\hbar^2}{2M_c} k_c^2 + E_c = E \quad (2.3)$$

összefüggésben van. M_c a redukált tömeg, E_c a részek belső energiája, amely alkalmas skálán mérve ($E_c = 0$ a legnagyobb kinetikus energiájú csatornánál) éppen a csatorna kinyílásának küszöbenergiája.

Ha a csatornában lévő két részecske egyike neutron, O_c kifutó, I_c befutó gömbi Hankel-függvények, ha mindkét részecske töltött,

$$\exp \left[\pm i \left(k_c r_c - \eta_c \ln(2k_c r_c) - \frac{1}{2} \pi I_c \right) \right]$$

aszimptotikájú Whittaker-függvények.

$$\eta_c \equiv Z_1 Z_2 e^2 M_c / \hbar^2 k_c, \quad Z_1 e \text{ és } Z_2 e$$

a két részecske töltése.

A két töltött részecskének a köztük lévő Coulomb-kölcsönhatás létrehozta relatív mozgását az

$$F = (2i)^{-1}(e^{i\sigma_c} O_c - e^{-i\sigma_c} I_c) \quad (2.4)$$

függvény írja le, σ_c az

$$e^{2i\sigma_c} = \frac{\Gamma(l_c + 1 + i\eta_c)}{\Gamma(l_c + 1 - i\eta_c)} \quad (2.5)$$

összefüggéssel meghatározott Coulomb-fázis. (2.4) segítségével a radiális függvény az

$$u_c = (x_c + y_c e^{2i\sigma_c}) O_c - 2i e^{i\sigma_c} y_c F_c$$

alakba is átírható.

Az x_c és y_c amplitúdókat a folyamat dinamikája határozza meg, amely az összes csatornát összezsacatosolhatja, így azok általában függenek minden csatorna hullámszámától. A (2.3) egyenlet segítségével azonban minden csatorna hullámszáma kifejezhető az E energiával.

Ha csak a c csatornában van befutó hullám (erre a megállapodásra egy felső c indexszel hivatkozunk), vagyis

$$y_{c'}^c = 0 \quad \text{ha} \quad c' \neq c, \quad (2.6)$$

az \tilde{S} -mátrix $\tilde{S}_{c'c}$ elemét kifejezhetjük a c' csatornabeli kifutó fluxus amplitúdójának (vagy a szórt fluxusénak, ha $c' = c$) és a c csatornabeli befutó fluxus amplitúdójának viszonyaként

$$\tilde{S}_{c'c} = - \left(\frac{v_{c'}}{v_c} \right)^{1/2} \frac{x_{c'}^c + y_{c'}^c e^{2i\sigma_{c'}}}{y_c^c}, \quad (2.7)$$

itt $v_c = \hbar k_c / M_c$ a fluxus sebessége.

$$\text{Az} \quad S_{c'c} = - \left(\frac{v_{c'}}{v_c} \right)^{1/2} \frac{x_{c'}^c}{y_c^c} \quad (2.8)$$

összefüggéssel definiált ütközési mátrix segítségével

$$\tilde{S}_{c'c} = S_{c'c} - e^{2i\sigma_{c'}} \delta_{c'c}. \quad (2.9)$$

Az időmegfordítással szembeni invariancia és a fluxusmegmaradás követelménye az S -mátrix szimmetriáját és unitaritását biztosítja

$$S_{c'c} = S_{cc'} \quad (2.10)$$

$$SS^+ = 1. \quad (2.11)$$

Az S -mátrix analitikus tulajdonságai. A Gamow-függvény definíciója

Tekintsük az S -mátrixot az E komplex változó függvényének. Néhány szingularitástípus azonnal szembeötlik.

Mivel az x_c^e és y_c^e amplitúdók az energiától a k_c hullámszámon keresztül függenek, a (2.3) összefüggés miatt minden E_c küszöbenergia négyzetes elágazási pont. (A töltött részecskék küszöbenergiája lényeges szingularitás a Whittaker-függvények $k_c=0$ helyen fellépő lényeges szingularitása miatt. A következőkben ilyen nem fordul elő, ezért ennek részletes taglalását mellőzzük.)

Másik osztálya a szingularitásoknak az $y_c^e(E)$ függvény azon (komplex) 0-helyeinek megfelelő pólusok, amelyek nem 0-helyei egyúttal az $x_c^e(E)$ függvénynek is. Ezek a pólusok, amelyek minden $S_{c,c}$ mátrixelemnek közös pólusai az

$$y_c(E)=0 \text{ minden } c \text{ csatornára} \quad (2.12)$$

egyenletrendszer

$$\mathcal{E}_n = E_n - \frac{1}{2} i \Gamma_n$$

gyökei. Ezekhez, mint komplex energia-sajátértékekhez a

$$H\Psi_n = \mathcal{E}_n \Psi_n \quad (2.13)$$

Schrödinger-egyenletnek a (2.12) határfeltételekkel megadott, tehát minden csatornában aszimptotikusan tisztán kifutó hullámként — $O_c(k_{cn}r_c)$ típusú függvényként — viselkedő megoldása tartozik. A $k_{cn} = \kappa_{cn} - i\gamma_{cn}$ komplex hullámszám (2.3) szerint

$$E_n - E_c = \frac{\hbar^2}{2M_c} (\kappa_{cn}^2 - \gamma_{cn}^2), \quad \Gamma_n = \frac{\hbar^2}{2M_c} 4\kappa_{cn}\gamma_{cn} \quad (2.14)$$

összefüggésben van az $E = \mathcal{E}_n$ energiával. Aszimptotikusan Ψ_n a c csatornában egy a részecskék távolságával és az idővel exponenciálisan változó amplitúdójú gömbhullám formáját ölti fel

$$\Psi_n \sim \exp[i\kappa_{cn}r_c - i(E_n - E_c)t/\hbar] \exp[\gamma_{cn}r_c - \Gamma_n t/2\hbar]. \quad (2.15)$$

Részben közvetlenül látható (2.14) és (2.15) segítségével, részben kimutatható, hogy

a rendszer stacionárius állapotai ($\Gamma_n=0$) csak tisztán imaginárius hullámszámnál, azaz negatív energiánál valósulhatnak meg.

(A $\gamma_{cn} < 0$ minden csatornában

feltétel exponenciálisan csökkenő $\Psi_n - t$, vagyis kötött állapotot eredményez. Ha legalább egy $\gamma_{cn} > 0$, vagyis legalább egy csatornában exponenciálisan növekszik az amplitúdó, „antikötött” állapotról beszélünk.)

a kötött állapotokon kívül nincsenek olyan pólusok, amelyeknél minden $\gamma_{nc} < 0$, vagyis $\Gamma_n < 0$ -t adó pólusok nem lépnak fel.

a $\Gamma_n > 0$ -t szolgáltató pólusok $E_n > 0$ mellett, ha $\kappa_{cn} > \gamma_{cn} > 0$, valódi bomló állapotokat, ha $\gamma_{cn} < \kappa_{cn} < 0$, virtuális bomló állapotokat, $E_n < 0$ mellett virtuális állapotokat adnak. A valódi bomló állapotokat nevezzük a továbbiakban Gamow-állapotoknak.

Az eddigiekben a kölcsönhatás jellegéről csak annyit tettünk fel burkoltan, hogy a csatornaképet megengedi, vagyis az elkülönült részek között — a Coulomb-kölcsönhatáson kívül — aszimptotikusan nincs kölcsönhatás. Ennyi feltevés mellett részletesebb képet az S -mátrix analitikus viselkedéséről adni nem lehet. Nem állítható pl. általánosságban, hogy csak a fenti szingularitások léphetnek fel. Mindenesetre két, teljes részletességgel analizált speciális esetben: a véges hatótávú gömbszimmetrikus potenciálon történő rugalmas részecskeszórásnál és ugyanilyen potenciálon több csatornába történő rugalmatlan részecskeszórásnál más típusú szingularitások nem találhatók.

A Gamow-függvények tulajdonságai

Szorítkozzunk most egyetlen, az impulzusmomentum l értékével jellemzett csatornára. (A csatornaindexet elhagyjuk.) A valódi bomló állapotot leíró $u(r)/r$ radiális függvény kielégíti az

$$u''(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} u(r) - v(r)u(r) = -k^2 u(r) \quad (2.16)$$

egyenletet és az

$$u(0) = 0 \quad (2.17)$$

$$u(a)O'_l(ka) - u'(a)O_l(ka) = 0 \quad (2.18)$$

határfeltételeket

$$k_n = \kappa_n - i\gamma_n \quad \kappa_n > \gamma_n > 0 \quad (2.19)$$

sajátértékek mellett. Itt a a véges hatótávú $V(r) \equiv \hbar^2 v(r)/2M$ valós potenciál hatósugaránál nagyobb véges szám. (2.15) mutatja, hogy a fenti állapot amplitúdója időben exponenciálisan csökken, a távolság függvényében exponenciálisan növekszik. Így a Gamow-függvényeket tartalmazó integrálok közönséges értelemben csak véges intervallumon konvergálnak.

Két módszert említünk, amellyel divergens integrálokhoz ésszerű módon egyértelmű számot rendelhetünk. Az egyik: kiszámítani az integrált a komplex sík egy olyan pontjában, ahol az konvergens — esetünkben pl. $k = \kappa + i\gamma$ -nál — és az eredményt analitikusan folytatni a kívánt pontig. A másik, sokkal általánosabb eljárás: bevezetni az integranduszbá egy konvergenciafaktort, amely függ egy ε paramétertől és olyan, hogy $\varepsilon > 0$ -ra konvergenssé teszi az integrált. Ha az integrál határértéke létezik $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén, ez a határérték rendelhető a divergens integrálhoz. Ha a konvergenciafaktor eleget tesz az 1. Függelékben felsorolt követelményeknek, teljesül, hogy közönséges értelemben is létező integrálok a fenti eljárással is megadhatók, és megegyeznek a közönséges integrállal. Így ez az eljárás egy általánosított integrálfogalmat definiál.

Ki lehet mutatni pl., hogy minden olyan komplex z esetén, amelyre $|\operatorname{Re} z| < < |\operatorname{Im} z|$, $\exp[-\varepsilon r^2]$ alakú konvergenciafaktort az $\exp[ze^{i\theta}]$ és $r \exp[ze^{i\theta}]$ függvények 0-tól ∞ -ig vett integrálja létezik:

$$J_0 \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{zr} e^{-\varepsilon r^2} dr = -\frac{1}{z}, \quad (2.20)$$

$$J_1 \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty r e^{zr} e^{-\varepsilon r^2} dr = \frac{1}{z^2}. \quad (2.21)$$

Ortogonalitás, normálhatóság

Könnyű belátni, hogy egy k_1 sajátértékhez tartozó $u_1(r)$ sajátfüggvénynek a $\tilde{k}_2 = -k_2^*$ sajátértékhez tartozó $\tilde{u}_2(r) = u_2(r)^*$ időtükrözött sajátfüggvénnyel képzett általánosított belső szorzata eltűnik.

Ha az $u_1(r)$ -re felírt (2.16) egyenletet $u_2(r)$ -rel szorozzuk és kivonjuk belőle az $\tilde{u}_2(r)^* = u_2(r)$ -re felírt és $u_1(r)$ -rel megszorozott (2.16) egyenletet, végül $\exp[-\varepsilon r_2]$ konvergenciafaktorral szorozva 0 és ∞ között integráljuk, az

$$\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r^2} \frac{d}{dr} [u_2(r)u_1'(r) - u_2'(r)u_1(r)] dr = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r^2} \tilde{u}_2(r)^* u_1(r) dr$$

összefüggésre jutunk. A bal oldal parciális integrálással és (2.17) figyelembevételével a

$$2\varepsilon \int_0^{\infty} r e^{-\varepsilon r^2} [u_2(r)u_1'(r) - u_2'(r)u_1(r)] dr$$

kifejezésbe megy át. Aszimptotikusan az integrandusz $r \exp[-\varepsilon r^2] \exp[i(k_1 + k_2)r]$ alakú, így (2.21) miatt az integrál $\varepsilon \rightarrow 0$ határértéke véges, tehát

$$(k_1^2 - k_2^2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r^2} \tilde{u}_2(r)^* u_1(r) dr = 0. \quad (2.22)$$

Ha a belső szorzatot az

$$\langle \tilde{u}_2 | u_1 \rangle \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r^2} \tilde{u}_2(r)^* u_1(r) dr \quad (2.23)$$

előírással definiáljuk, (2.22) $k_1 \neq k_2$ esetére az ortogonalitást mondja ki. Kimutatható, hogy $0 < \langle \tilde{u}_i | u_i \rangle < \infty$, tehát $u_i(r)$ l-re normálható. Vagyis

$$\langle \tilde{u}_i | u_k \rangle = \delta_{ik}. \quad (2.24)$$

Mivel a kötött állapotok önmaguk időtükrözöttjei is, (2.23) a kvantummechanikai belsőszorzat általánosítása bomló állapotokra.

Teljességi összefüggés

Levezethető egy teljességi összefüggés, amelyben a Gamow-állapotok a kötött állapotokkal teljesen egyenrangú szerepet játszanak.

Minden olyan $h(r)$ függvény, amely aszimptotikusan csak $\exp[ikr]$ alakú függvényeket tartalmaz a 2.1 ábra C kontúrján belüli k értékekkel (vagy minden exponenciálisnál gyorsabban tart nullához $r \rightarrow \infty$ esetén), előállítható a következő formában

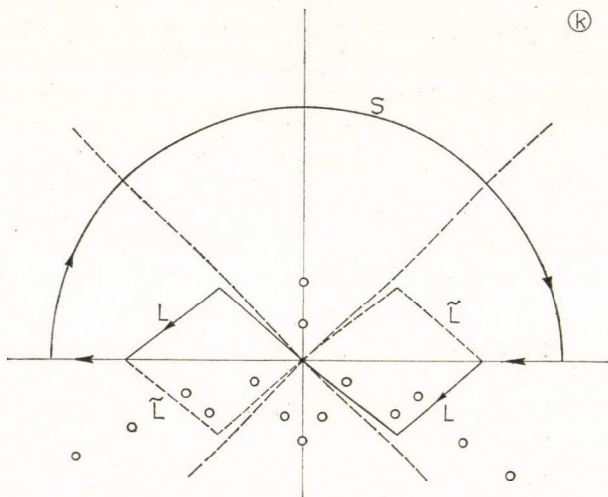
$$h(r) = \int_0^{\infty} dr' h(r') \left\{ \sum_n u_{l,n}(r) \tilde{u}_{l,n}(r')^* + \int_{L^-} u_l(k, r) \tilde{u}_l(k, r')^* dk \right\}.$$

Itt $u_{l,n}(r)$ (2.24) szerint normált, a C kontúron belüli Gamow- vagy kötött állapot, $u_l(k, r)$ az L útnak L^- szakaszáról ($-\infty < k < 0$) vett szórási függvény, amely elegendő tesz az

$$\int \tilde{u}_l(k, r)^* u_l(k', r) dr = \delta(k - k') \quad (2.25)$$

ortonormáltsági feltételnek és ortogonális minden C -n belüli kifutó rezonanciára.

Itt $u_l(k, r)$ a „normált” kontinuum-hullámfüggvény, $\tilde{u}_l(kr)$ az időtükrözöttje



2.1. ábra

Az S mátrix pólusai a komplex k -síkban. A $C = S + L$ kontúr L útjának hajlásszöge mindig kisebb, mint 45° . A C kontúr kifutó rezonanciákat, a $\bar{C} = S + \bar{L}$ kontúr befutó rezonanciákat tartalmaz

$$u_l(k, r) \equiv \frac{\sqrt{2} k^{l+1}}{\sqrt{\pi} f_l(-k)} \Phi_l(k, r),$$

$$\tilde{u}_l(k, r) \equiv$$

$$\equiv \frac{\sqrt{2} (k^*)^{l+1}}{\sqrt{\pi} f_l(-k^*)} \Phi_l(k^*, r) =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2} k^{l+1}}{\sqrt{\pi} f_l(k)} \Phi_l(k, r) \right]^*,$$

($\Phi_l(k, r)$ a (2.16) egyenlet reguláris megoldása, $f_l(k)$ a Jost-függvény).

Minden r szerinti integrálás a vázolt általánosított értelemben végezendő.

A

$$\sum_n u_{l,n}(r) \tilde{u}_{l,n}(r')^* + \int_{L^-} u_l(k, r) u_l(k, r') dk = \delta(r - r') \quad (2.26)$$

teljességi összefüggés feljogosít arra, hogy a Gamow-állapotokat a kötött állapotokkal egyenrangú polgárokként tartsuk számon azon $|\Phi\rangle$ állapotok terében, amelyek radiális komponense elegendő tesz a $h(r)$ függvényre kirótt feltételeknek.

Megjegyzendő, hogy a (2.26) teljes rendszer használata a négyzetesen integrálható függvények Hilbert-terének nem egyszerű kiterjesztése. Az L út megválasztása meghatározza a teljes rendszer szerint kifejezhető $h(r)$ függvények körét. Ezért szükséges minden L úttal meghatározott teljes rendszerhez egy másik teljes rendszert hozzárendelni, amelyet a 2.1. ábra \bar{L} útja határoz meg.

Fel kell figyelniünk a (2.26) teljes rendszer, illetve a belőle következő

$$\sum_{l,m,n} \langle \mathbf{r} | \psi_{lmn} \rangle \langle \tilde{\psi}_{lmn} | \mathbf{r}' \rangle + \int_{L^-} \langle \mathbf{r} | \psi_k \rangle \langle \tilde{\psi}_k | \mathbf{r}' \rangle d^3k = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.27)$$

teljes rendszer egy szokatlan tulajdonságára. (Itt a rezonancia- és kontinuum-állapot-vektorokat az

$$\langle \mathbf{r} | \psi_{lmn} \rangle = \frac{1}{r} u_{ln}(r) Y_{lm}(\hat{r}),$$

$$\langle \mathbf{r} | \tilde{\psi}_{lmn} \rangle = \frac{1}{r} \tilde{u}_{ln}(r) Y_{lm}(\hat{r}),$$

$$\langle \mathbf{r} | \psi_{\underline{k}} \rangle = \frac{1}{kr} \sum_{lm} i^l u_l(k, r) Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{k}),$$

$$\langle \mathbf{r} | \tilde{\psi}_{\underline{k}} \rangle = \frac{1}{k^* r} \sum_{lm} i^l \tilde{u}_l(k, r) Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{k})$$

összefüggésekkel vezetjük be.)

Legyen $|\Phi\rangle$ a megfigyelés alatt álló rendszer valamely meghatározott módon előállított normált állapota. Fejtsük sorba a $\langle \Phi | \Phi \rangle = 1$ belső szorzatot (2.27) szerint

$$1 = \langle \Phi | \Phi \rangle = \sum_{lmn} \langle \Phi | \psi_{lmn} \rangle \langle \tilde{\psi}_{lmn} | \Phi \rangle + \int_{L^-} \langle \Phi | \psi_{\underline{k}} \rangle d^3 k \langle \tilde{\psi}_{\underline{k}} | \Phi \rangle.$$

Az összeg minden olyan tagja, amely kötött állapotokat tartalmaz valós (mivel a kötött állapot önmaga időtükrözöttje) és úgy interpretálható, mint annak a valószínűsége, hogy a rendszer a Hamilton-operátor megfelelő kötött sajátállapotában található. A rezonanciaállapotokat tartalmazó tagok komplexek és nem értelmezhetők valószínűségként. Ugyanez érvényes a kontinuumjáruléokra is. Történt próbálkozás arra, hogy a kifejtési együttható olyan értelmezést nyerjen, amely a közönséges kötött állapotra visszaadja a szokásos és Gamow-állapotokra is valós mennyiségeket szolgáltat, amelyek értelmezhetők valószínűségként és összhangban állnak az állapot bomló jellegéből következő megfigyelési helyzettel. Az a tény, hogy míg a kötött állapot azonosítása pontos energiaméréssel egyértelműen elvégezhető, addig a rezonanciaállapot azonosítása többé-kevésbé bizonytalan egyrészt a véges életidő miatt, másrészt mivel mindig kontinuumállapotokra szuperponálva jelenik meg, sugallja azt a gondolatot, hogy az energiamérés eredményét adott $|\psi_n\rangle$ rezonanciaállapotra vonatkozóan három kategóriába soroljuk:

1. biztosan $|\psi_n\rangle$ -hez tartozik
2. biztosan nem $|\psi_n\rangle$ -hez tartozik
3. bizonytalan, hogy $|\psi_n\rangle$ -hez tartozik vagy nem.

Megállapodva némileg sematikusán a kategóriák határában, a szokásos módon rendelkezünk a_n , b_n , c_n valószínűséget az energiamérés 1), 2), 3) eredményéhez. Nyilvánvalóan

$$a_n + b_n + c_n = 1.$$

Azt várjuk, hogy a c_n valószínűség, amely nulla kötött állapot esetén, a rezonanciaállapot növekvő szélességével növekszik.

A $p_n = \langle \Phi | \psi_n \rangle \langle \tilde{\psi}_n | \Phi \rangle = r_n + i q_n$ komplex kifejtési együtthatóhoz úgy rendeljük hozzá az a_n , b_n , c_n valószínűséget, hogy $c_n = 0$ esetén a p_n eredeti értelmezése adódjon.

A javaslat:

$$\begin{aligned}a_n + c_n &= |p_n| \\ b_n + c_n &= |1 - p_n|.\end{aligned}$$

Így $|p_n|$ annak a valószínűsége, hogy az állapot azonosítható mint $|\psi_n\rangle$, $|1 - p_n|$ annak a valószínűsége, hogy az állapot azonosítható mint nem $|\psi_n\rangle$. (Ha a c_n nem nulla, ezek nem egymást kölcsönösen kizáró esetek.)

Átlagértékképzés Gamow-állapotban

Ésszerűnek látszik valamely A operátorral leírt fizikai mennyiség átlagértékét a (2.23) általánosított belső szorzat segítségével a

$$\langle \tilde{\psi}_{lmn} | A | \psi_{lmn} \rangle \quad (2.28)$$

kifejezéssel kapcsolatba hozni.

Ez a kifejezés komplex. Valós részét tekinthetjük magának az átlagértéknek, képzetes részét pedig úgy értelmezhetjük, mint azt a bizonytalanságot, ami amiatt lép fel, hogy az állapot az átlagérték mérése során elbomolhat.

Legyen tehát

$$\langle A \rangle \equiv \text{Re} \langle \tilde{\psi}_{lmn} | A | \psi_{lmn} \rangle. \quad (2.29)$$

Ha ezt a definíciót az energiaoperátorra alkalmazzuk

$$\langle H \rangle = E_{ln}$$

adódik, míg a szórásnégyzet szokásos definíciójának (2.29) szerinti általánosítása,

$$(\Delta A)^2 \equiv \langle A^2 - \langle A \rangle^2 \rangle,$$

az energiára alkalmazva

$$(\Delta H)^2 = -\frac{1}{4} \Gamma^2$$

eredményt ad. Ez az általánosított átlagértékfogalom tehát energia-sajátállapotban az energia-sajátérték valós részét szolgáltatja, az átlagérték körüli szórásnégyzet pedig az energiabizonytalansággal függ össze. Ez a várakozásunknak megfelelő eredményt feljogosít arra a feltételezésre, hogy a (2.29) definíció az átlagértékfogalom konzisztens általánosítása.

Átmeneti erősségek, hatáskeresztmetszetek számításánál is a (2.29) előírás alkalmazható: ha Gamow-állapotot használunk ket helyzetben, bra helyzetbe az időtükrözöttje írandó, és az így nyert, gyakran komplex mátrixelem valós része ruházandó fel fizikai jelentéssel.

Összefoglalás, problémák

A nem-relativisztikus kvantummechanika olyan általánosítása, amely lehetővé teszi, hogy az S -mátrix „fizikai” pólusait: a Gamow-állapotokat, időtükrözöttjüket (befogást leíró befutó rezonanciák) és a kötött állapotokat azonos módon kezeljük, mindenképpen kívánatos. Úgy tűnik a fent vázolt eljárás lényegileg megoldja ezt a kérdést. Két sarok pontja: a regularizálási előírás, amely a fellépő Riemann-értelemben divergens integrálokhoz meghatározott értéket rendel, és a mátrixelem szer-

kezete: ha ket helyzetben Gamow-állapot (kifutó állapot) van, bra helyzetbe időtükrözöttje, vagyis befutó állapot (befogási-állapot) írandó. Mivel a Riemann-értelem-ben integrálható függvények a regularizálási eljárással is integrálhatók és eredményül a Riemann-integrált adják, és mivel a kötött állapotok önmaguk időtükrözöttjei, kötött állapotokra automatikusan visszakapjuk a kvantummechanika standard formuláit.

A regularizálási eljárást egy $\exp[-\varepsilon r^2]$ alakú konvergenciafaktor bevezetése, és egy $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenet képezte. Mivel más függvények is eleget tesznek a konvergenciafaktorra előírt követelményeknek, sőt a divergens integrálhoz analitikus folytatással is rendelkezhető meghatározott érték, felmerül a kérdés, vajon a fent ismertetett eredmények szempontjából mennyire lényeges a választott regularizálási eljárás.

A Gamow- és befogási állapotokat tartalmazó mátrixelemek szerkezetére adott előírás miatt ezen mátrixelemek rendszerint komplexek. Ésszerű feltételezés, hogy ezek valós része a fizikai jelentéssel rendelkező mennyiség és imaginárius részük az állapot bomlása miatt fellépő mérési bizonytalanságot méri, ennek a konzisztenciáját azonban részletesen meg kellene vizsgálni. Pl. igaz-e, hogy a képzetes részek az energia képzetes részével egy irányban változnak, igaz-e, hogy kötött állapotból rezonanciaállapotba átmenve a mátrixelem valós része a kötött állapoti értékekből józanul extrapolálható?

Ezek a kérdések annál inkább megvizsgálandók, mivel az általánosítás teljesen a stacionárius nézőpontra nyugszik, márpedig bomló állapotok stacionárius leírásának minden bizonnyal határai vannak, és várható hogy ezek kiütkeznek abban is, hogy az általánosításnál tett ésszerű feltevések nem érvényesek korlátlanul.

Egy becslés a stacionárius tárgyalás korlátaira könnyen adható a stacionárius tárgyalásból következő bomlási törvény és egy egyszerű időfüggő tárgyalásból adódó bomlási törvény összehasonlításából. Az $L(t)$ bomlási törvény azt mutatja meg, hogy valamely t időpontban milyen valószínűséggel található a rendszer a $t=0$ -beli kezdeti állapotában. Nyilvánvalóan

$$L(t) \equiv |p(t)|^2 = |\langle \psi(\mathbf{r}, 0) | \psi(\mathbf{r}, t) \rangle|^2.$$

A (15) hullámfüggvény az

$$L(t) = e^{-\frac{\Gamma_n}{\hbar} t}$$

tisztán exponenciális bomlástörvényt szolgáltatja.

Állítsunk elő most $\psi(\mathbf{r}, t)$ -t a rendszer energiaoperátorának valós energiákhoz tartozó sajátfüggvényeivel:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \int e^{-\frac{iEt}{\hbar}} c(E) \psi_E(\mathbf{r}) dE, \\ \psi(\mathbf{r}, 0) &= \int c(E) \psi_E(\mathbf{r}) dE. \end{aligned}$$

A

$$p(t) = \int e^{-\frac{iEt}{\hbar}} c^*(E) c(E) dE = \int e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \omega(E) dE$$

amplitúdóban fellépő $\omega(E)$ függvényt, amely a kezdeti állapot energiaeloszlását írja le, egy izolált rezonancia esetén ésszerű

$$\omega(E) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \Gamma_n / ((E - E_n)^2 + \Gamma_n^2) & \text{ha } E > 0 \\ 0 & \text{ha } E < 0 \end{cases}$$

alakúra választani. A pozitív energiára való korlátozás amiatt szükséges, hogy az

$$L(t) \rightarrow 0 \text{ ha } t \rightarrow \infty$$

követelésnek a bomlástörvény eleget tegyen. E levágás miatt az exponenciális bomlástörvény az időnek csak a

$$\frac{\Gamma_n t}{\hbar} e^{-\frac{\Gamma_n t}{\hbar}} \gg \left(\frac{\Gamma_n}{E_n} \right)^2 \quad (2.31)$$

tartományában érvényes.

Végezetül alkalmazásokon keresztül meg kell vizsgálni, hogy a Gamow-függvény kikerülhetetlen fogalom-e — azaz helyesebben írja-e le a rezonanciaállapotot, mint az egyéb definíciókból adódó függvények — vagy hasznos fogalom-e — azaz fogalmilag és/vagy technikailag könnyebben lehet-e segítségével leírni a rezonanciajelenségeket.

3. Saját vizsgálatok

A Gamow-függvény normálásáról

Bizonyítjuk, hogy a 2. §-ban leírt regularizálási módszer bármely $\exp[-\varepsilon r^n] (1 < n < \frac{1}{2}\pi/\arctan(\gamma/\kappa))$ alakú konvergenciafaktorral ugyanarra az eredményre vezet és megegyezik az analitikus folytatással nyerhető eredménnyel. A norma létezését protonra is megmutatjuk. Neutronokra a normát analitikusan explicit formában megadjuk. Végül felírjuk a Gamow-függvény normájának numerikus közelítésre alkalmas általános formáját.

Az előző fejezetben láttuk, hogy a Gamow-függvények ortonormálhatóságának bizonyítása neutronok esetére a (2.20) és (2.21) határértékek létezésén alapszik. A határértékek létezésének igazolása [1]-ben a konvergenciafaktor speciális alakjának kihasználásával történt. A komplex r -síkban végrehajtott kontúrintegrálással általánosabb konvergenciafaktor esetén is igazolható a J_0 és J_1 határérték létezése.

A norma létezése

Terjesszük ki a

$$J_0 \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r^n} e^{2ikr} dr$$

integrált a komplex r -síkra és integráljuk a C görbe mentén

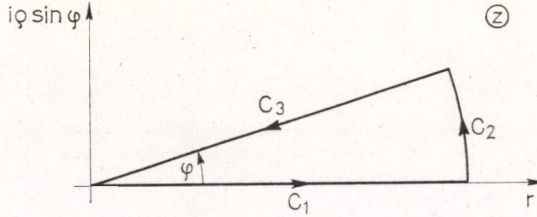
$$J_0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_C e^{-\varepsilon z^n} e^{2ikz} dz.$$

A C görbe három részből áll

$$z = \begin{cases} r & 0 \leq r < \infty & \text{a } C_1 \text{ mentén,} \\ |z|e^{i\alpha} & |z| \rightarrow \infty & 0 \leq \alpha \leq \varphi & \text{a } C_2 \text{ mentén,} \\ \varrho e^{i\varphi} & \arctan \frac{\gamma}{\kappa} < \varphi < \frac{1}{2} \frac{\pi}{n} & 0 \leq \varrho < \infty & \text{a } C_3 \text{ mentén.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Mivel az integrandusz reguláris a C görbén belül, és eltűnik C_2 -n,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r^n} e^{2ikr} dr = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{i\varphi} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon e^{in\varphi} \varrho^n} e^{2ike^{i\varphi} \varrho} d\varrho.$$



3.1. ábra. A (3.2) integrációs út

Mint hogy a φ (3.2)-ben adott alsó határa biztosítja, hogy $k \exp(i\varphi)$ a komplex k -sík felső feléhez tartozik, a jobb-oldali integrál az $\exp[-\varepsilon e^{in\varphi} \varrho^n]$ tényező nélkül is létezik. A 1. Függelékben megmutatjuk, hogy ez a tényező eleget tesz a konvergenciafaktorra kirótt követelményeknek, így

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r^n} e^{2ikr} dr = e^{i\varphi} \int_0^{\infty} e^{2ike^{i\varphi} \varrho} d\varrho = -e^{i\varphi} \frac{1}{2ike^{i\varphi}} = -\frac{1}{2ik}.$$

Hasonlóképpen igazolható J_1 , sőt általában J_j léte is:

$$J_j \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r^n} r^j e^{2ikr} dr = j! \left(-\frac{1}{2ik} \right)^{j+1}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy a konvergenciafaktorral való regularizálás azonosnak bizonyult azzal az eljárással, hogy integráljunk a komplex k -sík felső félsíkjabeli $\bar{k} = k \exp[i\varphi]$ értéknél és transzformáljuk az eredményt a rezonanciapontba, amint ezt [2] ajánlja.

Ezzel a módszerrel protonokra is bizonyíthatjuk (2.24) fennállását. Megismételhetjük a (2.24)-hez vezető érvelést a kifutó Hankel-függvények aszimptotikus formája helyett a kifutó Coulomb-függvények aszimptotikus formáját használva. Végül is azt kell bizonyítanunk, hogy az

$$I_1 \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_R^{\infty} \exp[-\varepsilon r^n] r \exp[i(k_1 r - \eta_1 \ln(2k_1 r) + k_2 r - \eta_2 \ln(2k_2 r))] dr$$

integrál véges.

Terjesszük ki az integrált a komplex r -síkba és integráljunk a

$$z = \begin{cases} r & R \leq r < \infty & \text{a } C_1 \text{ görbén} \\ |z| e^{i\alpha} & |z| \rightarrow \infty & 0 \leq \alpha \leq \varphi & \text{a } C_2 \text{ görbén} \\ R + \varrho e^{i\varphi} & \arctan \frac{\gamma}{\alpha} < \varphi < \frac{1}{2} \frac{\pi}{n} & 0 \leq \varrho < \infty & \text{a } C_3 \text{ görbén} \end{cases} \quad (3.3)$$

kontúr mentén.

Mivel az integrandusz reguláris a (3.3) görbén belül, a Cauchy-tétel alkalmazható. C_2 mentén az integrál eltűnik, így

$$J_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_3} \exp[-\varepsilon z^n] z \exp[i((k_1 + k_2)z - \eta_1 \ln(2k_1 z) - \eta_2 \ln(2k_2 z))] dz.$$

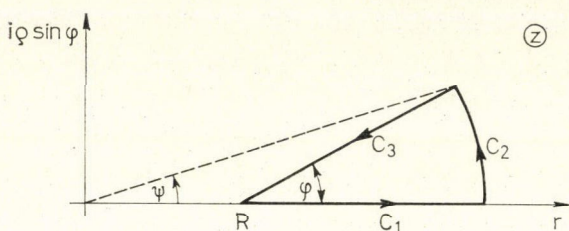
Mivel

$$\left| \int_{C_3} z \exp [i((k_1 + k_2)z - \eta_1 \ln(2k_1 z) - \eta_2 \ln(2k_2 z))] dz \right| < \frac{A(k_1, k_2)m!}{(\varkappa \sin \varphi - \gamma \cos \varphi)^{m+1}},$$

ahol

$$A(k_1, k_2) = \exp [i((k_1 + k_2)R - \eta_1 \ln(2k_1) - \eta_2 \ln(2k_2))]$$

$$m = \text{entier} \left(\frac{\eta_1 k_1 \gamma_1}{|k_1|^2} + \frac{\eta_2 k_2 \gamma_2}{|k_2|^2} + 2 \right);$$



3.2. ábra. A (3.3) integrációs görbe

és mivel az 1. Függelék szerint $\exp[-\varepsilon z^n]$ konvergenciafaktor a C_3 mentén,

$$I_1 < \infty.$$

Megemlítjük, hogy a Coulomb-függvények aszimptotikus alakjával felírt

$$I_j \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r^n} r^j e^{2ikr - 2i\eta \ln kr} dr$$

integrálra explicit forma vezethető le [5]:

$$I_j = (-2i)^{2i\eta} \left(-\frac{1}{2ik} \right)^{j+1} \Gamma(j+1-2i\eta).$$

A Gamow-függvény normája neutronra

Legyen R az $u_l^i(k, r)$ belső és $u_l^o(k, r) \equiv ikr h_l(kr)$ külső megoldás illesztési pontja.

Az

$$N^2 = \int_0^R u_l^i(k, r)^2 dr - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_R^{\infty} e^{-\varepsilon r^n} (kr)^2 h_l(kr)^2 dr \quad (3.4)$$

integrál számítandó ki. Az első tag numerikusan megadható, a második a komplex r -síkba kiterjesztve és a (3.3) kontúron integrálva kiszámítható. Az integrál C_2 -n eltűnik. Így

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_R^{\infty} e^{-\varepsilon r^n} (kr)^2 h_l^2(kr) dr &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_3} e^{-\varepsilon z^n} (kz)^2 h_l^2(kz) dz = \\ &= \int_{C_3} (kz)^2 h_l^2(kz) dz \equiv I_3. \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy az $\exp[-\varepsilon z^n]$ konvergenciafaktor a C_3 mentén, és hogy az I_3 integrál létezik. Ez utóbbit a következőképpen láthatjuk be:

$$I_3 = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \int_R^{R+\varrho e^{i\varphi}} (kz)^2 h_l^2(kz) dz = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_{kR}^{kR+k\varrho e^{i\varphi}} u^2 h_l^2(u) du.$$

A gömbi Hankel-függvények egy jól ismert tulajdonságának [4] felhasználásával

$$\begin{aligned} I_3 &= \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left[\frac{1}{2} u^3 (h_l^2(u) - h_{l-1}(u)h_{l+1}(u)) \right]_{kR}^{kR+k\varrho e^{i\varphi}} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(kR)^3}{k} [h_l^2(kR) - h_{l-1}(kR)h_{l+1}(kR)], \end{aligned} \quad (3.5)$$

mivel a felső határ $\varrho \exp[-2|k|\varrho \sin(\varphi - \arctan(\gamma/\kappa))]$ szerint nullához tart, ha $\varrho \rightarrow \infty$.

A (3.5) eredmény is megegyezik azzal, amit akkor nyernénk, ha a valós r -tengely mentén integrálnánk a komplex k -sík felső feléből való \tilde{k} -nál és az eredményben \tilde{k} -t a k rezonanciaértékkel helyettesítenénk.

A Gamow-függvény normájának numerikus közelítésre alkalmas általános formája

Noha protonok esetére is biztosított a norma léte, a Coulomb-függvények bonyolultsága miatt a (3.4) — (3.5)-höz hasonló explicit formát nem sikerült találni. Itt a normára egy numerikusan jól közelíthető, egzakt, általános formulát vezetünk le. Bontsuk fel a $V(r)$ potenciált $V_1(r) = V_0 f(r)$ és $V_2(r)$ tagok összegére.

Változtassuk meg a

$$[K + V_0 f(r) + V_2(r)]|\varphi\rangle = W|\varphi\rangle \quad (3.6)$$

egyenletben a V_0 paraméter értéket δV_0 -al! Ekkor a $|\varphi\rangle$ sajátfüggvény és a W (komplex) sajátérték $|\delta\varphi\rangle$, ill. δW változást szenved, és (3.6) a

$$[K + (V_0 + \delta V_0)f(r) + V_2(r)]|\varphi + \delta\varphi\rangle = (W + \delta W)|\varphi + \delta\varphi\rangle \quad (3.7)$$

alakot ölti. (3.6) miatt

$$\begin{aligned} \delta V_0 f(r)|\varphi\rangle + [K + V_0 f(r) + V_2(r)]|\delta\varphi\rangle + \delta V_0 f(r)|\delta\varphi\rangle \\ = \delta W|\varphi\rangle + \delta W|\delta\varphi\rangle + W|\delta\varphi\rangle. \end{aligned}$$

Szorozzunk $\langle\tilde{\varphi}|$ -vel!

$$\begin{aligned} \delta V_0 \langle\tilde{\varphi}|f(r)|\varphi\rangle + \langle\tilde{\varphi}|[K + V_0 f(r) + V_2(r)]|\delta\varphi\rangle + \delta V_0 \langle\tilde{\varphi}|f(r)|\delta\varphi\rangle \\ = \delta W \langle\tilde{\varphi}|\varphi\rangle + \delta W \langle\tilde{\varphi}|\delta\varphi\rangle + W \langle\tilde{\varphi}|\delta\varphi\rangle. \end{aligned}$$

Mivel

$$\langle\tilde{\varphi}|[K + V_0 f(r) + V_2(r)] = W \langle\tilde{\varphi}|,$$

$$\delta V_0 \langle\tilde{\varphi}|f(r)|\varphi\rangle + \delta V_0 \langle\tilde{\varphi}|f(r)|\delta\varphi\rangle - \delta W \langle\tilde{\varphi}|\delta\varphi\rangle = \delta W \langle\tilde{\varphi}|\varphi\rangle.$$

Innen

$$\langle\tilde{\varphi}|\varphi\rangle = \frac{1}{\delta W} \langle\tilde{\varphi}|f(r)|\varphi\rangle + \frac{1}{\delta W} \langle\tilde{\varphi}|f(r)|\delta\varphi\rangle - \langle\tilde{\varphi}|\delta\varphi\rangle.$$

Képezzük mindkét oldal határértékét $\delta V_0 \rightarrow 0$ esetre!

$$\langle \tilde{\phi} | \varphi \rangle = \frac{1}{\frac{dW}{dV_0}} \langle \tilde{\phi} | f(r) | \varphi \rangle, \quad (3.8)$$

ha az energiasajátérték differenciálható függvénye a V_0 paraméternek és $dW/dV_0 \neq 0$. Felhasználtuk, hogy a paraméter folytonos változtatásakor a differenciálegyenlet sajátfüggvényei és sajátértékei általában folytonosan változnak [6].

Ha sikerült a potenciál felbontását úgy elvégezni, hogy az $f(r)$ formafaktor eleendően levág ahhoz, hogy a (3.8)-beli mátrixelem konvergenciafaktor nélkül is létezik, akkor

$$N^2 \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon r^n} \tilde{u}(r)^* u(r) dr = \frac{1}{\frac{dW}{dV_0}} \int_0^\infty \tilde{u}(r)^* f(r) u(r) dr. \quad (3.9)$$

Vizsgáljuk meg példaként a négyszögpotenciál esetét!

$$V_1(r) = V_0 f(r)$$

$$f(r) = \begin{cases} -1 & \text{ha } r < a \\ 0 & \text{ha } r \geq a \end{cases}$$

$$V_2(r) \equiv 0.$$

Ebben az esetben a $W = W(V_0)$ függvény $\propto \cotg \alpha = i\beta$ alakú,

$$\alpha = a \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (W + V_0)}, \quad \beta = a \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} W}.$$

A hullámfüggvény

$$u(r) = \begin{cases} \frac{e^{i\beta}}{\sin \alpha} \sin \left(\frac{\alpha}{a} r \right) & \text{ha } r < a \\ e^{i \frac{\beta}{a} r} & \text{ha } r \geq a. \end{cases}$$

(Lásd pl. [7].)

A (3.9) norma két tényezője

$$\frac{1}{\frac{dW}{dV_0}} = 1 + i \frac{\alpha^2}{\alpha^2 \beta - i\beta^2 - \beta^3}.$$

$$N_b^2 \equiv \int_0^a \frac{e^{2i\beta}}{\sin^2 \alpha} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{a} r \right) dr = \frac{a}{2 \sin^2 \alpha} \left(1 - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\alpha} \right).$$

Így

$$N^2 = N_b^2 + i \frac{a}{2\beta} e^{2i\beta}.$$

Számítsuk ki a normát (3.4)—(3.5) szerint is ugyanerre az esetre!

$$\begin{aligned} N^2 &= N_b^2 + \frac{1}{2} a \beta^2 [h_0^2(\beta) - h_{-1}(\beta) h_{+1}(\beta)] \\ &= N_b^2 + i \frac{a}{2\beta} e^{2i\beta}. \end{aligned}$$

A (3.9) forma nagyon alkalmas numerikus közelítésre. Ha a $W = W(V_0)$ függvény és a mátrixelem analitikusan nem adható meg, a dW/dV_0 differenciálhányados helyett a $\delta W/\delta V_0$ differenciahányadost és a mátrixelemet numerikusan határozzuk meg.

Az átlagértékről

Egyszerű egzaktul megoldható modellekben vizsgáltuk az r^2 operátor Gamow-állapotbeli átlagértékét. Megállapítottuk, hogy az életidő növelésével a (2.28) általánosított mátrixelem valós része simán átmegy a kötött állapotbeli átlagértékbe, képzetes része pedig nullához tart. Az általánosított mátrixelem 2. fejezetben adott interpretációjának érvényességi tartománya biztosan kiterjed a „keskeny rezonanciák” tartományára.

Bevezetés

Ösztönösen mindenki érzi, hogy egy hosszú ideig élő bomló állapot nagyon hasonló egy valódi stacionárius állapothoz. Azt várjuk, hogy szisztematikus korrespondencia álljon fenn a kötött állapotok és bomló állapotok megfelelő tulajdonságai között, és hosszú életidőre a kettő simán olvadjon át egymásba. Ha a Gamow-függvényekkel leírt rezonanciaállapotokra a 2. fejezetben vázolt általánosított formulák helyesek, a $\Gamma/E \rightarrow 0$ határesetben a kötött állapoti mennyiségeket kell visszakapnunk.

Másrészt láttuk, hogy Γ/E növelésével a bomló állapotoknak a Gamow-állapottal történő kvázistacionárius leírása egyre inkább eltér az időfüggő tárgyalással nyerhetőtől. A (2.31) formula szerint a

$$xe^{-x} = \left(\frac{\Gamma}{E} \right)^2 \quad (3.6)$$

egyenlet két gyökének $x_2 - x_1$ különbsége az a $\tau = \hbar/\Gamma$ életidő egységekben mért — időintervallum, amelyen kívül az időfüggő tárgyalás a tisztán exponenciális bomlástörvénytől már jelentősen eltérő bomlástörvényt szolgáltat. Nyilvánvalóan, minél hosszabb ez az intervallum, annál jobban közelíti a kvázistacionárius leírás az időfüggőt. Lehetne tehát a „rezonancia keskenysége” ezen intervallumra tett valamilyen követelménnyel definiálni. Másik szokásos meghatározása a rezonanciáknak, hogy a részecske magban való tartózkodásának τ ideje nagy a mag átszeléséhez szükséges T időhöz képest. A τ/T hányadosra kirótt követelmény is mérheti a rezonancia keskenységét. Érdekes kérdés, hogy vajon a fizikai mennyiségekre adódó kvázistacionárius becslés Γ/E növelésével várhatóan bekövetkező elromlása mutat-e valamilyen szisztematikus korrelációt az $x_2 - x_1$ időintervallum vagy a τ/T hányados nagyságával.

Fenti kérdésekre egyszerű, egzaktul megoldható példa kapcsán kerestünk választ. Kiszámítottuk az r^2 operátor mátrixelemét két egyszerű modellben a potenciál változtatásával nyerhető pólustrajektóriák mentén.

Az r^2 operátor mátrixeleme

Képeztük az

$$R \equiv \langle \tilde{u} | r^2 | u \rangle$$

mátrixelemet az

$$u''(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} u(r) - v(r)u(r) = -k^2 u(r)$$

(2.16) radiális egyenlet normált kifutó megoldásaival a $V(r) \equiv \hbar^2 v(r)/2M$ potenciál két speciális megválasztása mellett.

$$a) \quad V(r) = c\delta(r-a), \quad l=0.$$

Mint ismeretes [1], az 1-re normált függvény

$$u_n(r) = \tilde{u}_n^*(r) = \begin{cases} N^{-1} \frac{e^{ik_n a}}{\sin k_n a} \sin k_n r & r < a \\ N^{-1} e^{ik_n r} & r > a, \end{cases}$$

a k_n hullámszám kielégíti a

$$2k_n - ic(e^{2ik_n a} - 1) = 0$$

egyenletet, és

$$N^{-2} = \frac{c(1 - \cos 2ak_n)}{1 + ac - 2iak_n}.$$

A 477. oldalon a J_j integrálra felírt formula $j=2$ speciális esetének alkalmazásával R -re a következő adódik [8]:

$$R = a^2 - \frac{1}{2k_n^2} - \frac{2}{3} \frac{k_n a^3}{k_n a - \sin k_n a \cdot e^{-2k_n a}}.$$

$$b) \quad V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < b \\ +U_0 & b \leq r < a \\ 0 & a \leq r. \end{cases} \quad (3.10)$$

A normált sajátfüggvény

$$u_l(r) = \begin{cases} N_l^{-1} a_1 F_l(\kappa_{1,n} r) & r < b \\ N_l^{-1} [a_2 F_l(\kappa_{2,n} r) + a_3 G_l(\kappa_{2,n} r)] & b \leq r < a \\ N_l^{-1} O_l(k_n r) & a \leq r. \end{cases} \quad (3.11)$$

F_l és G_l a radiális egyenlet $r=0$ -ban reguláris és irreguláris megoldását jelenti, O_l ezek kifutó lineáarkombinációja

$$F_l \equiv q j_l(q) \quad (3.12)$$

$$G_l \equiv -q n_l(q)$$

$$O_l \equiv G_l + i F_l = i q h_l^{(+)}(q).$$

Az a_1, a_2, a_3 és k_n abból a feltételből határozható meg, hogy a radiális függvény r szerinti deriváltja folytonos legyen az a és b pontban.

$$k_n^2 = \frac{2M}{\hbar^2} E_n$$

$$\kappa_{1,n}^2 = \frac{2M}{\hbar^2} (E_n + V_0)$$

$$\kappa_{2,n}^2 = \frac{2M}{\hbar^2} (E_n - U_0).$$

Az N_l az $\langle \tilde{u}_l | u_l \rangle = 1$ normálási feltételből kapható. A mátrixelem

$$R_l = \frac{1}{N_l^2} \sum_{j=1}^5 Q_l^j(k_j) \quad (3.13)$$

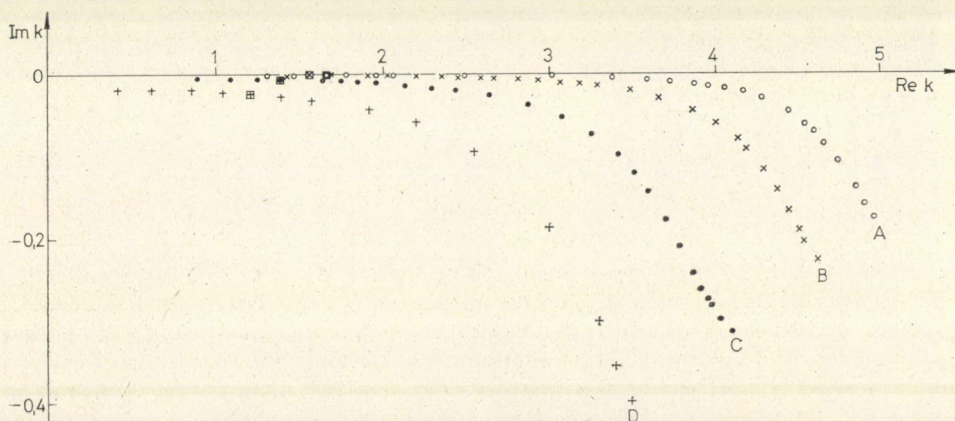
alakban állítható elő, a Q_l^j -re rekurziós formula vezethető le [9]. A hosszadalmas formulákat a 2. Függelékben gyűjtöttük össze.

Numerikus eredmények

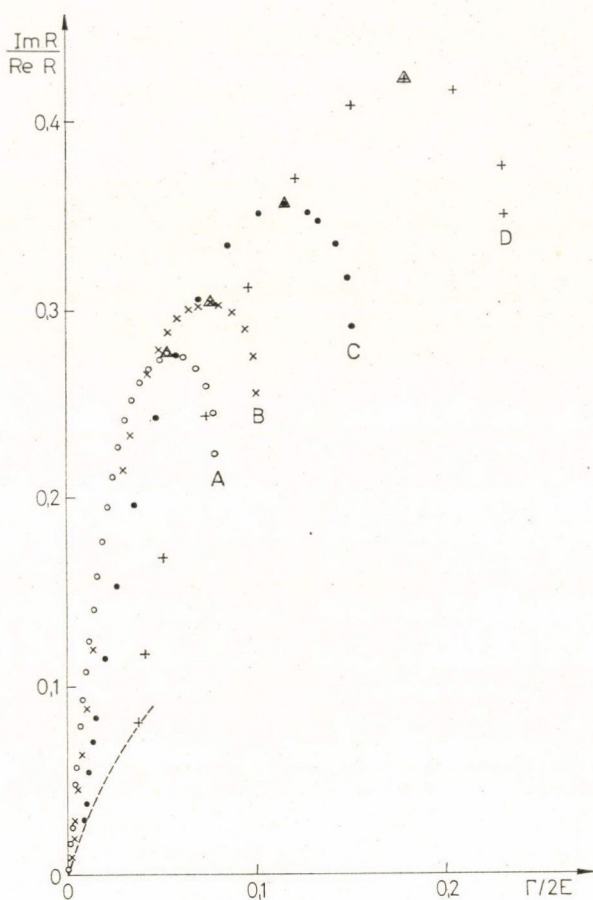
Részletesen csak a teljesebb információt szolgáltatató, b) esetre vonatkozó numerikus eredményeinket mutatjuk be.

A 3.3 ábra az $l=0-s$ pólusok V_0 változtatásával nyert komplex k -síkbeli trajektóriáját ($\text{Im } k = f(\text{Re } k)$, $k = k(V_0)$) mutatja be az U_0 négy különböző értékére. (Az $A B C D$ görbék rendre csökkenő U_0 értékeknek felelnek meg.)

A Γ/E mennyiség $\text{Re } k \rightarrow 0$ irányban monoton csökken egy görbe mentén $(\Gamma/E)_{\min}$ -ig (\square -gel jelölt pontok), majd ismét növekedni kezd, mivel az $\text{Im } k = f(\text{Re } k)$ függvény közel állandóvá válik. A $\Gamma/E \rightarrow 0$ átmenetet egy görbe mentén csak $(\Gamma/E)_{\min}$ -ig követhetjük. Minél nagyobb U_0 , annál kisebb $(\Gamma/E)_{\min}$; ha U_0 a végtelenhez, $(\Gamma/E)_{\min}$ zéróhoz tart.



3.3. ábra



3.4. ábra

kek a dobozba zárt részecskének — a függőleges tengelyen körrel jelölt — $\langle r^2 \rangle$ értékehez tartanak.

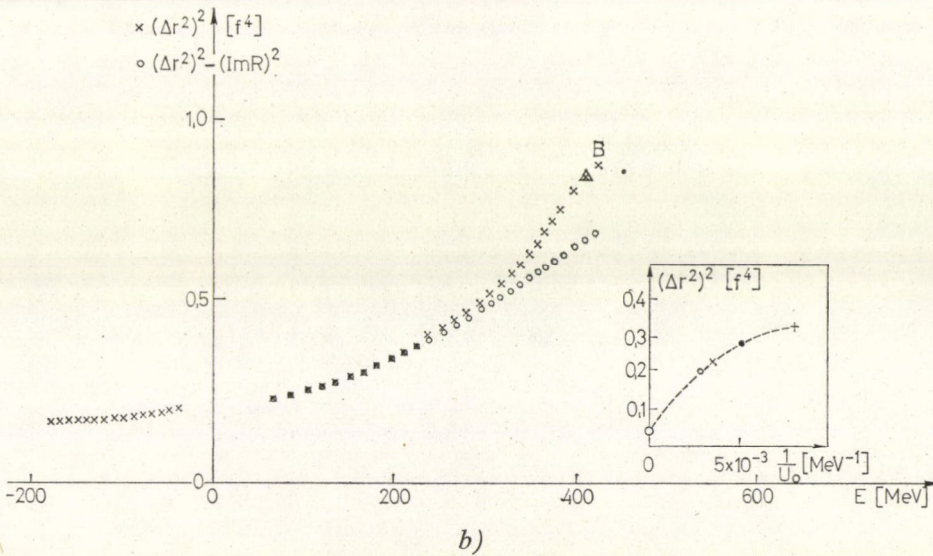
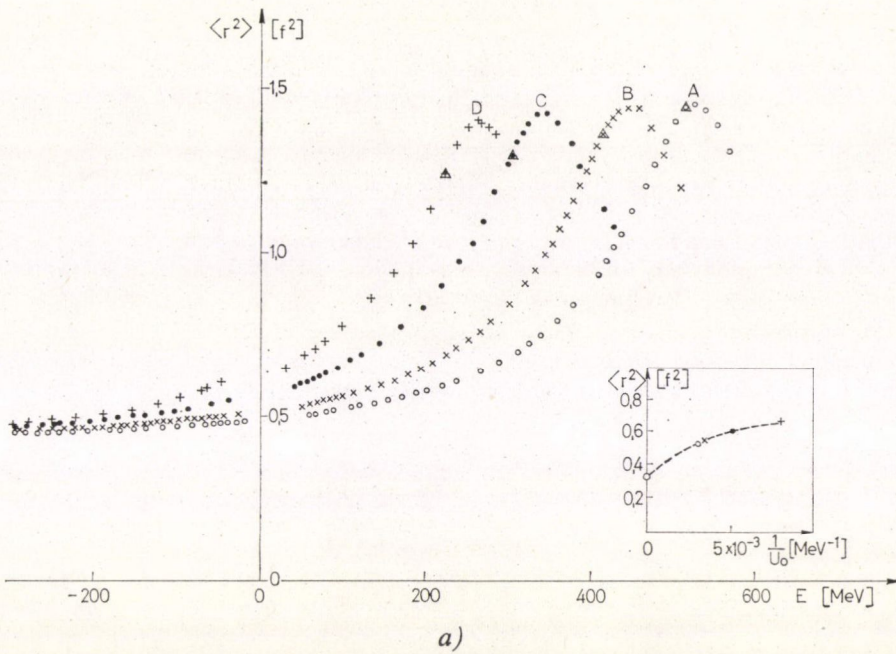
A 3.5. b ábrán az r^2 szórása, a

$$(\Delta r^2)^2 = \langle r^4 \rangle - \langle r^2 \rangle^2$$

mennyiség látható az E függvényében a B esetben. ($\langle r^4 \rangle$ -ra az $\langle r^2 \rangle$ -ra megadotthoz hasonló formulák vezethetők le.) Köötött állapotban $(\Delta r^2)^2$ teljesen abból származik, hogy az $|u\rangle$ állapotvektor nem sajátvektora az r^2 operátornak. Gamow-állapotban egy járulékos bizonytalanság jön az állapot véges szélességéből. Ha ezt a járulékos bizonytalanságot $(\text{Im } R)^2$ -tel azonosítjuk, a $(\Delta r^2)^2 - (\text{Im } R)^2$ mennyiséget (körökkel jelölve a 3.5. b ábrán) kell a köötött állapoti érték Gamow-állapotra való extrapolációjának tekintenünk. (Érdekes észrevenni, hogy keskeny állapotokra a Gamow-állapot

A 3.4. ábra az $\text{Im } R / \text{Re } R$ mennyiséget ábrázolja a 3.3. ábra trajektóriái mentén a \square -jelű pontokig a relatív energiabizonytalanság függvényeként. Látható, hogy $\text{Im } R / \text{Re } R$ zéróhoz tart, amint $(\Gamma/E)_{\min}$ a zéróhoz tart és hogy a \triangle -jelű pontokig erős korreláció mutatkozik. A 3.1. táblázat a \square illetve \triangle pontokra megadja a Gamow-állapot τ élettartamának és a mag átszeléséhez szükséges T időnek a hányadosát illetve azt az életidő egységekben mért időintervallumot $(x_2 - x_1)$, amelyen kívül az exponenciális bomlástörvénytől való eltérés lényegessé válik.

A 3.5. a. ábra az $\langle r^2 \rangle = \text{Re } R$ mennyiséget mutatja E függvényeként a $(\Gamma/E)_{\min}$ -hoz tartó pontokig és valós negatív sajátértékekre. Kihagyva, mint itt tettük, az $E=0$ -nál fellépő szingularitás közvetlen környékét, az $\langle r^2 \rangle$ Gamow-állapotbeli értékei a köötött állapoti értékek ésszerű extrapolációjának tekinthetők. A betét mutatja, hogy ha $(\Gamma/E)_{\min} \rightarrow 0$ azaz $U_0 \rightarrow \infty$, a $(\Gamma/E)_{\min}$ -hoz tartozó $\langle r^2 \rangle$ érté-



3.5. ábra

bomlékonyasága miatti korrekció jelentéktelen.) A betét ismét azt mutatja, hogy az $A B C D$ trajektóriák $(\Gamma/E)_{\min}$ -mal jellemezett pontjaihoz tartozó $(\Delta r^2)^2$ értékek simán belevezetnek a dobozba zárt részecske esetére számolt értékbe.

Következtetések

A Bevezetésben érintett első problémával kapcsolatban példánk igen megnyugtató eredménnyel szolgált. Azt mutatja, hogy a Gamow-állapotbeli $\langle r^2 \rangle$ hosszú élet-időkre simán átmeny a kötött állapotbeli értékbe, míg az $\langle r^2 \rangle$ mérésénél az állapot energiabizonytalanságából eredő bizonytalanság simán 0-hoz tart. A $(\Gamma/E)_{\min}$ nullához tartását, azaz az életidő minden határon túl való növelését példánkban a gátmagasság növelésével értük el. Az eredmény feljogosít arra a reményre, hogy — legalábbis a bomlásállapotok azon csoportjánál, amelyeknél a bomlékonyság a véges magasságú gáton történő áthatolással kapcsolatos — a korrespondencia a Gamow- és kötött állapotok között általánosan kimutatható.

A Bevezetésben feltett második kérdésre nyerhető választ a 3.1. táblázat tartalmazza, amely az egyes trajektoriákon a \square és \triangle pontokhoz tartozó $x_2 - x_1$ intervallumok és τ/T hányadosok nagyságát mutatja.

3.1. TÁBLÁZAT

U_0	$(x_2 - x_1)_{\square}$	$(x_2 - x_1)_{\triangle}$	$(\tau/T)_{\square}$	$(\tau/T)_{\triangle}$
A	15.79	6.21	2378.3	3.1
B	13.59	5.43	971.1	2.7
C	10.17	4.30	250.9	2.1
D	6.97	2.53	84.8	1.6

Látható, hogy az a Γ/E intervallum, amelyen belül az általánosított mátrixelem kielégíti józan várakozásainkat, jóval nagyobb, mint a rezonancia keskenységére tehető bármely ésszerű feltevés által megszabott intervallum. Ugyanez olvasható ki az a) eset eredményéből is.

Gamow-függvények alkalmazása izobár analóg rezonanciák leírásában

Egy Gamow-függvényeket felhasználó módszert mutatunk be az izobár analóg rezonancia egypólusközelítésű leírására. A rezonancia helyének és teljes szélességének meghatározásához a céltárgy + nukleon rendszer Lane-modellbeli Hamilton operátorát diagonalizáljuk kötött állapotú neutron- és rezonanciaállapotú protonfüggvényeket tartalmazó bázison. Numerikus példaként a $^{48}\text{Ca} + p$ és $^{208}\text{Pb} + p$ rendszer izobár-analóg rezonanciáit számítjuk ki. Az eredmények a Lane-egyenletek numerikus integrálásából nyert eredményekkel jól egyeznek.

Az izobár analóg rezonanciákat (IAR) leíró Lane-egyenletek megoldásával nyert S -mátrix [11] és [12] szerint igen pontosan közelíthető egypólus-formulával. Így az egzakt megoldástól való eltérés a paraméterek meghatározására szolgáló módszer jóságának mértékéül szolgál. A következőkben egy mind fogalmilag, mind technikai-
lag egyszerű módszert írunk le, amely jó betekintést nyújt az IAR szerkezetébe, és a rendszer rezonanciabeli közelítő hullámfüggvényét a helyes aszimptotikus viselkedéssel szolgáltatja.

A módszer elvi alapját a (2.26) teljességi összefüggés szolgáltatja.

A módszer

Legyen a target + nukleon rendszer Hamilton-operátora a következő alakú:

$$H = H(\xi) + M(\tau) + K + V_0(x) + \left(\frac{1}{2} - t_3\right) V_c(x) + i\hat{T}V_1(x). \quad (3.16)$$

(Itt $H(\xi)$ a target Hamilton-operátora, $M(\tau)$ a tömegoperátor, K a nukleon kinetikus energiája, $V_0(x)$ a magpotenciál izoskalár része, $V_c(x)$ a Coulomb-potenciál, $V_1(x)$ a szimmetriapotenciál, \hat{T} , illetve \hat{i} a target, illetve a nukleon izospin vektoroperátora.)

Vegyük fel a hullámfüggvényt

$$\Psi = \Phi_P(x)\alpha_P(\tau)\psi_{T_0, T_0-1}(\xi) + \Phi_n(x)\alpha_n(\tau)\psi_{T_0, T_0-1}(\xi) \quad (3.17)$$

alakban. ($\Phi_P(x)$ és $\alpha_P(\tau)$ a proton, $\Phi_n(x)$ és $\alpha_n(\tau)$ a neutron tér-spin- illetve izospinfüggvénye, $\psi_{T_0, T_3}(\xi)$ a törzs hullámfüggvénye.)

Definiáljuk az energiaskála nullapontját és a Δ_c Coulomb-eltolást a

$$[H(\xi) + M(\tau)]\alpha_P(\tau)\psi_{T_0, T_0}(\xi) = 0$$

$$[H(\xi) + M(\tau)]\alpha_n(\tau)\psi_{T_0, T_0-1}(\xi) = \Delta_c\alpha_n(\tau)\psi_{T_0, T_0-1}(\xi)$$

egyenletekkel. A Φ_P -re és Φ_n -re fentiek a Lane-egyenleteket szolgáltatják:

$$\left[K + V_0(x) + V_c(x) - \frac{T_0}{2} V_1(x) - E\right] \Phi_P = -\sqrt{\frac{T_0}{2}} V_1(x) \Phi_n. \quad (3.18a)$$

$$\left[K + V_0(x) + \Delta_c + \frac{T_0-1}{2} V_1(x) - E\right] \Phi_n = -\sqrt{\frac{T_0}{2}} V_1(x) \Phi_P. \quad (3.18b)$$

Rezonanciában ($E \approx E^{IAR}$), mivel ott $\Phi_P \approx \frac{1}{\sqrt{2T_0}} \Phi_n$, (3.18a) és (3.18b) közelítőleg szétkapcsolódik és a következő formát ölti:

$$\left[K + V_0(x) + V_c(x) - \frac{T_0}{2} V_1(x) + T_0 V_1(x) - E^{IAR}\right] \Phi_P = 0, \quad (3.19a)$$

$$\left[K + V_0(x) + \frac{T_0-1}{2} V_1(x) + \frac{1}{2} V_1(x) + \Delta_c - E^{IAR}\right] \Phi_n = 0. \quad (3.19b)$$

A (3.18) egyenletek numerikus integrálása helyett egy héjmodellszerű eljárást is követhetünk. Hasítsuk fel a (3.16) Hamilton-operátort két részre

$$H = H_0 + V$$

ahol

$$H_0 = H(\xi) + M(\tau) + K + V_0(x) + \left(\frac{1}{2} - t_3\right) (V_c(x) + v_P(x)) + \left(\frac{1}{2} + t_3\right) v_n(x) + t_3 T_3 V_1(x) \quad (3.20)$$

$$V = -\left(\frac{1}{2} - t_3\right) v_P(x) - \left(\frac{1}{2} + t_3\right) v_n(x) + \frac{1}{2} (t_+ T_- - t_- T_+) V_1(x). \quad (3.21)$$

Diagonalizáljuk H -t a H_0 sajátfüggvényeiből választott alkalmas bázison.

$$A \quad H_0 \psi^i = E^i \psi^i$$

egyenletet kielégítő függvények a következő két osztályba tartoznak:

$$\begin{aligned} \psi_P^i &= \Phi_P^i(x) \alpha_P(\tau) \psi_{T_0, T_0}(\xi) \\ \psi_n^i &= \Phi_n^i(x) \alpha_n(\tau) \psi_{T_0, T_0-1}(\xi). \end{aligned} \quad (3.22)$$

A $\Phi_P^i(x)$ és $\Phi_n^i(x)$ függvények a

$$\left[K + V_0(x) - \frac{T_0}{2} V_1(x) + v_P(x) + V_c(x) - E_P^i \right] \Phi_P^i = 0, \quad (3.23a)$$

$$\left[K + V_0(x) + \frac{T_0 - 1}{2} V_1(x) + v_n(x) + \Delta_c - E_n^i \right] \Phi_n^i = 0 \quad (3.23b)$$

egyenleteknek tesznek eleget.

Vegyük a (3.23) egyenletek kötött, rezonancia és megfelelő szórásai megoldásainak egy teljes rendszerét. A (3.23) és (3.19) egyenletek összehasonlítása azt sugallja, hogy rezonanciában $v_P(x) \approx T_0 V_1(x)$ és $v_n(x) \approx \frac{1}{2} V_1(x)$ választással (3.22) igen alkalmas bázis H diagonalizálására. Várható, hogy a teljes rendszerből csak a $-E_n \approx \Delta_c - E^{IA} R$ energiához tartozó φ_n neutronfüggvény és az $E_P \equiv \mathcal{E}^{SP} \approx E^{IA} R - i/2 \cdot \Gamma^{SP}$ energiához tartozó φ_P protonfüggvény fog számottevő együtthatóval rendelkezni. Ha csak ezeket tartjuk meg, egy kétszer-kettes mátrix diagonalizálása szolgáltatja az IAR $\mathcal{E}^{IA} R$ komplex energiáját (helyzetét és szélességét), valamint

$$\Psi^{IA} R = a_n \varphi_n(x) \alpha_n(\tau) \psi_{T_0, T_0-1}(\xi) + a_P \varphi_P(x) \alpha_P(\tau) \psi_{T_0, T_0}(\xi)$$

hullámfüggvényét a következőképpen:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{IA} R &\equiv E^{IA} R - \frac{i}{2} \cdot \Gamma^{IA} R = \frac{1}{2} \{ \mathcal{E}^{SP} - \langle \tilde{\varphi}_P | v_P | \varphi_n \rangle + E_n + \Delta_c - \\ &\quad - \langle \varphi_n | v_n | \varphi_n \rangle + [(\mathcal{E}^{SP} - \langle \tilde{\varphi}_P | v_P | \varphi_P \rangle - (E_n - \langle \varphi_n | v_n | \varphi_n \rangle + \Delta_c))^2 + \\ &\quad + 2T_0 \langle \varphi_n | V_1 | \varphi_P \rangle^2]^{1/2} \}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\frac{a_n}{a_P} = - \frac{\mathcal{E}^{SP} - \langle \tilde{\varphi}_P | v_P | \varphi_P \rangle - \mathcal{E}^{IA} R}{\sqrt{T_0/2} \langle \varphi_n | V_1 | \varphi_P \rangle}. \quad (3.25)$$

A. M. Nagarajan kimutatta [13], hogy a fenti közelítést használva az IAR projekciós-operátor-technikával történő leírásában a rugalmas szórás S -mátrixa egypólus-közelítésben

$$S_{el} = S_{el}^0 \left(1 - i \frac{2\pi \langle \chi^{(+)} | PHQ | \Psi^{IA} R \rangle \langle \tilde{\Psi}^{IA} R | QHP | \chi^{(+)} \rangle}{E - \mathcal{E}^{IA} R} \right) \quad (3.26)$$

alakú. Itt

$$\begin{aligned} P &= |\alpha_P(\tau) \psi_{T_0, T_0}(\xi) \rangle \langle \psi_{T_0, T_0}(\xi) \alpha_P(\tau) | \\ Q &= |\alpha_n(\tau) \psi_{T_0, T_0-1}(\xi) \rangle \langle \psi_{T_0, T_0-1}(\xi) \alpha_n(\tau) | \end{aligned} \quad (3.27)$$

$\chi^{(+)}$ -t és S_{el}^0 -t az

$$(E - PHP) P \chi^{(+)} = 0 \quad (3.28)$$

egyenlet határozza meg. (A levezetést a 3. Függelék-ben idézzük). Megoldva a

(3.28) egyenletet — ami valójában a (3.19a) homogén része — az S -mátrix kiszámítható, és a Lane-egyenletek numerikus megoldásával összehasonlítható.

Ha az S_{el}^0 és $\chi^{(+)}$ gyenge energiafüggése feltételezhető, a (3.28) egyenletet elegendő az $E = E^{IAR}$ energiánál megoldani.

Ha a potenciálok valósak a

$$\Gamma \equiv 2\pi \langle \chi^{(+)} | PHQ | \Psi^{IAR} \rangle \langle \tilde{\Psi}^{IAR} | QHP | \chi^{(+)} \rangle = \Gamma^{IAR} \quad (3.29)$$

egyenlőségnek fenn kell állnia.

Numerikus példák

A módszer alkalmazása során felmerülő numerikus problémák részletes taglalása [14]-ben található meg. A kulcskérdés a Gamow-függvények generálása, vagyis a (3.23a) egyenlet tisztán kifutó aszimptotikájú megoldásainak megkeresése pozitív energiáknál. Ezt a feladatot a [15]-ben leírt eljárás módosításával oldottuk meg: (1) a valós változókat komplexekkel helyettesítettük, ahol szükséges volt, (2) a logaritmikus deriváltak energia szerinti differenciálhányadosait differenciáhányadossal helyettesítettük. A sajátfüggvény normálását (3.9) szerint végeztük, paraméterként a Saxon—Woods formájú magpotenciál erősségét használva és differenciáhányadossal helyettesítve a differenciáhányadost.

Első példaként a $^{48}\text{Ca} + p$ folyamatban fellépő $p_{3/2}$ rezonanciát a ^{49}Ca alapállapotának analógját kerestük meg.

A teljes rendszerből a $2p_{3/2}$ kötött neutronfüggvényt és a $2p_{3/2}$ rezonancia-protonfüggvényt tartottuk meg.

Minden magpotenciált Saxon—Woods formájúnak választottunk a szokásos paraméterértékekkel. Az erősségek MeV-okban a következő értékűek voltak: a centrális potenciál erőssége $U_0 = -52,7$, a spin-pálya tag erőssége $V_{s0} = -7,5$, $V_1 = 2,3$ (ezek az értékek szolgáltatták a ^{49}Ca $2p_{3/2}$ neutronjának kísérletileg talált $-5,15$ MeV-os kötési energiáját), $v_n = -0,64$, $v_p = 10,63$ (ezekkel az értékekkel a $2p_{3/2}$ protonrezonancia az IAR közelében jelent meg.) A Coulomb-eltolást a szokásos $\Delta_c = 7,09$ MeV értékűnek választottuk.

Ezek a bemenő adatok $E_n = -6,13$ MeV-nál egy $2p_{3/2}$ kötött neutronállapotot, $\mathcal{E}^{SP} = (1,903 - i/2 \cdot 0,0145)$ MeV-nál egy $2p_{3/2}$ protonrezonanciát eredményeztek. A (3.24) és (3.25) egyenletből $\mathcal{E}^{IAR} = (1,857 - i/2 \cdot 0,00155)$ MeV, $a_n = 0,94$ és $a_p = 1/(2,99) - i \cdot 0,007$ értékek adódnak. Az IAR szélességét kifejezve az IAR helyén vett egyrészecske-szélességgel (3.6. ábra)

$$\Gamma^{IAR} = \frac{\Gamma^{SP}}{8,3}$$

adódik.

A Lane—Robson-modell megfelelő értékei:

$$a_n = \frac{\sqrt{2T_0}}{\sqrt{2T_0+1}} = 0,94,$$

$$a_p = \frac{1}{\sqrt{2T_0+1}} = \frac{1}{3},$$

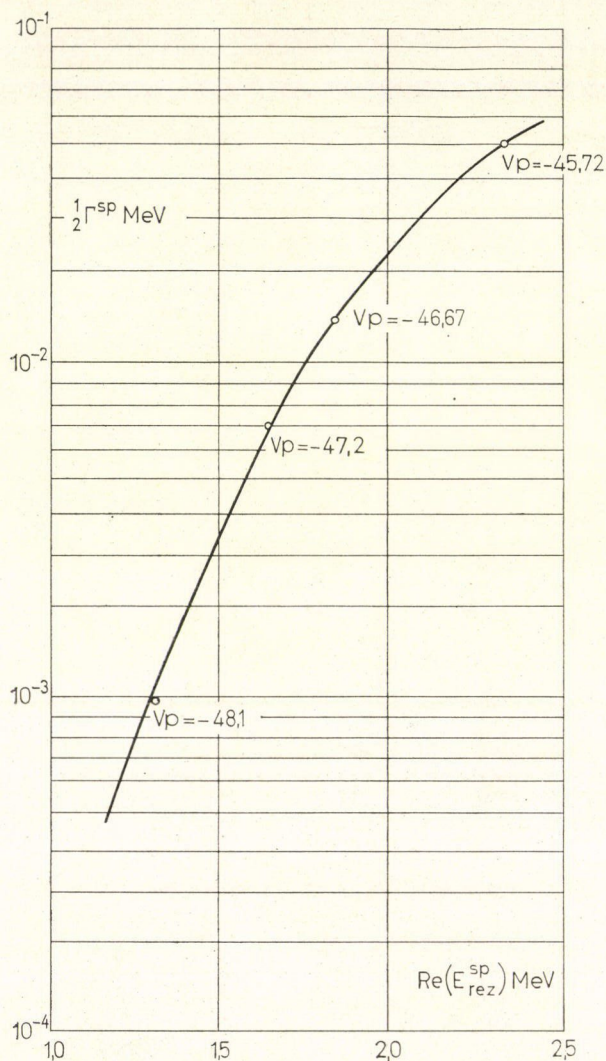
$$\Gamma^{IAR} = \frac{\Gamma^{SP}}{2T_0+1} = \frac{\Gamma^{SP}}{9}.$$

A csatolt Lane-egyenletek numerikus integrálásából $E^{IAR} = 1,849$ MeV, $\Gamma^{IAR} = 0,0017$ MeV adódik.

A másik, részletesebben vizsgált példa a $^{208}\text{Pb} + p$ folyamatban fellépő $g_{9/2}$, $i_{11/2}$, $d_{5/2}$, $s_{1/2}$, $g_{7/2}$, $d_{3/2}$ izobár analóg rezonanciák kiszámítása volt. Hogy a módszer hatékonyságát ellenőrizzük, a lehető legegyszerűbb esetet választottuk: a segédpotenciáloknak a $v_p(x) = T_0 V_1(x)$ illetve a $v_n(x) = \frac{1}{2} V_1(x)$ értéket adtuk, valós potenciálokat használtunk térfogati típusú Saxon—Woods-formafaktorral. A potenciálparaméterek:

$r_0 = 1,19$, $a = 0,75$, $U_0 = -56,4$ MeV, $V_1 = 0,5$ MeV, a spin-pálya tag erőssége $V_{s0} = -5,8$ MeV. A Coulomb-potenciál a szokásos alakú, $r_c = r_0$. A felsorolt paraméter-értékek visszaadják az ^{209}Pb utolsó neutronjának kísérletileg észlelt kötési energiáit. A Coulomb-eltolást

$\Delta_c = 18,9$ MeV-nak vettük. Az eredményül kapott egyrészecskeenergiákat a 3.2 táblázatban soroltuk fel. A 3.3 táblázat a (3.24) formula eredményét, a (3.28)-ból nyert, az E^{IAR} energiáknál számolt δ^0 fáziseltolást, valamint az IAR-eknek a Lane-egyenletek egzakt numerikus megoldásából kapott helyzetét, félszélességét és fáziseltolását tartalmazza. Konzisztenciapróbaként a (3.29) egyenlet szerint kiszámított $\Gamma/2$ értékeket is felsoroltuk a 3.3 táblázat utolsó oszlopában. A 3.7. ábra egy tipikus példát mutat arra, hogy hogyan egyezik az



3.6. ábra

A (3.23a) egyenletnek a jelölt potenciálértékekhez tartozó $2p_{3/2}$ komplex energiasajátértékei

$$S = e^{2i\delta^0} \left(1 - i \frac{\Gamma^{IAR}}{E - E^{IAR}} \right) \quad (3.30)$$

formulából számított S -mátrix a Lane-egyenletekből nyert egzakt S -mátrixszal. (A többi rezonanciára az összehasonlítás [14]-ben megtalálható.)

Ha a Ca esetéhez hasonlóan a segédpotenciálok erős-

3.2. TÁBLÁZAT

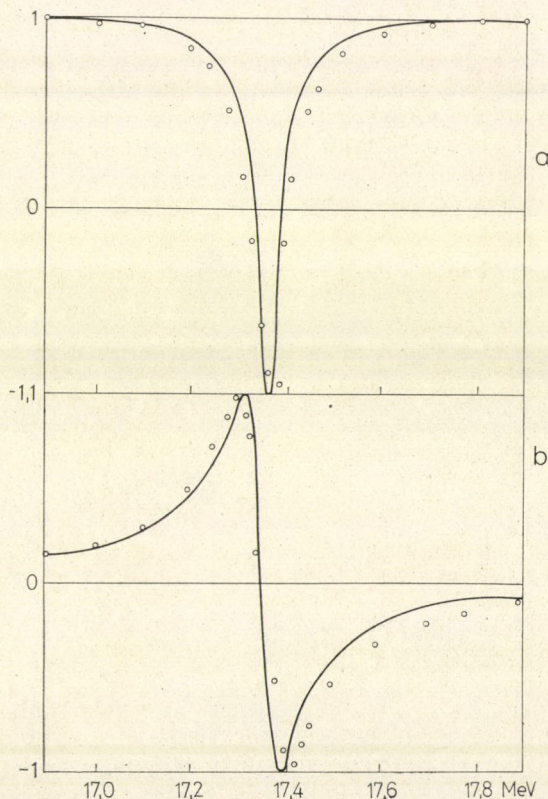
Egyrészecske energiák a (3.23) egyenletből MeV-ban

l_j	Proton	Neutron
$g_{9/2}$	$13,7411 - i/2 \cdot 0,7484$	$-3,9021$
$i_{11/2}$	$15,2615 - i/2 \cdot 0,0678$	$-3,3653$
$d_{5/2}$	$13,9547 - i/2 \cdot 3,9146$	$-2,4204$
$s_{1/2}$	$13,7368 - i/2 \cdot 6,9322$	$-1,9598$
$g_{7/2}$	$15,7956 - i/2 \cdot 1,8352$	$-1,4946$
$d_{3/2}$	$14,7300 - i/2 \cdot 5,2888$	$-1,4336$

ségének alkalmas megválasztásával az egyrészecskerezonanciát a IAR-hoz igen közel nyomjuk, javíthatjuk a teljes szélesség egyezését. Pl. $v_p = 13,6$ MeV, $v_n = 0,25$ MeV $\mathcal{E}^{SP} = (14,992 - i/2 \cdot 1,4190)$ MeV-nál adja a $g_{7/2}$ rezonanciát, ami $\mathcal{E}^{IAR} = (14,9549 - i/2 \cdot 0,03576)$ MeV értékre vezet.

A δ^0 fáziseltolás és a $\chi^{(+)}$ optikai függvény energiafüggésének figyelembe vétele javítja a protonszélesség és a S-mátrix egyezését.

Összefoglalásul megállapíthatjuk, hogy a módszer még durvább változatában is elfogadható becslést ad az egypólus-formula paramétereire. Megemlítendő előnye, hogy gépidőigénye a Lane-egyenletek integrálásához viszonyítva csekély, és így hasznos lehet kísérletek tervezésénél is.



3.7. ábra

Kihúzott vonal: a $g_{7/2}$ izobár analóg rezonancia (3.30) egyenlet szerint számított S-mátrixának *a)* valós *b)* képzetes része. Pontok: a Lane-egyenletek numerikus integrálásából nyert értékek

3.3. TÁBLÁZAT

Az izobár analóg rezonancia egypólus-formulájának paraméterei
(energiák MeV-ban, fázis radiánban)

l_j	Jelen módszer			Lane-egyenletek			A (3.29) szerint számolt $\Gamma/2$.
	Helyzet	Szélesség	Fázis	Helyzet	Szélesség	Fázis	
$g_{9/2}$	14,9606	0,0266	0,055	14,953	0,0475	0,099	0,0411
$i_{11/2}$	15,5260	0,0021	0,024	15,5238	0,0026	0,043	0,0024
$d_{5/2}$	16,4230	0,1002	2,730	16,4451	0,1432	2,759	0,1229
$s_{1/2}$	16,8797	0,1396	2,170	16,9188	0,1587	2,207	0,1326
$g_{1/2}$	17,3641	0,0568	0,016	17,3683	0,0825	-0,001	0,0748
$d_{3/2}$	17,4119	0,1196	-0,562	17,4421	0,1462	-0,561	0,1176

A leggyakrabban használt rezonanciaállapotok hullámfüggvények összehasonlítása egy négyszög-modellben

Egy négyszög-potenciálban végzett számításból arra a következtetésre jutottunk, hogy rezonanciaállapotra vezető magreakciók különbséget tehetnek a formafaktorként alkalmazott pólusfüggvények (Gamow-, Weinberg-) és szórási függvények között, ha a magon kívüli tartomány jelentős szerepet játszik a leírni kívánt jelenségben. A Gamow- és Weinberg-függvény keskeny rezonanciák ($\Gamma/E \leq 0,1$) esetén $r \leq 50$ fermi távolságig gyakorlatilag nem különböztethető meg.

Magreakció-számításokban a nem-kötött állapotok leírására különböző javaslatok születtek. Eltekintve attól a mesterkélt előírástól, hogy az állapotfüggvényt egy kötött egyrészecske-függvénynek egy oszcilláló farokhoz történő csatolásából szerkesszük meg [16], általában valamilyen Hamilton-operátor rezonáns sajátfüggvényének használatát javasolják. A rezonáns sajátállapot lehet Gamow-állapot [17], rezonáns szórási állapot [18, 19] vagy Weinberg-állapot [20, 21].

Összehasonlítottuk az

$$u''(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} u(r) - v(r)u(r) = -k^2 u(r)$$

radiális egyenlet három különböző megoldását, amelynél az energiasajátérték (vagy annak valós része) megegyezik.

a) Gamow-megoldás:

$$V(r) \equiv \hbar^2 v(r)/2M = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0 & r > a. \end{cases}$$

Határfeltételek:

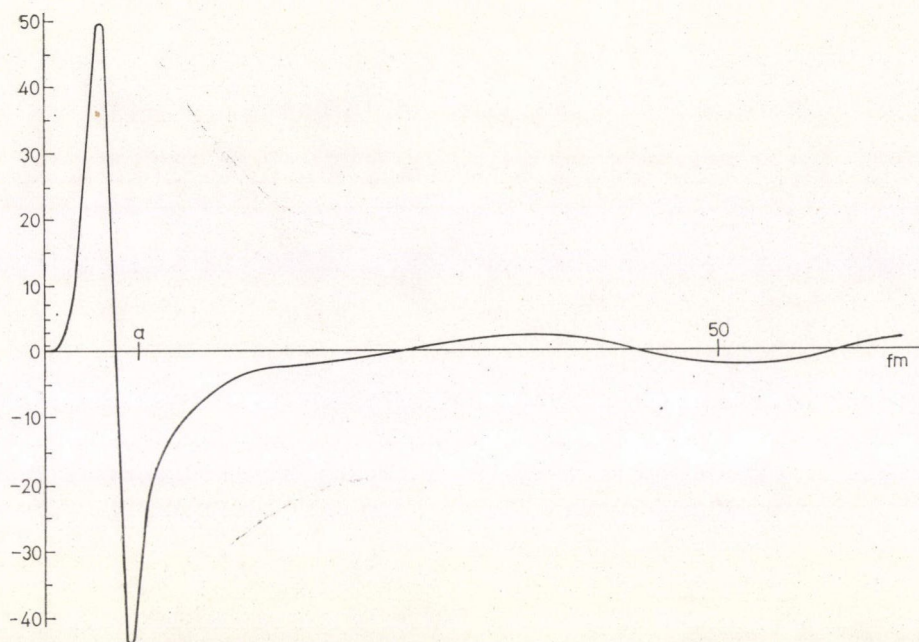
$$u_l(0) = 0.$$

$$u_l(a)O_l'(ka) - u_l'(a)O_l(ka) = 0.$$

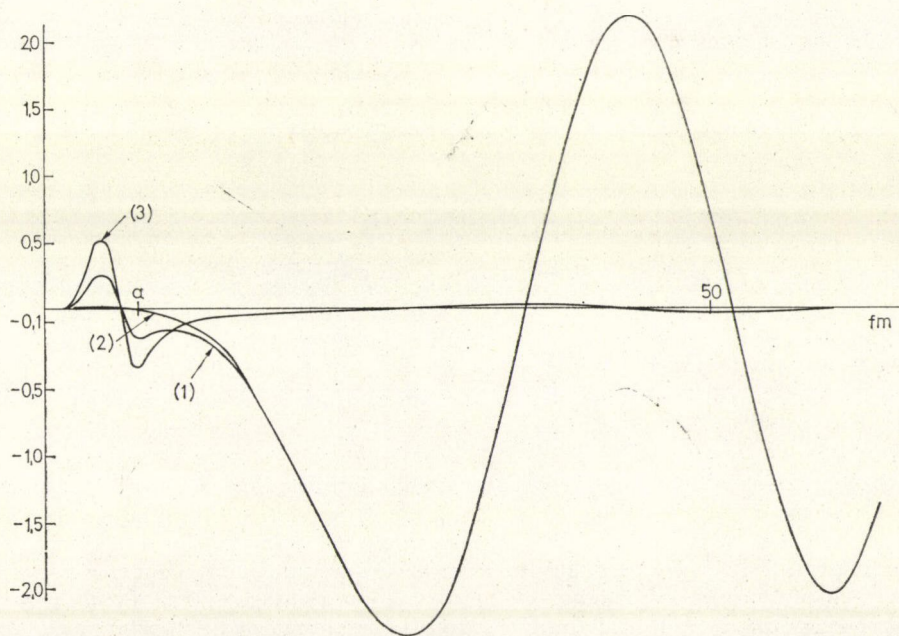
b) Weinberg megoldás

$$V(r) = \begin{cases} -\gamma V_0 & r < a \\ 0 & r > a. \end{cases}$$

A határfeltételek a fentiek, a γ komplex szám úgy van megválasztva, hogy az energia valós legyen és megegyezzen a Gamow-sajátérték valós részével. Ez úgy is fogalmazható, hogy a potenciál komplexszé tételével az S -mátrix pólusát a valós ten-



3.8. ábra



3.9. ábra

gelyre töltük fel vagyis az állapot szélességét nullává tettük. Ezt egy kis pozitív képzetes potenciállal lehet elérni, ami mint a térben jelenlévő forrás állandóan pótolja a kifutó fluxust.

c) Rezonáns szórási megoldás:

$$V(r) = \begin{cases} -hV_0 & r < a \\ 0 & r > a. \end{cases}$$

Határfeltételek:

$$u_l(0) = 0$$

$$u_l(r) \sim h_l^{(-)}(kr) + S_l h_l^{(+)}(kr) \quad \text{ha } r \rightarrow \infty.$$

A h pozitív valós paraméter úgy választandó meg, hogy a hullámfüggvény külső amplitúdójának a belsőhöz való viszonya minimális legyen, vagyis a részecske magban tartózkodásának valószínűsége maximális legyen.

A 3.8., illetve 3.9. ábra egy tipikus példán mutatja be a sajátfüggvények valós, illetve képzetes részét. A példában $l=4$, $a=7$ fermi, $V_0=44,5$ MeV. Ezek az adatok egy $\mathcal{E}^{SP}=(1,073-i/2 \cdot 5,2 \times 10^{-3})$ MeV energiájú Gamow-állapotot szolgáltattak. Ugyanezen adatok $h=1$ mellett minimális külső amplitúdó/belső amplitúdó viszonyt adtak az 1,073 MeV-os energiához tartozó szórási függvényre. Ugyanehhez az energiához $\gamma = 1 + 6 \times 10^{-7} - i 8,1 \times 10^{-5}$ szolgáltatta a Weinberg-megoldást. A 3.8. ábra egyetlen görbéje jelenti mindhárom megoldás valós részét: azok egymástól nem különböztethetők meg. A 3.9. ábra 1 jelű görbéje a Gamow-, 2 jelű görbéje a Weinberg-, 3 jelű görbéje a szórási megoldás képzetes része. Látható, hogy a pólusmegoldásoknak a potenciál sugarán kívül a valós amplitúdóval megegyező nagyságú képzetes amplitúdója van, míg a szórási megoldás képzetes része elenyésző. Mindebből arra lehet következtetni, hogy olyan jelenségek, amelyeknek leírásában a magsugáron kívüli tartomány jelentős szerepet kap, megkülönböztethetők a szórási és pólusmegoldásokat. A pólusmegoldások egymással közel egyenértékűek.

4. Összefoglalás

Az e dolgozatban ismertetett eredmények a (2.26) teljes rendszer elemeit tartalmazó általánosított belső szorzat sok jó tulajdonságára rávilágítanak.

Általánosan igazolódott, hogy a regularizálás különböző konvergenciafaktorokkal és analitikus folytatással is ugyanarra az eredményre vezet. Így a Gamow-függvények normálásával, ortogonalitásával, a Gamow-függvényeket is tartalmazó teljes rendszerrel kapcsolatos matematikai problémák kielégítő módon megoldottnak tekinthetők.

Az általánosításban a mátrixelem szerkezete a döntő, ez pedig olyan, hogy a mérhető fizikai mennyiségekre (átlagérték, hatáskeresztmetszet, stb.) általában komplex értékek adódnak. A tárgyalt modellszámítás eredménye támogatja azt a kézenfekvő elgondolást, hogy a valós rész tekintendő a fizikai mennyiség értékének, a képzetes rész az állapot bomlékonyságából származó bizonytalanságot méri. Példánkban a Gamow-állapotok és kötött állapotok közötti korrespondenciát sikerült kimutatni és útmutatást nyertünk egy általánosabb bizonyítás irányára is. Példánk szerint az

általánosított átlagérték keskeny rezonanciák esetére minden józan fizikai várakozást kielégít.

Többtestfeladatokban, mint az izobár analóg rezonanciák paramétereinek kiszámítására adott módszer mutatja, a Gamow-állapotok szép sikerrel alkalmazhatók. Az izospin-formalizmus szellemével összhangban a töltéscicserélő operátorral összekapcsolt rendszerek negatív energiatartományba eső neutronjának és pozitív energiatartományba eső protonjának hullámfüggvényére azonos határfeltételt róva ki, igen egyszerű technikával az egzakt megoldással jól egyező eredményeket nyertünk.

Fentiekből levonva azt a következtetést, hogy a Gamow-állapotok a keskeny rezonanciáknak matematikailag jól kezelhető, fizikai szemléletünk számára is kielégítő, ráadásul hasznosan alkalmazható leírását adják, érdemesnek látszott megvizsgálni milyen viszonyban áll a Gamow-függvény a keskeny rezonanciák leírására alkalmazott más függvényekkel. Példánk tanulsága szerint a kiterjedten alkalmazott Weinberg-függvények a Gamow-függvényekhez igen hasonlóan viselkednek. További vizsgálatok érdekes tárgya lehet a Weinberg-függvények alkotta teljes rendszer és a (2.26) teljes rendszer közötti kapcsolat felderítése.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönetemet fejezem ki *Szalay Sándor* akadémikusnak, akitől előtanulmányaim és vizsgálataim során sok támogatást kaptam.

A dolgozat tárgyát képező problémák egy része *Zimányi Józseffel* folytatott közös munka kapcsán vetődött fel. Közreműködéséért, állandó érdeklődéséért és kritikai megjegyzéseiért ezúton is köszönetet mondok.

Köszönet illeti *Vertse Tamás*, *Lovas Rezső* és *Krisztinkovics Ferenc* munkatársaimat, valamint *Zimányi Józsefnét*, akik közreműködésükkel segítségemre voltak.

1. FÜGGELÉK

Ahhoz, hogy az

$$\int f(r) dr = A$$

létezése biztosítsa a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int g(\varepsilon, r) f(r) dr = A$$

összefüggés létezését, elegendő ha a

$$c(\varepsilon, r) = -\frac{d}{dr} g(\varepsilon, r)$$

eleget tesz a következő feltételeknek:

$$A) \int_0^{\infty} |c(\varepsilon, r)| dr < H \quad H \text{ független } \varepsilon\text{-tól}$$

$$B) \int_0^{\infty} c(\varepsilon, r) dr \rightarrow 1 \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (A.1.1.)$$

$$C) \int_0^Y c(\varepsilon, r) dr \rightarrow 0 \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ bármely véges } Y \text{ esetén.}$$

(Lásd [3] 61. old.)

Bizonyítjuk, hogy az $\exp[-\varepsilon z^n]$ konvergenciafaktor kielégíti (A. 1.1.)-et a 3.1. ábra C_3 görbéje mentén azaz $z = \varrho \exp[i\varphi]$ helyettesítésével. A $g(\bar{\varepsilon}, \varrho) = \exp[-\varepsilon e^{in\varphi} \varrho^n]$ konvergenciafaktort úgy tekinthetjük, mint egy komplex $\bar{\varepsilon}$ paraméterű konvergenciafaktort, azaz mintha a határértéket egy komplex síkbeli út mentén érnénk el. (Lásd [3] 76. old.)

$$\begin{aligned} \text{A) } \int_0^\infty \left| -\frac{d}{d\varrho} e^{-\bar{\varepsilon}\varrho^n} \right| d\varrho &= \int_0^\infty |n\varrho^{n-1} \bar{\varepsilon} e^{-\bar{\varepsilon}\varrho^n}| d\varrho < \\ < |\bar{\varepsilon}| \int_0^\infty n\varrho^{n-1} e^{-\varepsilon \cos n\varphi \varrho^n} d\varrho = \frac{\varepsilon}{\varepsilon \cos n\varphi} \int_0^\infty -\frac{d}{d\varrho} e^{-\varepsilon \cos n\varphi \varrho^n} d\varrho = \frac{1}{\cos n\varphi} \equiv H. \end{aligned}$$

H véges, ha $\varphi < \frac{1}{2}\pi/n$. A B) és C) feltételek nyilvánvalóan teljesülnek.

A 3.2. ábra C_3 görbéjére a bizonyítás hosszadalmasabb, de teljesen egyenes.

$$z = R + \varrho \exp[i\varphi] = (R^2 + R\varrho \cos \varphi + \varrho^2)^{\frac{1}{2}} \exp[i\psi],$$

$$\psi = \arctan(\varrho \sin \varphi / (R + \varrho \cos \varphi))$$

helyettesítésével a fenti eljárás az

$$\exp[-\varepsilon z^n] = \exp[-\bar{\varepsilon}(R^2 + 2R\varrho \cos \varphi + \varrho^2)^{\frac{1}{2}n}]$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \exp[in\psi]$$

konvergenciafaktorra megismételhető, és

$H = (1 + \tan \varphi) / \cos n\varphi$ -t szolgáltat, amely véges, ha $\varphi < \frac{1}{2}\pi/n$. B) és C) is teljesülnek.

2. FÜGGELÉK

A (3.13) képletben szereplő N_l és $Q_l^j(k_j)$ mennyiségek az alábbi formulákkal adhatók meg:

$$N_l^2 = \sum_{j=1}^5 \frac{c_j}{2k_j} [x(U_l^j(x)^2 - U_{l-1}^j(x)U_{l+1}^j(x))]_{v_j}^{w_j}, \quad (\text{A.2.1})$$

$$\begin{aligned} 2lQ_{l+1}^j(k_j) &= s_j \{ (2l+1)Q_l^j(k_j) - Q_{l-1}^j(k_j) + \\ &+ \frac{c_j}{2k_j} (2l+1)^2 [x(U_l^j(x)^2 - U_{l-1}^j(x)U_{l+1}^j(x))]_{v_j}^{w_j} - \\ &- \frac{c_j}{k_j} (2l+1) [x^2 U_l^j(x) U_{l+1}^j(x)]_{v_j}^{w_j} \}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

$j=1, 2$ vagy 3 esetén

$$\begin{aligned} Q_l^j(k_j) &= \frac{c_j}{k_j^3} \left[\frac{x^3}{6} + p_j \left(\frac{x}{4} \cos 2x + \frac{\sin 2x}{4} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \right) \right]_{v_j}^{w_j}, \\ Q_l^1(k_j) &= \frac{c_j}{k_j^3} \left[\frac{x^3}{6} + p_j \left(\frac{3x}{4} \cos 2x + \frac{\sin 2x}{4} \left(x^2 - \frac{5}{2} \right) \right) + \frac{x}{2} \right]_{v_j}^{w_j}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.3a})$$

$j=4$ vagy 5 esetén

$$\begin{aligned} Q_0^j(k_j) &= -\frac{c_j}{2ik_j^3} \left[\left(x^2 + ix - \frac{1}{2} \right) e^{2ix} \right]_{v_j}^{w_j}, \\ Q_1^j(k_j) &= \frac{c_j}{2ik_j^3} \left[\left(x^3 + 3ix - \frac{5}{2} \right) e^{2ix} \right]_{v_j}^{w_j}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.3b})$$

A jelöléseket az A. 2. 1 táblázat foglalja össze:

A.2.1. TÁBLÁZAT

j	$U_j^j(x)$	k_j	c_j	s_j	p_j	v_j	w_j
1	$F_1(x)$	κ_1	a_1^2	1	1	0	$\kappa_1 b$
2	$F_1(x)$	κ_2	$a_2^2 - ia_2 a_3$	1	1	$\kappa_2 b$	$\kappa_2 a$
3	$G_1(x)$	κ_2	$a_3^2 + ia_2 a_3$	1	-1	$\kappa_2 b$	$\kappa_2 a$
4	$O_1(x)$	κ_2	$ia_2 a_3$	1		$\kappa_2 b$	$\kappa_2 a$
5	$O_1(x)$	k	1	-1		ka	∞

3. FÜGGELÉK

Definiáljuk a projekciós operátorokat, amelyek a targetalapállapot + proton- és analógállapot + neutron-csatornára vetítenek!

$$P \equiv |\alpha_P(\tau)\psi_{T_0, T_0}\rangle\langle\psi_{T_0, T_0}\alpha_P(\tau)|$$

$$Q \equiv |\alpha_n(\tau)\psi_{T_0, T_0-1}\rangle\langle\psi_{T_0, T_0-1}\alpha_n(\tau)|.$$

A csatolt egyenletek

$$(E - PHP)P\Psi^{(+)} = (PHQ)Q\Psi^{(+)} \quad (\text{A.3.1})$$

$$(E - QHQ)Q\Psi^{(+)} = (QHP)P\Psi^{(+)} \quad (\text{A.3.2})$$

alakúak. Mivel a neutroncsatorna zárt (A. 3.2)-t formálisan megoldhatjuk:

$$Q\Psi^{(+)} = (E - QHQ)^{-1}(QHP)P\Psi^{(+)}. \quad (\text{A.3.3})$$

Így a rugalmas protonszórásra vonatkozó egyenlet:

$$(E - PHP)P\Psi^{(+)} = (PHQ)(E - QHQ)^{-1}(QHP)P\Psi^{(+)}. \quad (\text{A.3.4})$$

Ha $P\chi^{(+)}$ -t (A. 3.1) homogén része definiálja:

$$(E - PHP)P\chi^{(+)} = 0, \quad (\text{A.3.5})$$

(A.3.4) formális megoldása

$$P\Psi^{(+)} = P\chi^{(+)} + \frac{1}{E^{(+)} - PHP} PHQ \frac{1}{E - QHQ - QHP \frac{1}{E^{(+)} - PHP} PHQ} QHP\chi^{(+)}. \quad (\text{A.3.6})$$

A rezonancia sajátértékek a

$$QHQ + QHP \frac{1}{E^+ - PHP} PHQ$$

operátor sajátértékei, amelyek az (A. 3.1) és (A.3.2) csatolt egyenletek mindkét csatornában tisztán kifutó hullámot szolgáltató megoldásai.

A rezonanciaenergiák kiszámítása jelentősen egyszerűsíthető a következő közelítéssel: adjunk a Hamilton-operátorhoz és vonjunk le belőle kisegítő potenciálokat v_n -t és v_p -t.

Legyen

$$PHP = P\bar{H}P - P v_p P$$

$$QHQ = Q\bar{H}Q - Q v_n Q,$$

ahol

$$\bar{H} = H + P v_p P + Q v_n Q.$$

Ezzel a csatolt egyenletek a

$$(\mathcal{E}_\lambda - P\bar{H}P)P\Phi_\lambda = (P v_p P)P\Phi_\lambda + (PHQ)Q\Phi_\lambda \quad (\text{A.3.7})$$

$$(\mathcal{E}_\lambda - Q\bar{H}Q)Q\Phi_\lambda = (Q v_n Q)Q\Phi_\lambda + (QHP)P\Phi_\lambda \quad (\text{A.3.8})$$

alakot öltik. A kisegítő potenciálok megválaszthatók úgy, hogy az érdekes energiatartományban a protoncsatornában egy komplex \mathcal{E}^{SP} energiájú $\varphi_p (\equiv |p\rangle)$ rezonancia legyen és a neutroncsatorna egy $-E_n$ energiájú $\varphi_n (\equiv |n\rangle)$ kötött állapotot tartalmazzon. Így

$$(\mathcal{E}_\lambda - PHP)^{-1} \cong \frac{|p\rangle\langle\bar{p}|}{\mathcal{E}_\lambda - \mathcal{E}^{SP}}$$

$$(\mathcal{E}_\lambda - Q\bar{H}Q)^{-1} \cong \frac{|n\rangle\langle n|}{\mathcal{E}_\lambda + E_n}$$

jó közelítés. Ez egyenértékű

$$\Phi_\lambda = a_p \varphi_p \alpha_p(\tau) \psi_{T_0, T_0} + a_n \varphi_n \alpha_n(\tau) \psi_{T_0, T_0-1}$$

feltételezésével és (A.3.7) és (A.3.8) megoldásával. Így a szórási függvény

$$P\Psi^{(+)} = P\chi^{(+)} + \frac{1}{E^{(+)} - PHP} PHQ |\Phi_\lambda\rangle (E - \mathcal{E}_\lambda)^{-1} \langle\Phi_\lambda| QHP |\chi^{(+)}\rangle \quad (\text{A.3.9})$$

alakú, míg a rugalmas szórási amplitúdó

$$\begin{aligned} T_{el} &= T_{el}^0 + \frac{\langle\chi^{(-)}| PHQ |\Phi_\lambda\rangle \langle\Phi_\lambda| QHP |\chi^{(+)}\rangle}{E - \mathcal{E}_\lambda} = \\ &= T_{el}^0 + S_{el}^0 \frac{\langle\chi^{(+)}| PHQ |\Phi_\lambda\rangle \langle\Phi_\lambda| QHP |\chi^{(+)}\rangle}{E - \mathcal{E}_\lambda} \end{aligned}$$

alakú lesz. S_{el}^0 az (A.3.5)-höz tartozó S -mátrix. Felhasználva az

$$S_{el} = 1 - 2\pi i T_{el}$$

összefüggést

$$S_{el} = S_{el}^0 \left(1 - i \frac{2\pi \langle \chi^{(+)} | PHQ | \Phi_\lambda \rangle \langle \Phi_\lambda | QHP | \chi^{(+)} \rangle}{E - \mathcal{E}_\lambda} \right)$$

adódik.

IRODALOM

I. Az irodalmi összefoglaláshoz felhasznált munkák

- L. Rosenfeld*, Proceedings of the International Conference on Elementary Particles, Kyoto, 1965. 182.
L. Rosenfeld, Spectroscopic and Group Theoretical Methods in Physics. Szerkesztő: F. Bloch
 North Holland Publishing Company, Amsterdam. 1968. 203.
T. Berggren, Nuclear Physics *A109*, 265, 1968.
T. Berggren, Physics Letters *33B*, 547, 1970.
L. A. Khalfin, Soviet Physics JETP *6*, 1053, 1958.

II. Az értekezésben ismertetett eredmények lényeges részei a következő publikációkban jelentek meg

- B. Gyarmati, T. Vertse*, On the Normalization of Gamow Functions, Nuclear Physics, *A160*, 523, 1971.
J. Zimányi, M. Zimányi, B. Gyarmati, T. Vertse, A Simple Description of Isobaric Analogue Resonances by the Aid of Resonant State Wave Functions, Acta Physica Hungarica *28*, 251, 1970.
B. Gyarmati, T. Vertse, J. Zimányi, M. Zimányi, Single-Particle Resonant-State Wave Functions in a Simple Description of Isobaric Analog Resonances, Physical Review *C1*, 1, 1970.
B. Gyarmati, F. Krisztinkovics, T. Vertse, On the Expectation Value in Gamow State, Physics Letters, *41B*, 110, 1972.
B. Gyarmati, T. Vertse, Easy Method for Calculating the Resonance Parameters of the Isobaric Analogue Resonance, Nuclear Physics, *A182*, 315, 1972.
B. Gyarmati, R. G. Lovas, J. Zimányi, Comparison of the Most Often Used Unbound State Wave Functions in a Square Well Model, Physics Letters *35B*, 549, 1971.

III. Hivatkozások

- T. Berggren*, Nuclear Physics *A109*, 265, 1968.
- W. J. Romo*, Nuclear Physics *A116*, 617, 1968.
- G. H. Hardy*: Divergent Series. Clarendon Press, Oxford 1949.
- P. M. Morse és H. Feshbach*: Methods of Theoretical Physics. McGraw Hill, 1953. 1574.
- Szalay A. Sándor*, Gamow-függvények normálása a komplex számsíkra való kiterjesztéssel. Diákköri dolgozat. 1971. Kézirat.
- Frank—Mises*: A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei. Műszaki Könyvkiadó Budapest 1966, 1109.
- H. M. Nussenzweig*, Nuclear Physics *11*, 499, 1959.
- Gazdy Béla*, Kvantummechanikai várható értékek számítása rezonanciaállapotban. Diploma-munka. Debrecen. 1970. Kézirat.
- F. Krisztinkovics*, ATOMKI Közlemények, *13*, 181, 1971.
- K. W. McVoy*, Fundamentals in Nuclear Theory. Lectures Presented at an International Course, Trieste. 1966. Szerkesztő: *A. De-Shalit, C. Villi*. International Atomic Energy Agency Vienna. 419.
- J. P. Bondorf, G. W. Bund*: Nuclear Physics *A127*, 481, 1969.

12. *J. Hüfner, C. M. Shakin*, *Annals of Physics* 52, 486, 1969.
13. *A. M. Nagarajan*: magánközlés 1971.
14. *Vertse Tamás*, A $^{208}\text{Pb} + \text{p}$ rendszer izobár analóg rezonanciáinak leírása Gamow-függvények felhasználásával. Egyetemi doktori értekezés. Debrecen. 1970. Kézirat.
15. *B. Buck és P. E. Hodgson*, *Phil. Mag.* 6, 1371, 1961.
16. *T. Tamura, C. E. Watson*, *Physics Letters* 25B, 186, 1967.
17. *J. Bang, J. Zimányi*, *Nuclear Physics* A139, 534, 1969.
18. *H. T. Fortune, C. M. Vincent*, *Physical Review*, 185, 185, 1969.
19. *D. H. Youngblood, R. L. Kozub*, *Physical Review Lett.* 26, 572, 1971.
20. *B. J. Cole, R. Huby, J. R. Mines*, *Physics Letters* 33B, 320, 1970.
21. *R. Huby*, *Physics Letters* 33B, 323, 1970.

AZ ÚJ KVANTUMMECHANIKA KONTINUUMELMÉLETI ELŐÁLLÍTÁSA*

LÁNCZOS KORNÉL

A *Heisenberg—Born—Jordan*-féle új kvantummechanikai elmélet igen szoros kapcsolatban áll az integrálegyenletek elméletével. A mozgásegyenletek a kvantálási feltétellel együtt integrálegyenletek alakjában írhatók fel. Ilymódon egy folytonos leírásmódra jutunk, amely egyenrangú a diszkrét leírással, mivel a kettő között létezik egy egyértelmű megfeleltetés. Az elmélet elvi értelmezése szempontjából az integrál-megfogalmazásnak megvan az az előnye, hogy közvetlenül kapcsolódik a fizikai terekre vonatkozó szokásos elképzelésekhez.

1. Bevezetés

A kvantumelméleti kutatásokban úttörő jelentőségük volt *Heisenberg* [1] mélyreható megfontolásainak. Az új eszmék következetes továbbfejlesztésével *Born*-nak és *Jordan*-nak [2] sikerült igen széles általánosítás keretében megadni a *Heisenberg*-féle koncepciók adekvát matematikai kifejezését és felfedni az új elmélet általános formai alapjait. Egy konzisztens diszkontinuum-elmélet született, amely a klasszikus fogalmakat csak korrespondenciaszerűen és csak mint heurisztikus útjelzőket használja, de amely kezdettől fogva a saját útját járja és a régi szimbolumoknak teljesen új értelmezést ad. Ezzel a kvantumelmélet elvi megalapozása soha nem sejtett mélységekig jutott.

Az alábbiakban szeretnénk megmutatni, hogy rendkívül egyszerű és szép összefüggés adható meg a *Heisenberg—Born—Jordan*-féle elmélet és az integrálegyenletek elmélete között. Látni fogjuk, hogy az előbbi minden eredménye integrálegyenletek alakjában is kifejezhető, s így olyan megfogalmazásra jutunk, amely az analitikus módszerekhez szokott fizikus számára kézenfekvőbbnek tűnhet, mint a mátrixábrázolás. Ezzel egyidejűleg egy kontinuumfelfogásra adódik lehetőség, amely a tények leírása tekintetében egyenrangú a diszkontinuum-felfogással, minthogy a két felfogás között egyértelmű megfeleltetés áll fenn. Ami azonban a tények értelmezését, vagyis a kvantumok tulajdonképpeni mibenlétét illeti, nincs kizárva, hogy az integrálmegfogalmazás többet mond a mátrixábrázolásnál, lévén hogy közvetlenül kapcsolódik a tér-elképzeléshez, sőt egyenesen arra épül, míg a diszkontinuum felfogástól a térfogalom nyilván távolodik.

A következő megfontolásokból indulunk ki. Legyen adva egy tetszőleges nagyságú, tetszőleges dimenziójú véges, zárt tartomány. A tartomány egy pontját, vagyis

* *Lánczos Kornél* professzor ez évben 80 esztendő. A Magyar Fizikai Folyóirat — a szerkesztők és az olvasók — szeretettel és tisztelettel köszönti a világhírű tudóst, hazánk szülöttét.

Magyar nyelven itt először megjelenő dolgozatában Lánczos Kornél elsőként fogalmazta meg a kvantummechanikát a kontinuumfelfogásnak megfelelően. Lánczos dolgozata (Zs. f. Phys. 35, 812, 1926; beérkezett: 1925. dec. 22.) több mint egy hónappal megelőzte Schrödinger első közleményét (Ann. d. Phys. 79, 361, 1926; beérkezett: 1926. jan. 27.). (A szerk.)

a pont koordinátáinak összességét röviden egyetlen betűvel, pl. „ s ”-sel jelöljük. Legyen ebben a tartományban adva egy nem-elfajult szimmetrikus $K(s, \sigma) = K(\sigma, s)$ maghoz tartozó $\varphi^i(s)$ sajátfüggvények teljes ortogonális rendszere.

Legyen mármost $f(s, \sigma)$ egy szakaszosan folytonos függvény, amely a tartomány két (s és σ) pontjától függ, tehát jellegében ú. n. „magfüggvény”. Ezt a függvényt σ rögzítésével s függvényének tekinthetjük és sorba fejthetjük a $\varphi^i(s)$ sajátfüggvények szerint. A kifejtési együtthatók ekkor függeni fognak még σ -tól és a következő alakú sorra jutunk:

$$f(s, \sigma) = \sum a_i(\sigma) \varphi^i(s). \quad (1)$$

Fejtsük most ki az $a_i(\sigma)$ függvényeket is a sajátfüggvények szerint:

$$a_i(\sigma) = \sum a_{ik} \varphi^k(\sigma). \quad (2)$$

Így függvényünkre a következő előállítást kapjuk:

$$f(s, \sigma) = \sum a_{ik} \varphi^i(s) \varphi^k(\sigma). \quad (3)$$

Az a_{ik} együtthatókat a tartományra vett kettős integrálok határozzák meg:

$$a_{ik} = \int f(s, \sigma) \varphi^i(s) \varphi^k(\sigma) ds d\sigma. \quad (4)$$

Az a_{ik} számokat egy végtelen kvadratikuss mátrix alakjába rendezhetjük el. Az \mathbf{a} mátrix az $f(s, \sigma)$ függvény teljesértékű reprezentációjának tekinthető, mivel a megadott a_{ik} mátrixelemekből az $f(s, \sigma)$ függvényt a (3) képlet alapján meg tudjuk konstruálni. Másrészt viszont az $f(s, \sigma)$ függvényt is felfoghatjuk az \mathbf{a} mátrix reprezentánsaként, mivel belőle a mátrixelemeket a (4) formula szerint közvetlenül ki tudjuk számítani.

2. A mátrixoperációknak megfelelő térintegrálok

A fentiek szerint a diszkrét mátrixok és a szakaszosan folytonos $f(s, \sigma)$ függvények között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Ebből kiindulva minden, az elméletben szerepet játszó mátrix-operációhoz is megfelelő függvényoperációt rendelhetünk úgy, amint az alábbi felsorolás mutatja.

a) *Mátrix átlósösszege.* Tekintsük a következő integrált:

$$\int f(s, s) ds = \sum a_{ik} \int \varphi^i(s) \varphi^k(s) ds = \sum a_{ii}. \quad (5)$$

Az átlósösszegnek tehát az egész vizsgált tartományra kiterjesztett

$$\int f(s, s) ds \quad (6)$$

térintegrál felel meg.

b) *Két mátrix szorzata.* Az $f(s, \sigma)$ és $g(s, \sigma)$ függvényből képezzük integrálással a következő függvényt:

$$h(s, \sigma) = \int f(s, \tau) g(\tau, \sigma) d\tau. \quad (7)$$

Ezt a két függvény „térszorzatának” nevezzük és a

$$h(s, \sigma) = fg(s, \sigma) \quad (8)$$

alakban írjuk. Fennáll, hogy

$$h(s, \sigma) = \sum a_{ik} b_{mn} \varphi^i(s) \varphi^n(\sigma) \int \varphi^k(\tau) \varphi^m(\tau) d\tau = \sum a_{im} b_{mk} \varphi^i(s) \varphi^k(\sigma), \quad (9)$$

tehát

$$c_{ik} = \sum_m a_{im} b_{mk}. \quad (10)$$

A szorzatfüggvény mátrixa tehát valóban megegyezik a tényezők mátrixának szorzatával.

c) *Szimbólikus differenciálás.* Legyen adva egy tetszőleges sok tényezőből álló térszorzat:

$$P(s, \sigma) = (pqr \dots uv)(s, \sigma). \quad (11)$$

Írjuk fel ezzel az

$$\int P(s, s) ds = \int p(s, \alpha) q(\alpha, \beta) \dots u(\lambda, \mu) v(\mu, s) ds d\alpha d\beta \dots d\lambda d\mu \quad (12)$$

integrált. Mivel a zárójeles mennyiségek sorának első és utolsó betűje megegyezik, a tényezőket képzeletben egy kör mentén rendezhetjük el és közben lényegtelen, hogy a sorrend melyik tényezővel kezdődik. Írhatjuk például:

$$\int (pqrt \dots uv)(s, s) ds = \int (rt \dots uvpq)(s, s) ds. \quad (13)$$

Vizsgáljuk ezek után a fenti integrál megváltozását, amikor az egyik függvényt — pl. $r-t$ variáljuk:

$$\delta \int P(s, s) ds = \int \delta r(s, \tau) (t \dots uvpq)(\tau, s) ds. \quad (14)$$

Az integrálnak az r függvény variációjával kapcsolatos megváltozását

$$\delta \int P(s, s) ds = \int \left(\delta r \frac{\partial P}{\partial r} \right) (s, s) ds \quad (15)$$

alakban írva az így bevezetett $\frac{\partial P}{\partial r}$ mennyiséget (14) alapján a

$$\frac{\partial P}{\partial r}(s, \sigma) = (t \dots uvpq)(s, \sigma) \quad (16)$$

összefüggés adja meg. Ha több tényező megegyezik, mindegyikre képezzük a megfelelő szorzatot és összegezzünk.

Ha a differenciálhányados képzésének törvényét összehasonlítjuk a *Born* és *Jordan* által a megfelelő mátrixokra adott szabállyal (I. fejr. 2 §.), láthatjuk, hogy a megegyezés teljes.

d) Az „*időderiválás*”. A dinamikai rendszert jellemző \mathbf{p} és \mathbf{q} mátrixokat *Born* és *Jordan* eredetileg (I. II. fejr., 3. §) az idő függvényének tekintti, oly módon, hogy minden mátrixelem az $e^{2\pi i \nu_{ik} t}$ kifejezéssel szorzódik. Egy következetesen véghezvitt diszkontinuum-elméletben nyilván nem célszerű folytonos paramétert és tőle folytonosan függő függvényeket bevezetni. Ténylegesen az elmélet további felépítésében ez az időfüggés semmi szerepet nem játszik és bevezetésére csak azért van szükség, hogy a *Hamilton*-féle mozgásegyenletek baloldalát „időderiváltként” lehessen értelmezni. A valóságban azonban ezek a „mozgásegyenletek” nem írják le „mozgást” a szónak abban az értelmében, hogy valamilyen mennyiség időfüggését kellene meghatározni — csupán meghatározó egyenleteket adnak két mátrixra, melynek elemei pusztán számok kell, hogy legyenek. Ezért nem célszerű kezdettől fogva „időfüggésről” beszélni; következetesebbnek látszik, ha a mátrixhoz az „időderiváltját” *definíciószerűen*

rendeljük hozzá. Ennek megfelelően az „időderivált” helyett — a ponttal való jelölésre utalva — a továbbiakban inkább a „pontosított mátrix” kifejezést használjuk. A \dot{a} „pontosított mátrix” úgy áll elő, hogy a mátrix a_{ik} elemét v_{ik} -val szorozzuk, ahol a v_{ik} mennyiségek a kvantumelméleti frekvenciák. *Born* és *Jordan* tárgyalásában ezekhez még egy $2\pi i$ tényező járul (1. a (31) egyenletet), ami azonban csak a kényelmetlen és fölösleges imaginárius mennyiségek fellépésére vezet, anélkül, hogy erre belső szükség-szerűség állna fenn. Amikor a $2\pi i$ faktort elhagyjuk, a pontosítással tulajdonképpen nem a t , hanem a $2\pi i t$ szerinti deriválást definiáljuk.

Mármost, mivel a v_{ik} számok két term különbségeként állíthatók elő.

$$v_{ik} = \frac{W_i}{h} - \frac{W_k}{h}, \quad (17)$$

látjuk, hogy a pontosított mátrix két mátrix különbsége, ahol az elsőben az i -ik sor elemei $\frac{W_i}{h}$ -val, a másodikban a k -ik oszlop elemei $\frac{W_k}{h}$ -val vannak szorozva. Kérdés: mi felel meg ennek az operációnak a függvényábrázolásban?

Képezzük az $f(s, \sigma)$ függvényből és a $\varphi^i(s)$ sajátfüggvényekhez tartozó szimmetrikus $K(s, \sigma)$ magból¹ a következő szorzatot:

$$\int f(s, \tau) K(\tau, \sigma) d\tau = \sum a_{ik} \varphi^i(s) \int \varphi^k(\tau) K(\tau, \sigma) d\tau = \sum \frac{a_{ik}}{\lambda_k} \varphi^i(s) \varphi^k(\sigma). \quad (18)$$

A tényezőket fordított sorrendben véve:

$$\int K(s, \tau) f(\tau, \sigma) d\tau = \sum \frac{a_{ik}}{\lambda_i} \varphi^i(s) \varphi^k(\sigma). \quad (19)$$

Látjuk innen, hogy egy függvény „pontosítása” a következő operációt jelenti:

$$\dot{f}(s, \sigma) = (Kf - fK)(s, \sigma). \quad (20)$$

A „pontosítás” tehát nem önálló operáció, hanem szorzásra vezethető vissza, amikor is tényezőként egy $K(s, \sigma)$ szimmetrikus mag lép fel². Innen közvetlenül adódik az alábbi összefüggés a λ_i „sajátértékek” és a W_i energiaszintek között:

$$\frac{1}{\lambda_i} = \frac{W_i}{h}. \quad (21)$$

¹ A szimmetriakövetelménytől el is tekinthetünk. Lásd a nem-szimmetrikus magokra való általánosítást a „Kiegészítés” I. pontjában.

² Az $f(s, \sigma)$ függvény definíciójául választott (20) egyenlet megfelel *Born* és *Jordan* dolgozatában a (41) egyenletnek (l. a 872 o.), ha az ott bevezetett „normált” $H(p, q)(s, \sigma)$ *Hamilton-függvényt* $hK(s, \sigma)$ -val azonosítjuk. (A $2\pi i$ tényező eszik, mivel ezt már belevettük f definíciójába). Valóban, a H mátrix diagonális, a w_i diagonális elemekkel. Összehasonlítva ezt a mátrixot a $K(s, \sigma)$ mag mátrixával (bilineáris formula!) és figyelembe véve a (21) egyenletet, tényleg látjuk, hogy fennáll a

$$H = hK$$

összefüggés. Ezt az összefüggést közvetlenül felhasználhatjuk a „normált” *Hamilton-függvény* definíciójára: „Minden adott $H^*(p, q)(s, \sigma)$ *Hamilton-függvényhez* található egy olyan $H(p, q)(s, \sigma)$ *Hamilton-függvény*, amely a h tényező erejéig megegyezik a $K(s, \sigma)$ maggal, ha benne p és q helyére a mozgásegyenleteket és a kvantálási feltételt kielégítő függvényeket írunk.”

A h -val osztott W_i energiaszintek tehát a $K(s, \sigma)$ szimmetrikus mag sajátértékeinek reciprokai³.

Miután az összes elemi mátrixoperáció megfelelőjét megadtuk az integrálrepresentációban — mint látjuk, minden esetben egy térintegrál lép fel — közvetlenül ráteherhetünk a dinamikai alapegyenletek felállítására.

3. A dinamikai alapegyenletek mint integrálegyenletek

Mivel a „mozgásegyenletek” a mátrixleírásban egy variációs elvből következnek, ugyanúgy kell adódniuk a megfelelő $p(s, \sigma)$ és $q(s, \sigma)$ függvényeket meghatározó egyenleteknek is. Legyen adva egy

$$H(p, q)(s, \sigma) \quad (22)$$

„Hamilton-függvény”, és írjuk fel a

$$p\dot{q}(s, \sigma) - H(p, q)(s, \sigma) \quad (23)$$

függvényt, amely (20) alapján a

$$(pKq - pqK)(s, \sigma) - H(p, q)(s, \sigma) \quad (24)$$

alakot ölti. Képezzük ezzel τ -re

$$I = \int (pKq - pqK - H(p, q))(s, s) ds \quad (25)$$

térintegrált és követeljük meg, hogy az integrálnak a $p(s, \sigma)$ és $q(s, \sigma)$ szabad variálásánál extrémuma legyen, vagyis

$$\delta I = 0 \quad (26)$$

legyen minden δp -re és δq -ra.

Variáljuk először a p függvényt. Ekkor

$$\delta I = \int \delta p(s, \tau) \left(Kq - qK - \frac{\partial H}{\partial p} \right) (\tau, s) d\tau. \quad (27)$$

Variáljuk ezután a q függvényt. Az első két tagban ciklikus felcserélést végrehajtva kapjuk:

$$\delta I = \int \delta q(s, \tau) \left(pK - Kp - \frac{\partial H}{\partial q} \right) (\tau, s) d\tau. \quad (28)$$

Ahhoz, hogy δI tetszőleges δp -re és δq -ra eltűnjék, nyilvánvalóan azonosan el kell tűnniük az utóbbiak mellett álló tényezőknek az integráljel alatt, így a $p(s, \sigma)$ és $q(s, \sigma)$ függvények meghatározására az alábbi integrálegyenleteket kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} (Kq - qK)(s, \sigma) &= \frac{\partial H}{\partial p}(s, \sigma), \\ (Kp - pK)(s, \sigma) &= -\frac{\partial H}{\partial q}(s, \sigma). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

³ A (21) egyenlet jobboldalához voltaképpen még hozzá kellene adnunk egy tetszőleges állandót. A W_i energiaszinteket azonban, amelyek csak egy additív konstans erejéig vannak meghatározva, mindig normálhatjuk úgy, hogy ez az állandó 0 legyen.

4. A kvantálási feltétel

A dinamikai alapegyenletek mellett az új elmélet másik lényeges alkotó eleme a kvantálási feltétel. Ez *Born* és *Jordan* szerint (1. a (38) egyenletet a 871. oldalon) a következőképp hangzik:

$$pq - qp = \frac{1}{2\pi i} \mathbf{1}.$$

Hogy ezt integrális alakra hozzuk, az $\mathbf{1}$ egységmátrixnak megfelelő $E(s, \sigma)$ függvényt kell megadnunk. Az egységmátrix főátlójában csupa 1 áll, minden elem a főátlón kívül 0, így az

$$E(s, \sigma) = \sum \varphi^i(s) \varphi^i(\sigma) \quad (30)$$

függvényt rendeljük hozzá. Ez az úgynevezett „egységmag”.

A *Born—Jordan*-féle kvantálási feltételnek tehát esetünkben a következő integrálegyenlet felel meg:

$$(pq - qp)(s, \sigma) = hE(s, \sigma). \quad (31)$$

(A $2\pi i$ tényezőtől már a „pontozott” függvény definíciójánál megszabadultunk.)

Az itt szereplő egységmag különleges viselkedést mutat. Mindenütt eltűnik, ahol $\sigma \neq s$, és a $\sigma = s$ pontban végtelenné válik mégpedig úgy, hogy

$$\lim_{\varepsilon=0} \int E(s, s+\varepsilon) d\varepsilon = 1. \quad (32)$$

A $pq - qp$ függvényre tehát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (pq - qp)(s, \sigma) &= 0, & \text{ha } \sigma \neq s, \\ &= \infty, & \text{ha } \sigma = s. \end{aligned} \quad (33)$$

Innen kitűnik, hogy a p és q függvények nem lehetnek az egész tartományban mindenütt végesek, különben a pq és qp szorzatok is mindenütt végesek lennének; így a következő érdekes következtetés adódik: *Ha megköveteljük, hogy a $p(s, \sigma)$ és a $q(s, \sigma)$ függvény mindenütt véges maradjon, akkor a Born—Jordan-féle kvantálási feltétel nem teljesülhet teljes pontossággal, csak tetszőleges jó közelítésben.*

A (31) egyenletet ugyanis gyakorlatilag ekvivalens módon a következő feltétellel helyettesíthetjük. A $(pq - qp)(s, \sigma)$ függvényt rögzített s mellett a σ pont függvényében tekintjük és megköveteljük, hogy a kérdéses függvény valamely az s pont körül igen kicsiny gömb belsejét kivéve az egész tartományban tűnjön el. A kis gömb belsejében a függvény legyen állandó, éspedig h/ε , ha ε a gömb térfogata. Ilyen megfogalmazásban a *Born—Jordan*-féle kvantálási feltétel csak közelítőleg teljesül, de ugyanakkor a p és q függvénynek sehol sem kell végtelenné válnia.⁴

Egyébként az „éles” *Born—Jordan*-féle kvantálási feltételt is kimondhatjuk olyan alakban, amely megkerüli az egységmag szinguláris viselkedésével járó problémát. E célból az egyenletet megszorozzuk a $K(s, \sigma)$ maggal és a kvantálási feltételt az alábbi integrálegyenlet alakjában kapjuk:

$$(Kpq - Kqp)(s, \sigma) = hK(s, \sigma). \quad (34)$$

⁴ L. viszont a kvantálási feltétel egy másik nehézségével kapcsolatban a „Kiegészítés” II. pontját.

5. A térábrázolás és a mátrixábrázolás egybevetése

A mátrixok és az itt bevezetett ábrázolásban fellépő magfüggvények közötti kölcsönösen egyértelmű kapcsolat következtében a problémák formális tárgyalásánál teljesen mindegy, hogy az alapegyenleteket integrálegyenletek alakjában írjuk-e fel, mint itt tettük, vagy pedig a kifejtési együtthatókból indulunk ki és a megfelelő mátrixegyenleteket használjuk. A matematikai probléma természete szerint egyik vagy másik ábrázolás lehet előnyös. Mindazonáltal a kvantumproblémák természete szempontjából bizonyos tekintetben lényeges különbséget figyelhetünk meg a két felfogás között. A mátrixábrázolásban a problémát egy konkrét *Hamilton-függvény* megadása teljesen meghatározza. Ez elegendő a \mathbf{p} és \mathbf{q} mátrixok kiszámításához, amelyekhez hozzájönnek még W_i mennyiségek. De ez utóbbiakat is lerögzíthetjük ha figyelembe vesszük a kvantálási feltételeket. A függvényábrázolásban ugyancsak egy *Hamilton-elvből*, mint hatáselemből indulhattunk ki. Itt azonban a *Hamilton-függvényen* kívül még egy szimmetrikus $K(s, \sigma)$ magnak is lényeges szerep jut. Ez a mag *kívülről* kerül a problémába; a *Hamilton-elv* és a belőle származó dinamikai egyenletek csak a variációnál ismeretlennek számító p és q függvények meghatározására alkalmasak, a $K(s, \sigma)$ magnak eleve adottnak kell lennie. Esetükben a probléma tehát csak akkor válik meghatározottá, ha a *Hamilton-függvény* alakján kívül még a $K(s, \sigma)$ magot is megadjuk. A mátrixfelfogás szempontjából csupán ezen mag sajátértékei játszanak szerepet, a vele kapcsolatos ortogonális sajátfüggvény-rendszer teljesen határozatlan marad. Mindez a kapott integrálegyenleteknek azzal a tulajdonságával függ össze, hogy invariánsak maradnak, ha — a sajátértékek megváltoztatása nélkül — új magot vezetünk be, más sajátfüggvényekkel, és az új magnak megfelelő p és q függvényeket a korábbi kifejtési együtthatókból a (3) egyenlet alapján az új sajátfüggvényekkel konstruáljuk meg. A $\varphi^i(s)$ ortogonális függvényrendszert bizonyos értelemben a mag „koordinátáinak” tekintve azt mondhatjuk, hogy egyenleteink tetszőleges „ortogonális koordinátatranszformációval” szemben invariánsak maradnak. A mátrixegyenletek alapján tehát soha nem mondhatunk semmit a konstrukcióhoz használt $\varphi^i(s)$ függvényekről.

Innen a kétféle felfogás elvi értékelése szempontjából a következő kép adódik. Ha a fizikai tények természete olyan, hogy belőlük mindig csak a mátrixelemekre lehet következtetni, akkor a mátrixábrázolás részesítendő előnyben (legalábbis pozitivista álláspontra helyezkedve!) mivel a tények leírására nem vezet be elvileg hozzáférhetetlen elemeket. Másképp áll a helyzet, ha a magnak fizikai jelentés tulajdonítható. Ebben az esetben a térábrázolást kell inkább adekvátnak tekintenünk, minthogy a mátrixábrázolás, mivel csak a mag sajátértékeit képes megadni és a sajátfüggvények rendszerét határozatlanul hagyja, annál kevesebbet mond. Amennyiben a második alternatíva valósul meg, kell, hogy a mag valamilyen módon — pl. egy differenciálegyenlet által — már eleve adva legyen. Ekkor azonban ez nemcsak a sajátfüggvényeire, hanem sajátértékeire is vonatkozik. A dinamikai egyenletek csak a p és q függvények meghatározására szolgálnának, amivel a probléma már teljesen meg is lenne oldva. A megoldások behelyettesítése a kvantálási feltételbe csupán azonosságra vezetne. Ebben a felfogásban a kvantálási feltétel nem a dinamikai egyenletek mellékes kiegészítője, hanem bizonyos tekintetben a *mag egy belső tulajdonságaként* jelenik meg. Lényegében pusztán a sajátértékek egy olyan tulajdonságáról van szó, amelynek alapján ez az összefüggés a kiszámításukra is felhasználható, bár ők maguk egész más, egyelőre ismeretlen oldalukról vannak definiálva.

Hogy ez a felfogás nem jogosult, azt a következő módon világíthatjuk meg. A „mozgásegyenletek” kétszeresen végtelen sokaságot alkotnak a \mathbf{p} és \mathbf{q} mátrixok meghatározására, megfelelően annak, hogy ezeknek a mátrixoknak ∞^2 elemük van. Az egyenletekben fellépnek a λ_i sajátértékek (vagy a velük szoros kapcsolatban álló W_i mennyiségek) is, melyek *egyszeresen* végtelen számsorozatot alkotnak. Így a p_{ik} és q_{ik} mátrixelemeket mint a λ_i -k függvényeit kapjuk meg. Ekkor vesszük elő a kvantálási feltételt a λ_i mennyiségek meghatározására. És valóban, a kvantálási feltétel csak egy *egyszeresen* végtelen egyenletsorozatot jelent, mivel a $\mathbf{pq} - \mathbf{qp}$ mátrix már a mozgásegyenletek folytán diagonális és a kvantálási feltétel csupán a diagonális tagok értékét rögzíti.

Az új mechanika tér-megfogalmazásában egy skaláris térintegrál jelenik meg mint legfőbb hatáselv, és ebben a vonatkozásban teljesen megfelel annak, amit minden térelméletben megszoktunk. A $K(s, \sigma)$ magfüggvény sem tekinthető olyan elvileg új jelenségnek, amelyre ne lehetne természetes értelmezést találni. Gondoljunk pl. arra az esetre, amikor a töltés ill. az áramsűrűség eloszlását elektromágneses térben egy hatáselvből határozzuk meg, amelybe még az elektromágneses vektorpotenciál is belemegy. Ekkor ezt a potenciált egy szimmetrikus mag segítségével kell előállítanunk a töltéseloszlásból, mint forrásból. A magot magát a vektorpotenciált a töltéseloszlással összekötő *téregyenletek* alapján konstruáljuk meg. — A szerzőnek az általános relativitáselmélet hatáselvére vonatkozó egyik vizsgálatában [3] ugyancsak fellép egy szimmetrikus mag. Ha ugyanis a tér tulajdonképpeni forrásának az anyagot tekintjük, akkor a görbületi tenzor komponensei lesznek a primér módon variálandó függvények, és a g_{ik} metrikus alaptensor variációját az R_{ik} -k variációjára kell visszavezetnünk, ismét csak egy forrást tartalmazó térintegrál segítségével. A magfüggvényt itt is a téregyenletek határozzák meg.

Persze ez utóbbi esetben nem egy skalár, hanem egy „tenzor-mag” lép fel, amely a vizsgált tartomány s és σ pontjától tenzoriálisan függ. Hasonlóképpen az elektromágneses problémában egy „vektor-mag” játszik szerepet. Az itt vázolt elmélet határai azonban annyira tágak, hogy a formalizmus közvetlenül kiterjeszthető vektoriális vagy tetszőleges tenzoriális magokra is. Ekkor a keresett p és q függvények is megfelelő típusú magokat jelentenek.

Vegyük pl. egy vektormag esetét. Jelöljük ezt $K_\alpha(s, \sigma)_\beta$ -val ahol az α index az s , a β index a σ ponthoz tartozik, utalva arra, hogy a függés mindkét ponttól vektoriális. A szimmetriafeltétel most:

$$K_\alpha(s, \sigma)_\beta = K_\beta(\sigma, s)_\alpha. \quad (35)$$

Egy ilyen maghoz egy végtelen „sajátvektor”-rendszer tartozik, amely szerint tetszőleges $f_\alpha(s, \sigma)_\beta$ „vektormagfüggvény” kifejezhető, a (3) egyenlettel analóg következő előállításnak megfelelően:

$$f_\alpha(s, \sigma)_\beta = \sum a_{ik} \varphi^i(s)_\alpha \varphi^k(\sigma)_\beta. \quad (36)$$

(A sajátvektorokra a $\varphi^i(s)_\alpha$ jelölést alkalmaztuk.) A mátrixok és a magfüggvények között itt is egyértelmű a hozzárendelés. Az „átlós összegnek” most az alábbi térintegrál felel meg:

$$\int f_\mu(s, s)_\nu g^{\mu\nu} ds, \quad (37)$$

ahol g_{ik} a metrikus alaptensor és a μ és ν indexekre összegezni kell. Két függvény „tér-szorzatát” a következő módon képezzük:

$$h_\alpha(s, \sigma)_\beta = \int f_\alpha(s, \tau)_\mu g_\nu(\tau, \sigma)_\beta g^{\mu\nu} d\tau. \quad (38)$$

A kvantálási feltétel és a dinamikai egyenletek most is integrálegyenletek alakjában adódnak, de ezek most a „vektorális” vagy általánosabban a „tenzoriális integrálegyenletek” osztályába tartoznak, melyeket a szerző egy más alkalommal vizsgált részletesebben [4]. Az általános elmélet tehát minden nehézség nélkül kitejeshető vektor- vagy tenzorterekre is.

Ami az új elméletben sajátosnak tűnik, és megszokott elképzeléseinktől eltér, az az a körülmény, hogy a hatáselv alapján meghatározandó függvények nem a megszokott értelemben vett függvények, hanem úgynevezett „magfüggvények”, amelyek a vizsgált tartomány két pontjától függenek. Hogy ez fizikailag miként értelmezhető, arról egyelőre semmit sem mondhatunk⁵ s csak a probléma további vizsgálata nyújthat közelebbi felvilágosítást az egyelőre teljesen formális elmélet és a jelenségek világa közötti kapcsolatról. Mindenesetre abból, hogy az egész elmélet teljes összhangba hozható a terekről alkotott elképzeléseinkkel, joggal következtethetünk talán arra, hogy a klasszikus nézeteken a kvantumprobléma megértése érdekében végrehajtandó módosítások egész más irányban találhatók, semmint hogy a kontinuum és a diszkontinuum közti ellentmondással lennének jellemezhetőek, és hogy a kvantumdilemma megoldásának aligha van köze a geometria és az infinitézimális mennyiségekkel való számolás kvantumos átértelmezéséhez.

Kiegészítés a korrektúránál

I. Általánosított összefüggés a mátrixok és a magfüggvények között. Az a mátrix és az $f(s, \sigma)$ magfüggvény közötti összefüggést egy $\varphi^i(s)$ ortogonális függvényrendszer segítségével adtuk meg a (3) formula alapján. Az elmélet azonban lényeges általánosítást tesz lehetővé, amely alkalmasnak látszik arra, hogy mélyebb bepillantást nyerjünk a viszonyokba, és ezenkívül megvan az az előnye, hogy megszünteti a szimmetrikus magok kitüntetett voltát, ill. hogy lehetővé teszi ezek speciális tulajdonságainak általános magokra való átvitelét.

A $\varphi^i(s)$ függvényrendszer mellett tekintsünk egy másik, $\psi_i(s)$ rendszert is. (Később látni fogjuk, miért célszerű az i indexet egyszer felülre, egyszer alulra írni.) Jelöljük az a mátrix elemeit a_i^k -val és definiáljuk a hozzárendelt $f(s, \sigma)$ függvényt a következő módon:

$$f(s, \sigma) = \sum a_i^k \varphi^i(s) \psi_k(\sigma). \quad (39)$$

A $\varphi^i(s)$ és $\psi_i(s)$ függvényeknek most nem kell egymás között ortogonálisnak lenniük. Hogy azonban a mátrixoperációknak most is a fentebb megadott térintegrálok feleljenek meg (1. a 2. fejezetet), a két függvényrendszernek az alábbi módon kell „csatlódnia”:

$$\left. \begin{aligned} \int \varphi^i(s) \psi_k(s) ds &= 0 \quad (i \neq k), \\ \int \varphi^i(s) \psi_i(s) ds &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

⁵ Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a $p(s, \sigma)$ és $q(s, \sigma)$ magfüggvények a dinamikai rendszerhez mint a lehetséges állapotok összességéhez vannak rendelve, míg egy adott valódi kvantumállapot a szokásos $p_i(s)$ és $q_i(s)$ térfüggvényekkel jellemezhető; ez utóbbiak a $p(s, \sigma)$ és $q(s, \sigma)$ magokból a következő térintegrálok segítségével állnak elő:

$$\begin{aligned} p_i(s) &= \int p(s, \sigma) \varphi^i(\sigma) d\sigma, \\ q_i(s) &= \int q(s, \sigma) \varphi^i(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Minden $\varphi^i(s)$ sajátfüggvényhez tartozik tehát a rendszernek egy meghatározott kvantumállapota.

Ha a két rendszer egybeesik, akkor ezek az egyenletek nyilván az egyetlen $\varphi^i(s)$ rendszer ortogonalitási és normálási relációiba mennek át.

Az itt bevezetett általánosítás a szimmetrikus magok sajátfüggvényeinek elméletéből az általános nem-szimmetrikus magok megfelelő elméletébe visz át. Ha adva van egy $K(s, \sigma)$ mag, amelyre a $K(s, \sigma) = K(\sigma, s)$ szimmetriafeltétel *nem* teljesül, akkor a

$$\varphi^i(s) - \lambda_i \int K(s, \sigma) \varphi^i(\sigma) d\sigma = 0 \quad (41)$$

egyenletekkel definiált $\varphi^i(s)$ sajátfüggvényrendszer mellett tekinthetünk egy másodikat is, amely a $K'(s, \sigma) = K(\sigma, s)$ transzponált maghoz tartozik;

$$\psi_i(s) - \lambda_i \int K(\sigma, s) \psi_i(\sigma) d\sigma = 0. \quad (41')$$

A λ_i sajátértékek mindkét esetben ugyanazok. Könnyen meg lehet mutatni, hogy a különböző λ_i és λ_k sajátértékekhez tartozó φ^i és ψ_k függvények között a

$$\int \varphi^i(s) \psi_k(s) ds = 0$$

reláció áll fenn. A még szabadon maradó normálást részben a

$$\int \varphi^i(s) \psi_i(s) ds = 1$$

egyenlettel rögzíthetjük; a két normálási tényező közül az egyik még ezután is szabadon választható. Az utóbbi két egyenletből látjuk, hogy a céljainkat szolgáló $\varphi^i(s)$ és $\psi_i(s)$ függvényrendszer nem más, mint egy általános $K(s, \sigma)$ mag *sajátfüggvényeinek két sorozata*

Fentebb már rámutattunk, hogy az elmélet mátrixmegfogalmazásában teljesen közömbös, hogy a szimmetrikus $K(s, \sigma)$ mag milyen sajátfüggvényekből épül fel, csak a mag λ_i sajátértékeinek van jelentősége. Ugyanezt mondhatjuk most az általános mag esetében is. A $\varphi^i(s)$ függvényrendszerrel áttérhetünk tehát egy új

$$\bar{\varphi}^i(s) = \sum \alpha_m^i \varphi^m(s) \quad (42)$$

függvényrendszerre. Egyidejűleg hasonló módon transzformáljuk a $\psi_i(s)$ függvényeket is:

$$\bar{\psi}_i(s) = \sum \beta_i^m \psi_m(s). \quad (42')$$

Hogy azonban a (40) ortogonalitási és normálási feltételek az új rendszerre is teljesüljenek, az α és β mennyiségeknek könnyen belátható módon a következő egyenleteket kell kielégíteniük:

$$\left. \begin{aligned} \sum_m \alpha_m^i \beta_k^m &= 0 \quad (i \neq k), \\ \sum_m \alpha_m^i \beta_i^m &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Innen azonnal következik, hogy a $\sum \varphi^i(s) \psi_i(s)$ kifejezés a *transzformáció invariánsa*:

$$\sum \bar{\varphi}^i(s) \bar{\psi}_i(s) = \sum \varphi^i(s) \psi_i(s). \quad (44)$$

Ezt az eredményt a következő alakban is megfogalmazhatjuk: Ha egy sajátfüggvényrendszerrel lineáris transzformációval egy másikra térünk át, akkor a sajátfüggvények egyik ill. másik sorozata *egy végtelen dimenziós tér vektorainak kovariáns ill. kontra-variáns komponenseként transzformálódik*.

Ily módon valóban jogos a $\varphi^i(s)$ és a $\psi_i(s)$ függvényrendszer felső és alsó indexszel való megkülönböztetése, s a továbbiakban a φ^i függvényeket „kontravariáns”, a ψ_i függvényeket „kovariáns függvényeknek” nevezzük⁶. Ennek megfelelően a mátrix a_i^k elemeit egy végtelendimenziós térben adott másodrendű tenzor vegyes komponenseiként foghatjuk fel.

A nem-szimmetrikus magokra való áttéréssel már nem vagyunk többé csupán ortogonális transzformációkhoz kötve (amelyeknél a kovariáns és kontravariáns indexek közötti megkülönböztetésnek nincs jelentősége), hanem tetszőleges lineáris transzformációt alkalmazhatunk és „főtengelytranszformációval” egy nem-szimmetrikus magot is diagonális alakra hozhatunk. Ilyenkor éppen a mag sajátfüggvényeivel kell operálnunk. A szimmetrikus magokra érvényes „bilineáris formula” általánosításaként a következő összefüggés áll fenn:

$$K(s, \sigma) = \sum \frac{\varphi^i(s)\psi_i(\sigma)}{\lambda_i}. \quad (45)$$

Ha egy $f(s)$ függvényt egy nem-szimmetrikus mag kontravariáns függvényei szerint akarunk kifejtetni — feltéve, hogy ilyen kifejtés egyáltalán lehetséges — az

$$f(s) = \sum \left(\int f(\sigma)\psi_i(\sigma)d\sigma \right) \varphi^i(s) \quad (46)$$

képlet érvényes. Teljesen hasonló a kovariáns függvények szerinti kifejtést megadó képlet.

A kvantummechanikában fellépő $p(s, \sigma)$ és $q(s, \sigma)$ függvények azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy s és σ felcserélése esetén komplex konjugáltjukba mennek át. Ilyen magok esetében a kovariáns sajátfüggvények egyszerűen a kontravariánsak komplex konjugáltjai és a sajátértékek mindig valósak.

II. *A kvantálási feltétel.* Az integrálegyenletek elméletében alkalmazott módszereknek kezdettől fogva megvan az a jellegzetes sajátságuk, hogy a végtelen mátrixokat végesek határeseteként kezelik és szukcesszíve ilyenekkel közelítik. Elméletünkben is lehetséges ilyen véges közelítés, ha a $K(s, \sigma)$ mag olyan, hogy bilineáris kifejtésében a tagok valamely elég magas indexű λ_n -tól kezdve gyakorlatilag elhanyagolhatók. A helyzet mindig így áll, ha a bilineáris sor egyenletesen konvergál. Ehhez mindenesetre szükséges, hogy a λ_n sorozat végtelenhez tartson. Mivel, mint láttuk, a λ számok reciprokai (egy univerzális tényezőtől eltekintve) semmi mások, mint az egyes kvantumállapotok energiaszintjei, az említett feltétel azt jelenti, hogy a termeknek nagy kvantumszámokra zérushoz kell tartaniuk. A szinképsorozatokban, ahol $W_n \frac{1}{n^2}$ rendű, ez

a követelmény tényleg teljesül is. A lineáris oszcillátor *Heinsenberg* valamint *Born és Jordan* által vizsgált példájában azonban egész más viszonyokat találunk. Itt az energiaszintek nagy kvantumszámokra a végtelenbe növekednek. Ebben az esetben egyáltalán nem konstruálható olyan $K(s, \sigma)$ mag, amely a rendszert a maga teljességében jellemezhetné. Az itt megnyilvánuló matematikai nehézséget aligha írhatjuk a módszer számlájára — sokkal inkább fizikai természetű inkonzisztenciával állunk szemben. Végtelen nagy energiaszintek mindenképpen fizikailag is értelmetlenek. Látjuk azonban innen, hogy általában tetszőleges végtelenhez tartó energiaszinteket ki kell zár-

⁶ Metrikáról itt nincs szó. Teljesen mindegy, hogy melyik sorozatot tekintjük kovariánsnak, ill. kontravariánsnak, csak relatív transzformációs tulajdonságaik alapján áll fenn köztük a kovariáns-kontravariáns viszony.

nunk. Az a kérdés, hogy hol kell egy rendszer határait megvonnunk, eleve nem dönthető el⁷, de gyakorlatilag nem is jelentős. Ami elvileg lényeges, az a következő. Az új kvantummechanika jellemző vonása, hogy az egyes kvantumállapotokat nem egymástól függetlenül határozza meg, hanem a dinamikai rendszert mint egészet tárgyalja. A kvantumállapotok bizonyos módon „csatolva” vannak egymással. Igen kézenfekvő tehát feltenni, hogy ez a csatolás annál gyengébb, mennél távolabb esnek egymástól a megfelelő kvantumszámok. Azaz feltételezhetjük, hogy a nagy kvantumszámú kvantumállapotok az alacsonyabbrendű állapotokat már nem befolyásolják lényegesen. Ekkor azonban kell, hogy lehetőségünk legyen a rendszer tetszőleges pontosságú aszimptotikus leírására akkor is, ha az igen magas kvantumállapotokat jellemző mennyiségeket teljesen elhagyjuk. Ez viszont a végtelen mátrixelem-rendszernek éppen olyan természetű véges rendszerrel való közelítését jelenti, amelyre matematikai alapon is törekedtünk.

Mármost a „mozgásegyenletek” önmaguktól rendelkeznek a tulajdonsággal, hogy teljesen közömbös, véges vagy végtelen mátrixok szerepelnek-e bennük. Nem kell mást tennünk, mint a $K(s, \sigma)$ mag sajátfüggvényrendszerét egy bizonyos n indextől kezdve levágni; ekkor a p_i^k és q_i^k mátrixnak sem lesz olyan eleme, amelynek i vagy k indexe n -nél nagyobb lenne.

A kvantálási feltétel megfogalmazásánál azonban nehézségbe ütközünk. Már korábban rámutattunk, hogy az „éles” Born—Jordan-féle kvantálási feltétel nem fér össze mindenütt véges p és q függvényekkel. A véges sok taggal való aszimptotikus közelítésre ebből a körülményből még semmilyen nehézség nem származna. A kvantálási feltételt véges p_n és q_n mátrixokra is felírhatnánk az

$$\frac{1}{h} (p_n q_n - q_n p_n) = 1 \quad (47)$$

alakban. Ez azonban azonnal ellentmondásra vezetne, ami különösen élesen megmutatkozik, ha például a q_n mátrixot főtengeletytranszformációval diagonális alakra hozzuk. Ekkor ugyanis a baloldalon a főátlóban szükségképpen csupa nulla áll, míg a jobboldal csupa 1-et írna elő.

Az ellentmondás nem kerülhető el, mivel a baloldalon az átlós összegnek el kell tűnnie; mindenképpen fennáll ugyanis hogy

$$\int (pq - qp)(s, s) ds = 0. \quad (48)$$

A jobboldalon ezzel szemben n áll, ha n a közelítő p_n és q_n mátrixok rangja.

Hogy ettől az ellentmondástól megszabaduljunk, kíséreljük meg felderíteni a viszonyokat a harmonikus oszcillátor példáján. Ha az $i, k \leq n$ feltétellel korlátozott véges mátrixokban p_i^k -ra és q_i^k -ra beírjuk a Heisenberg vagy Born és Jordan által talált értékeket, azt találjuk, hogy az $\frac{1}{h} (p_n q_n - q_n p_n)$ szorzatkülönbség főátlójában mindenütt 1 áll, kivéve az utolsó (n -ik) helyet, ahová 1-n kerül. Ez az utolsó tag az átlós összeget tényleg nullává teszi. A példából kiindulva megpróbálhatnánk a kvantálási feltételt a következő alakba írni:

$$\frac{1}{h} (pq - qp)(s, \sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\sum_{i=1}^n \varphi^i(s) \psi_i(\sigma) \right) - n \varphi^n(s) \psi_n(\sigma) \right]. \quad (49)$$

⁷ Egy zárt gömbi térben ezt a határt már a rendszer véges kiterjedése megszabja.

Ez a megfogalmazás azonban nyilván semmiképp sem kielégítő, minthogy az egyik kvantumállapotot — az n -ediket — kitünteti az összes többivel szemben, mégpedig aránytalanul erős mértékben.

Ezek után felvethetjük a kérdést: hogyan lehetne a *Born—Jordan*-féle kvantálási feltételt bármely kvantumállapot kitüntetése nélkül úgy módosítani, hogy lehetővé váljék a végtelen rendszer véges rendszerrel való szukcesszív közelítése — tehát hogy a kérdéses mátrix átlós összege ne végtelenhez, hanem zérushoz tartson?

A kérdésre a vizsgálatok jelenlegi stádiumában, amikor az egyelőre tisztán formálisan felírt egyenletek mélyebb tartalmáról még semmit sem tudunk, természetesen nem lehet kielégítő választ adni. Az alábbi példán csupán elvi lehetőséget szeretnénk mutatni a kívánt típusú módosításra. Tekintsük a következő elemi trigonometrikus összegképletet [5]:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{1}{2} x}.$$

Ha $x = \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}}$, a baloldali összeg eltűnik. Ahhoz tehát, hogy a kvantálási feltételnek

olyan megfogalmazást adjunk, amely véges rendszerekre nem tartalmaz ellentmondást, nem kell mást tennünk, mint a (47) egyenlet jobboldalán a főátlóban rendre beírni az 1-esek helyébe az

$$\frac{1}{2n} + \cos \frac{k\pi}{n + \frac{1}{2}} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

mennyiségeket. Eközben n mindig olyan nagyra választható, hogy az eltérés a *Born—Jordan*-féle feltételtől tetszőleges nagy k -ra tetszőlegesen kicsiny marad.

A felhozott példa, amelynek biztosan nincs komoly igazság-tartalma, csupán azt kívánja illusztrálni, hogy az itt felmerült nehézség, legalábbis elvileg, nem megoldhatatlan.

Frankfurt a. M., Institut für theoretische Physik, 1925 december.

Fordította: Nagy Tibor

A szerző megjegyzése a magyar nyelvű megjelenéskor:

A (32) egyenlet ilyen formában érthetetlen, amire a szerzőt Györgyi Géza és B. L. van der Waerden professzorok figyelmeztették. A helyes fogalmazás (ami koncepcióban megfelel a Dirac-féle delta függvénynek, és ami kifejezi a szerző gondolatát) a következő:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} E(s, s+x) dx = 1.$$

IRODALOM

1. W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **33**, 879 (1925).
2. M. Born és P. Jordan: u. ott **34**, 858 (1925).
3. K. Lánzos, ZS. f. Phys. **32**, 163 (1925).
4. „Tenzoriális integrálegyenletek”, Math. Ann. **95**, 143 (1925).
5. Lásd pl. Courant—Hilbert, Methoden der mathematischen Physik **1**, 48. Berlin, Springer, 1924.

KÖNYVISMERTETÉS

R. D. Barnard: Thermoelectricity in Metals and Alloys. Taylor & Francis LTD kiadó, London, 1972.

Az utóbbi években a fémek transzportsajátságainak vizsgálatok jelentős szerepet kapott a termoelektromos jelenségek tanulmányozása. Az ismertetett könyv az utolsó tíz évet tekinti át ebből a szempontból. Feladatát abban látja, hogy termoelektromos jelenség magyarázatára szigorú fizikai alapot nyújtson, külön hangsúlyozva az elektron és fonon mozgást és a kölcsönhatást; az alapjelenségek, pl. a fonondrag megértéséhez egyszerű fizikai modelleket hív segítségül. Így nem csupán a termoelektromosságban vagy más transzportsajátságokban, elektromos- és hővezetésben kezdők számára, de az e területeken már jártas szakembereknek is érdekes.

A könyv végzett fizikusok, kémikusok, elektromérnökök és metallurgok szintjéről indulva gyorsan halad a szóbanforgó terület jelenlegi eredményeinek diszkussziójához szükséges szint felé. A szilárdtestfizika és a termodinamika elemeinek némi ismerete szükséges a tárgyalatok megértéséhez. A csatolt irodalom segítséget nyújt a további tanulmányokhoz. A teljesség kedvéért a termoelektromos jelenség alapjainak ismertetése után egy rövid fejezet a mérési problémákkal foglalkozik.
(T. Gy.)

L. Collatz, G. Meinardus, H. Unger és H. Werner: Iterationsverfahren Numerische Mathematik Approximationstheorie Birkhäuser Kiadó 1970.

A funkcionálanalízis mellett a numerikus matematika összekötő a két nagy, egymást kölcsönösen megtermékenyítő „tisztá” és „alkalmazott” matematika között. Ezt igazolja az oberwolfachi Matematikai Kutató Intézet által rendezett következő három szeminárium:

A numerikus matematika nem lineáris feladatai. 1968. nov. 17—23. Szeminárium vezető: *L. Collatz és H. Werner.*

Az approximációs elmélet numerikus módszerei. 1969. jún. 8—14. Szeminárium vezető: *L. Collatz és G. Meinardus.*

A numerikus matematika iterációs eljárásai. 1969. nov. 16—22. Szeminárium vezető: *L. Collatz és H. Unger.*

Ezek a szemináriumokon elhangzott előadások a numerikus matematika sok, az újabb időben keletkezett résztudományának egynémelyikéről szólnak.

A kötet csak az előadások kivonatát közli, de ezek részletes irodalmi utalásokat is tartalmaznak. Ízelítőül a tárgyalat témákból:

A nem lineáris feladatok szemináriumán: Kontinuitási tételek metrikus projekció esetén; ez utóbbiak a $C_0[Q, H]$ lineáris részterekre vonatkozóan; közelítő eljárások szabályos variációs problémák esetén, nem lineáris egyenletrendszerek egyes megoldási módszerei.

A numerikus módszerek szemináriumán: Absztrakt Riemann-integrálok, a Korovkin-elmélet általánosítása; a Dirichlet-probléma megközelítő megoldására szolgáló integráloperátor módszerek, több dimenziós Hermite interpolálás.

Az iterációs eljárás szemináriumán: Relaksáció nem lineáris egyenletrendszerek egyik osztályánál konvergencia gyorsulás egyfokozatú, iterációs eljárásnál; megoldási eljárás nem lineáris szélsőérték probléma tárgyalásakor.

(T. Gy.)

Stefan Fenyő: Moderne mathematische Methoden in der Technik. II. kötet. Birkhäuser Kiadó 1971.

A svájci Birkhäuser Kiadó ISMN (International Series of Numerical Mathematics) sorozatában a 8. kötet volt *Fenyő István és Frey Tamás könyve* a Moderne Mathematische Methoden in der Technik. Ez volt a három kötetre tervezett munka első kötete. A most ismertetett könyv a sorozat 11. tagja, a második kötet. Ez utóbbi teljes egészében *Fenyő István* munkája és éppen úgy, mint az első kötet, lényegében önálló egészet alkot. A két kötet közötti különbség talán úgy adható meg, hogy ez a munka az alkalmazott matematika véges módszereivel foglalkozik.

A könyv három fejezete közül az első a mátrixokkal foglalkozik, néhány új más monográfiák által eddig nem tárgyalt eredményekkel együtt a determinánsok elmélete viszont csak vázlatosan, a lényeget kiemelve szerepel benne.

A második fejezet a lineáris és konvex optimalizálás problémáival foglalkozik, főleg a közgazdászok szempontjait tartva szem előtt. Azért a technikusok is találhatnak itt számos tiszta technikai feladat megoldását. A problémákat és megoldásukat geometriailag is szemlélteti. Ismerteti a simplex módszert és az ún. magyar módszert. Részletesen tárgyalja a dualitás problémakörét, a konvex függvényekkel történő optimalizálásnál a Khun-Tucker tételt.

Az első két fejezet azonban nem foglalkozik a numerikus módszerek részletes kifejtésével, csak az alapgondolatok, a lényeg és a matematikai alapvetés lehető legegyszerűbb útját választja.

A harmadik fejezet a véges gráfok elméletének alapjait mutatja be. Ennek fontossága alkalmazásuk folytán napról napra növekszik. Hangsúlyozom, hogy a szerző valóban az elemekkel kezdi. Kiemelem a Bool-algebra szép tárgyalását. Megemlítem, hogy lényeges a fejezet végén a Ford—Fulkerson tétel, mert ez már átvezet a feladatmegoldás módszerébe.

Mind az első, mind a második kötet esetén a szerző arra törekedett, hogy a két kötet egymástól függetlenül is olvasható legyen.

(T. Gy.)

L. Collatz és G. Meinardus: Numerische Methoden der Approximationstheorie. I. kötet. Birkhäuser Kiadó 1972.

Az oberwolfachi Matematikai Kutató Intézet hosszú idő óta átlag két éves időközben szemináriumokat tart az approximációs elmélet numerikus módszereiről. Az 1971. júl. 12—19. között tartott előadások kivonatait tartalmazza ez a kötet. A szeminárium vezető *L. Collatz* úgy válogatta össze a témákat, hogy azok az elvont matematika és az alkalmazott matematika közti rés csökkenítésére szolgáljanak. Az approximációs elméleti kérdések alkalmasak a hídverésre. A nagyszámú külföldinek, különösen a tengerentúli matematikusoknak a szemináriumon való részvétele azt mutatja, hogy a szeminárium szervezők ezen törekvése széleskörű rezonanciára talált.

A kötetben számos olyan matematikán belüli és kívüli alkalmazást érintő kérdés került tárgyalásra, amely nem szokásos a klasszikus approximációs elméletben. Így híradástechnikuskok a náluk fellépő szokatlan approximációs problémákat mutatják be. Mások az alkalmazott matematika bizonyos feladataiból kinőtt approximációs kérdéseket ismertetik. Két további súlypontot képeznek az optimalizálási elmélet egyes vonatkozásai, olyanok, amelyek effektív numerikus eljárásokhoz vezetnek.

Külön érdekessége a kötetnek *Steckin* szovjet matematikus orosz nyelven megjelent, egy optimalizálási kérdéssel foglalkozó dolgozata.

(T. Gy.)

Statistical Mechanics and Mathematical Problems**A Lecture Notes in Physics 20. kötete. Springer Kiadó. 1973.**

E kötet az 1971-es Rencontres in Mathematics and Physics nyári iskola előadásait tartalmazza. E találkozót a Battelle Memorial Institute szervezi és támogatja. Központi témája a statisztikai mechanika volt, amely a matematikai analízis számára számos problémát kínál. Így Oscar Lanford Entropia és egyensúly állapotok a klasszikus statisztikus mechanikában című előadásában precízen kimutatja, hogy a makroszkopikus mennyiségek nem fluktuálnak. Fejtegetéseiben az entrópiát a szokásosnál általánosabb értelemben és precízebben használja. Andrew Lenard a Coulomb stabilitás elméletével foglalkozó előadásának fő témája, hogy a nemrelativisztikus kvantummechanika Hamilton operátora a részecskék számával arányos alacsonyabb határral rendelkezik. Giovanni Gallavotti, Anders Martin-Löf és Salvador Miracle-Solé előadásaikban két fázis koegzisztenciájának tartományában az állapot struktúrájával foglalkoznak. Ennek a kérdésnek, amelyet Sinai és Minlos vetettek fel, ezekben az előadásokban részletes feldolgozását kapjuk. A kötet utolsó része Masamichi Takesaki előadásait tartalmazza, melyek az operátor algebra néhány tisztán matematikai kérdésével foglalkozik.

A könyv jól demonstrálja, hogy az utolsó két évtized egyik szembeszökő intellektuális fejlődése a modern matematikai fizika érlelődése és növekedése. (T. Gy.)

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

Technikai szerkesztő: Turchányi György

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Helle Mária

A kézirat beérkezett: 1973. március 10. — Terjedelem: 9,45 (A/5) ív

73-1160 — Szegedi Nyomda

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

Matematikai, fizikai, csillagászati dolgozatokat, referátumokat, könyvismertetéseket, a Tudományos Minősítő Bizottságnak a III. Osztályra vonatkozó híreit s a III. Osztály híreit közli. Évenként egy kötet (kb. 40 ív) jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

A Közlemények előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 60 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488, külföldi megrendelések a „Kultúra”

Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,
1011 Budapest I., Fő utca 32.

Pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990 útján eszközölhetők.

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Perjés Zoltán</i> : Twistor kvantálás	407
<i>Gyarmati Borbála</i> : A Gamow-állapotokról	465

A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

<i>Lánczos Kornél</i> : Az új kvantummechanika kontinuumelméleti előállítása	501
--	-----

KÖNYVISMERTETÉS

<i>R. D. Barnard</i> : Thermoelectricity in Metals and Alloys	515
<i>L. Collatz, G. Meinardus, H. Unger és H. Werner</i> : Iterationsverfahren, Numerische Mathematik, Approximationstheorie	515
<i>Stefan Fenyő</i> : Moderne mathematische Methoden in der Technik II.	516
<i>L. Collatz és G. Meinardus</i> : Numerische Methoden der Approximationstheorie I.	516

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

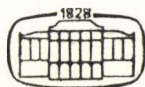
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR,
PÁL LÉNÁRD ÉS SZALAY SÁNDOR
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI
JÁNOSSY LAJOS

XXI. KÖTET

6. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST 1973

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klasszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10—10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóiratból évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelmében.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Jánossy Lajos akadémikus
1121 Budapest XII., Konkoly Thege út
Központi Fizikai Kutató Intézet

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 48 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, 1389 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmi ismertetőt írnak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közölgék. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írnak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.

REZONANCIAÁLLAPOTRA VEZETŐ STRIPPING REAKCIÓK ELMÉLETE*

LOVAS REZSŐ

MTA Atommag Kutató Intézete, Debrecen

Áttekintjük azon stripping reakciók DWBA-elméletét, amelyek a végmag pozitív energiájú, de mégis diszkrét sajátságokat őrző állapotaira (rezonanciáira) vezetnek. Ismertetjük a Lippmann—Schwinger-elmélet stripping mátrixelemének többértelműségét kiküszöbölő eljárásokat. Vázoljuk a bomló végállapot leírására szolgáló elvi módszereket és gyakorlati közelítéseiket. Foglalkozunk a különböző modellekkel és határfeltételekkel definiált rezonanciafüggvények (formafaktorok) szerepével. Külön kitérünk az izobár analóg rezonanciára vezető protonátadó reakciókra és a (d, p) reakcióban az analóg neutroncsatorna nyílásakor fellépő küszöbhatásra. Bemutatjuk, hogy többféle elméleti modell arra az eredményre vezet, hogy a spektroszkópiai faktor a valóságos szélesség és a modellbeli egyrészcseke-szélesség hányadosa. Bepillantást adunk az eddigi konkrét eredményekbe és rámutatunk az egyes leírásmódok kritikus pontjaira.

Bevezetés

1953-ban a $^{24}\text{Mg}(d, n)^{25}\text{Al}$ reakcióban olyan energiájú neutroncsúcsot figyeltek meg, amely a végmag pozitív energiájú állapotához tartozik [1]. A kísérleti technika tökéletesedése és a torzított hullámú Born-közelítés általános elterjedése egyre inkább lehetővé teszi az ilyen típusú magreakciók kvantitatív vizsgálatát. A bomló magállapotok szerkezetének tanulmányozására és a direkt magreakciók elméletének ellenőrzésére való alkalmassága miatt a hatvanas évek közepe óta különösen élénk figyelem irányul rá.

A kilépő részecske szögeloszlása arra utal, hogy itt is stripping reakcióról van szó, és a befogott részecske pályamomentumára sokszor egyértelmű megfeleltetést tesz lehetővé. Ez annyit jelent, hogy számottevő valószínűséggel csak az egyrészcsekeállapotokra történik befogás, illetőleg a bonyolult állapotok egyrészcsekekomponensük révén járulnak hozzá a reakció lefolyásához.

Természetesen a pozitív energiával befogott részecske is eltávozik a magból, ezért végállapotban három részecskénk van. Ha azonban a befogott részecske elég hosszú életű rezonanciaállapotba kerül, a prompt kilépő részecskével való végállapotú kölcsönhatása elhanyagolható, s bomlása a stripping reakciótól függetlennek vehető. Több leírásmódnak sarkalatos pontja, hogy a stripping reakció termék-magjának pozitív energiájú állapotát a kötött állapotokhoz hasonló módon kezelhető egyetlen stacionárius (általában energiafüggő) hullámfüggvénnyel közelíti.

Ezen reakcióknak csaknem minden elmélete a torzított hullámú Born-közelítés (DWBA) kereteiben marad. A bomló végállapot előbb vázolt problémája a DWBA-ban a formafaktor megválasztásában jelentkezik. Ha formafaktornak pozitív energiájú állapotot vesznek, az átmeneti háromtest-mátrixelem divergens integrált tartalmaz. E másik alapvető akadály áthidalásának módja összefügg a választott

* Érkezett: 1972. nov. 20.

formafaktor kérdésével. Fogalmilag, de gyakorlatilag is nehézségekbe ütközik az egyrészescke-állapotban tartózkodás valószínűségét jelentő spektroszkópiai faktor általánosítása bomló állapotokra, mert az a formafaktor normáltságát feltételezi.

Ez a cikk a bomló állapotra vezető egy nukleont átadó stripping reakciók DWBA-elméletével foglalkozik. Áttekintjük az elmélet eddigi eredményeit és a kérdéskörrel foglalkozó különböző szerzők és kutatócsoportok módszereit és álláspontját. Ismertetésünk az e tárgykörrel szóló legtöbb cikkben közös logikai fonalat követi. A DWBA-formalizmusnak a későbbi kifejtés alapjait megvető fővázolása (1. §) és a mátrixelem egyértelmű megadásának és kiszámításának módozatairól szóló ismertetés (2. §) után a bomló végállapot részletes diszkussziója következik. Előbb a kérdés általános elvi alapjaival és az e reakció típusra ajánlott végállapoti modellekkel foglalkozunk (3. §), majd a gyakorlati számolások szemszögéből taglaljuk az egyes módszereket. A formafaktorról (4. §), de még inkább a spektroszkópiai faktorról (5. §) kapcsolatban az eddigi számítások és kísérleti adatok áttekintésére és egybevetésére is sor kerül. Ehhez kapcsolódóan elemezzük az elmélet eredményeit és rámutatunk vitás pontjaira. Végül röviden összefoglaljuk az itt feldolgozott ismereteket.

1. §. A torzított hullámú Born-közelítés

A torzított hullámú Born-közelítés (DWBA) a direkt magreakciók elméletének legelterjedtebb közelítő módszere. Az átmeneti (T -) mátrixelem DWBA-formuláját úgy nyerjük, hogy az egzakt mátrixelem alkalmasan alakított képletében a probléma — általában csatolt csatornás módszerrel meghatározható — egzakt hullámfüggvényét egy egyszerűbb probléma hullámfüggvényével helyettesítjük. Ez az egyszerűbb feladat általában egy optikai potenciálon végbemenő szórás. A T -mátrixelemben a speciális reakcióért (rugalmatlan szórás vagy átrendeződési reakció) és általában az egyenletek csatolásáért felelős „perturbáló” kölcsönhatás jelenik meg.

Jelöljük H -val az

$$A(a, b)B \quad (1.1)$$

átrendeződési reakcióban szereplő nukleonrendszer Hamilton-operátorát. Az átadott részecskét jelöljük x -szel. Bontsuk fel H -t

$$H = H_0 + V_0 + V_1 \quad (1.2a)$$

$$= H'_0 + V'_0 + V'_1 \quad (1.2b)$$

módon. Tartalmazza H_0 a reakcióban passzív részecskék ξ koordinátáit és a teljes kinetikus energiát, V_0 és V'_0 pedig A és a , illetve B és b kölcsönhatásának egy-egy könnyen kezelhető tagját, mely később H_0 -hoz, illetve H'_0 -hoz adva a perturbálatlan Hamilton-operátor szerepét játszhatja. Legyen φ_i és φ_f a

$$H_0\varphi_i = E\varphi_i, \quad \text{illetve} \quad H'_0\varphi_f = E\varphi_f \quad (1.3)$$

egyenletnek $a—A$, illetve $b—B$ relatív koordinátaiban síkhullám-megoldása.

X_i^+ , X_f^- , ψ_i^+ , illetve ψ_f^- elégítse ki a

$$X_i^+ = \varphi_i + \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} V_0 X_i^+, \quad X_f^- = \varphi_f + \frac{1}{E - H'_0 - i\varepsilon} V'_0 X_f^- \quad (1.4a)$$

$$\Psi_i^+ = \varphi_i + \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} (V_0 + V_1) \Psi_i^+ \quad (1.4b)$$

$$\equiv X_i^+ + \frac{1}{E - H_0 - V_0 + i\varepsilon} V_1 \Psi_i^+ \quad (1.4c)$$

$$\Psi_f^- = \varphi_f + \frac{1}{E - H'_0 - i\varepsilon} (V'_0 + V'_1) \Psi_f^- \quad (1.4d)$$

$$\equiv X_f^- + \frac{1}{E - H'_0 - V'_0 - i\varepsilon} V'_1 \Psi_f^- \quad (1.4e)$$

Lippmann—Schwinger-egyenleteket. Az $A(a, b)B$ reakció átmeneti mátrixeleme akkor a következőképpen írható [2]:

$$T_{fi} = \langle \Psi_f^- | V_1 | X_i^+ \rangle \quad (1.5a)$$

$$\equiv \langle X_f^- | V'_1 | \Psi_i^+ \rangle. \quad (1.5b)$$

(1.5a)-t a formula kezdeti állapoti, (1.5b)-t pedig végállapoti formájának nevezzük. Ezen képletek torzított hullámú (első) Born-közelítéséhez akkor jutunk, ha a bennük szereplő Ψ -ket a megfelelő X függvényekkel helyettesítjük:

$$T_{fi}^{DW} = \langle X_f^- | V_1 | X_i^+ \rangle \quad (1.6a)$$

$$\equiv \langle X_f^- | V'_1 | X_i^+ \rangle. \quad (1.6b)$$

Az így nyert két mátrixelem a T -mátrixra vonatkozó, az (1.4c)-vel és az (1.4e)-vel egyenértékű Lippmann—Schwinger-egyenlet iterációs (Born-) sorának első tagja. Az (1.6a) és (1.6b) mátrixelem egyenlősége a X_i^+ -ra és X_f^- -ra vonatkozó Schrödinger-egyenletek felhasználásával egyszerűen megmutatható.

A DWBA elméletben V_0 -t az a és A , V'_0 -t a b és B mag között fellépő optikai és Coulomb-kölcsönhatás U összegének választják, így ha a , A és b , B között nincs spin-pálya kölcsönhatás, a X -k a frakciók relatív koordinátáitól és aszimptotikus hullámszámaiktól függő χ torzított hullámok és a ξ belső koordinátáktól függő ψ függvények szorzatává szeparálódnak:

$$X_i^+ = \chi_a^+(\vec{k}_a, \vec{r}_a) \psi_a \psi_A, \quad X_f^- = \chi_b^-(\vec{k}_b, \vec{r}_b) \psi_b \psi_B, \quad (1.7)$$

ahol a χ -k a

$$\left[\nabla^2 + k^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} U(r) \right] \chi(\vec{k}, \vec{r}) = 0 \quad (1.8)$$

egyenlet szórási megoldásai (μ -k pedig a redukált tömegek). Ezek felhasználásával az (1.6) mátrixelemek

$$T_{fi}^{DW} = J \int d\vec{r}_a \int d\vec{r}_b \chi_b^{-*}(\vec{k}_b, \vec{r}_b) \langle B, b | V | A, a \rangle \chi_a^+(\vec{k}_a, \vec{r}_a) \quad (1.9)$$

módon foglalhatók össze, ahol $V=V_1$ vagy $V=V'_1$, és

$$\langle B, b|V|A, a \rangle = \int \psi_B^* \psi_b^* V \psi_A \psi_a d\xi, \quad (1.10)$$

J pedig az $A—a$ rendszer \vec{r}_a és a $B—b$ rendszer \vec{r}_b relatív koordinátáira való koordináta-transzformáció Jacobi-determinánsa. Ha a és A meg b és B között van spin-pálya kölcsönhatás, a χ -k a , illetve b spinvetülete szerinti oszlopmátrixok. Az (1.9) formula a $\langle B, b|V|A, a \rangle$ általában nemlokális potenciálon az a és b elasztikus szórási állapotok között végbemenő átmenet mátrixeleme. A torzított hullámú közelítés tehát a direkt magreakciót két (1.8) típusú optikaimodell-feladat megoldására és az (1.9) mátrixelem kiszámítására vezeti vissza. Egy DWBA-kiértékelés abból áll, hogy az a -nak A -n és b -nek B -n való rugalmas szórását jól leíró $U(r)$ -ekkel megoldják az (1.8) feladatokat, kiszámolják az (1.9)-et s belőle a hatáskeresztmetszetet.

A továbbiakban az egy nukleont átadó stripping reakció esetére szorítkozunk. Most tehát $a = x + b$, és $B = A + x$, a Hamilton-operátor pedig

$$H = (H_A + T_{bx} + T_{aA} + V_{bx}) + U_{aA} + (V_{bA} + V_{xA} - U_{aA}) = \quad (1.11a)$$

$$= (H_A + T_{xA} + T_{bB} + V_{xA}) + U_{bB} + (V_{bx} + V_{bA} - U_{bB}). \quad (1.11b)$$

(1.11a) az (1.2a), (1.11b) pedig az (1.2b) felbontásnak felel meg. A mátrixelemnek az egyedül célravezető (1.6b) formáját választjuk. Akkor nyilvánvalóan

$$V'_1 \equiv V_{bx} + V_{bA} - U_{bB} \simeq V_{bx}. \quad (1.12)$$

Az A , B , a és b mag spinjének operátorát jelöljük rendre \vec{J}_A , \vec{J}_B , \vec{s}_a , \vec{s}_b -vel. Az x nukleon teljes impulzusmomentuma, spinje és pályamomentuma

$$\vec{j} = \vec{J}_B - \vec{J}_A, \quad \vec{s} = \vec{s}_a - \vec{s}_b, \quad \vec{l} = \vec{j} - \vec{s}. \quad (1.13)$$

Egy bizonyos átmenetnél általában egy l , s , j érték („ l -, s -, j -transzfer”) fontos vagy megengedett.

Ha feltételezzük, hogy b és x a -ban $l=0$ állapotban van, az (1.10) effektív kölcsönhatás a

$$\begin{aligned} \langle J_B M_B, s_b m_b | V | J_A M_A, s_a m_a \rangle &= \int \psi_{J_B M_B}^* (\vec{r}_{xA}, \xi_x \xi_a) \psi_{s_b m_b}^* (\xi_b) \times \\ &\times V_{bx} (r_{bx}, \xi_b \xi_x) \psi_{J_A M_A} (\xi_A) \psi_{s_a m_a} (r_{bx}, \xi_b \xi_x) d\xi_A d\xi_b d\xi_x \end{aligned} \quad (1.14)$$

formát ölti. Mivel esetünkben x nukleon, és az izospin-koordinátáktól egyelőre eltekintünk, ξ_x a nukleon spinkoordinátáját jelenti.

(1.14) explicit kiszámítása a következőképpen történik [3]:

A végmag $\psi_{J_B M_B}$ állapota sorba fejthető a targetmag $\psi_{J_A M_A}$ állapotai szerint:

$$\psi_{J_B M_B} (\vec{r}_{xA}, \xi_x \xi_a) = \sum_{j\mu J'_A M'_A} \psi_{J'_A M'_A} (\xi_A) \alpha_{lj}^{BA'} \psi_{l\mu} (\vec{r}_{xA}, \xi_x) \langle J'_A j M'_A \mu | J_B M_B \rangle. \quad (1.15)$$

A sorfejtésből csak a $J'_A = J_A$, $M'_A = M_A$ tagok adnak (1.14)-hez nem nulla járulékot. Az (1.15) sorfejtés $\psi_{J_B M_B}$ -nek valójában csak a direkt reakciót adó tagjait tartalmazza, vagyis azokat az állapotokat, melyeket a targetmag mint magtörzs és az erőterébe befogódott x nukleon alkot. Az (1.15) tagjait csökkentő α_{lj}^{BA} tényezők a teljes állapottérrel e szűkebbre való vetítésből származnak. Ha az (l, j) pályán

n ekvivalens nukleon van, az α_{lj} az antiszimmetria-megfontolásokból származó \sqrt{n} -es tényezőben különbözik a Θ_{lj} spektroszkópai amplitúdótól:

$$\Theta_{lj} = \sqrt{n}\alpha_{lj}, \quad \text{vagy} \quad S_{lj} = n|\alpha_{lj}|^2, \quad (1.16)$$

ahol S_{lj} a spektroszkópai faktor.
(1.15) alkalmazásával (1.14)

$$\begin{aligned} \langle B, b|V|A, a \rangle &= \sum_{j\mu m\sigma} \alpha_{lj}^{BA} \langle J_A j M_A \mu | J_B M_B \rangle \times \\ &\times \langle s_b s m_b \sigma | s_a m_a \rangle \langle l s m \sigma | j \mu \rangle \psi_{lm}^*(\vec{r}_{xA}) D(bx) \end{aligned} \quad (1.17)$$

alakba írható, ahol

$$\begin{aligned} \langle s_b s m_b \sigma | s_a m_a \rangle D(bx) &= \\ = \iint \psi_{s_b m_b}^*(\xi_b) \psi_{s_a}^*(\xi_x) V_{bx}(r_{bx}, \xi_b \xi_x) \psi_{s_a m_a}(r_{bx}, \xi_b \xi_x) d\xi_b d\xi_x, \end{aligned} \quad (1.18)$$

és (1.17)-ben meg (1.18)-ban a

$$\psi_{lj, \mu}(\vec{r}_{xA}, \xi_x) = \sum_{m\sigma} \langle l s m \sigma | j \mu \rangle \psi_{lm}(\vec{r}_{xA}) \psi_{s\sigma}(\xi_x) \quad (1.19)$$

sorfejtés szerepel. Ha

$$\psi_{s_a m_a}(r_{bx}, \xi_b \xi_x) = \varphi_a(r_{bx}) \psi_{s_a m_a}(\xi_b \xi_x) \quad (1.20)$$

módon faktorizálható — ez a helyzet pl., ha az a deuteron, és az $l=2$ állapot hozzákeveredését (mint rendszerint) elhanyagoljuk —,

$$D(r_{bx}) = V_{bx}^{(s_a)}(r_{bx}) \varphi_a(r_{bx}), \quad (1.21)$$

ahol $V_{bx}^{(s_a)}$ jelöli az a részecske s állapotában V_{bx} -et. Hogy a végformulában különben fellépő hatszoros integrálokat kiküszöböljük, gyakran bevezetik a

$$D(r_{bx}) \simeq D_0 \delta(r_{bx}) = D_0 J^{-1} \delta(\vec{r}_b - \frac{A}{B} \vec{r}_a) \quad (1.22)$$

nullahatótávolság-közelítést (ZR approximáció), mely a pontosan számolt $D(r_{bx})$ keskeny alakjának köszönhetőleg — mint véges hatótávolsággal (FR) elvégzett számolások igazolják — nem túl rossz. E közelítésnek az a szemléletes tartalma, hogy a b részecskét ugyanazon pontból képzeljük kilépni, mint amelyben a abszorbeálódott. (1.22)-ben A és B az A és B mag tömegét jelenti. D_0 értékét például effektívhatótávolság-analízissel határozzák meg [4, 5].

Az (1.15) sorfejtéssel az (1.14) képletből kiküszöböltük az A és B belső koordinátáit tartalmazó függvényeket, az (1.20) közelítéssel pedig az (1.18)-ban szereplő integrálokat. Az (1.17) effektív kölcsönhatást (1.9)-be visszairva J kiesik, az (1.22)-beli Dirac- δ révén pedig az átmeneti mátrixelemből csak háromszoros integrál lesz. A T_{fi}^{DW} így nyert képletében χ_b^- -t és χ_a^+ -t parciális hullámok szerint sorba fejtve, az

$$\int \chi_{L_b J_b}^b(k_b, \frac{A}{B} r) F_{lsj}(r) \chi_{L_a J_a}^a(k_a, r) dr \quad (1.23)$$

típusú integrálok sorát kapjuk [3]. Itt $\chi_{LJ}(k, r)$ -ek az (1.8) optikaimodell-egyenletekből nyert

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{L(L+1)}{r^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} U_{LJ} \right] \chi_{LJ}(k, r) = 0 \quad (1.24)$$

radiális egyenleteknek a szokásos

$$\chi_{LJ}(k, r) = \frac{1}{2} i [H_L^-(kr) - S_{LJ} H_L^+(kr)] e^{i\sigma_L}, \quad \text{ha } r \gg R_{\text{mag}} \quad (1.25)$$

szórási határfeltételeket és normálási előírásokat kielégítő megoldásai. (U_{LJ} a potenciál az L, J -edik parciális hullámban, $H_L^\pm = G_L \pm iF_L$, σ_L a Coulomb-fázistolás.) Az $F_{lsj}(r) = f_{lsj}(r)/r$ az x nukleon hullámfüggvényének az $l, s (= \frac{1}{2}), j$ parciális hullámhoz tartozó normált radiális része, melyet (vagy olykor $f_{lsj}(r)$ -et) formafaktornak nevezünk. Az (1.23) integrálok több vektorcsatolási együtthatóval és a T -mátrixelem szögfüggését tartalmazó Legendre-függvénnyel megszorozva végtelen sort alkotnak [3]. Driskónak az elterjedten használt „JULIE” DWBA-programja maga választja ki, hogy az energetikai viszonyoktól függően hány parciális hullám járulékat kell figyelembe venni. Polarizálatlan céltárgy és beeső nyaláb esetén a differenciális hatáskeresztmetszetet a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu_a \mu_b}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{k_b}{k_a} \frac{\sum_{M_A m_a M_B m_b} |T|^2}{(2J_A + 1)(2s_a + 1)} \quad (1.26)$$

formula adja.

DWBA-eljárással adott l, s, j -átadáshoz tartozó csúcs szögeloszlását lehet meghatározni. Az a és b csatornában a programnak be kell adni az optikai paramétereket. Az x csatornában azonban a centrális potenciálnak csak a közelítőleges mélységét, de az illető l, s, j -hez tartozó héjmodellpálya pontos energiaértékével együtt kell megadni. Az utóbbit ezen nukleon szeparációs energiájával tekintik egyenlőnek. A program a potenciálmélység változtatásával a beadott értékre tolja a nívó energiáját, a hozzá tartozó normált állapotfüggvényt pedig a formafaktormal azonosítja. A csak mikroszkopikus alapon kiszámítható spektroszkópiai faktort 1-nek veszi. A számolt differenciális hatáskeresztmetszetet a mérttel egybevetve eldönthető, hogy a befogott nukleon pályájára nézve tett l - (és szerencsés esetben j -) feltevés helyes volt-e, a spektroszkópiai faktort pedig a

$$\sigma_{\text{mért}} = S \sigma_{DW} \quad (1.27)$$

formula adja.

A most vázolt recept elvi alapja az, hogy a reakció direkt mechanizmus szerinti lefolyását tételezzük fel. Ez azt jelenti, hogy az x nukleon befogása egy (esetleg bonyolult szerkezetű) állapot egyrészecske-komponensén keresztül megy végbe. A mért csúcs helyén tehát lennie kell egy egyrészecske-kötöttállapotnak. Annak a valószínűsége, hogy a B rendszer az $A +$ egyrészecskeállapot konfigurációban tartózkodjék, a spektroszkópiai faktor, amely ezek szerint a mérésekből nyerhető mag szerkezeti információt hordozza.

2. §. A DWBA-mátrixelem kiszámítása bomló végállapot esetén

Mint tudjuk, a Lippmann—Schwinger-egyenlet három test esetén általában nem ad egyértelmű megoldást, mert a határfeltételeket ilyenkor nem veszi tökéletesen tekintetbe. Speciálisan, kötött állapotra vezető stripping reakcióban mind az (1.11a) felbontáson alapuló (1.6a) „prior”, mind az (1.11b) szerinti (1.6b) „post” DWBA-mátrixelem egyértelműen kiszámítható konvergens integrál:

$$T_{fi}^{DW} = \langle X_f^- | V_{bA} + V_{xA} - U_{aA} | X_i^+ \rangle, \quad (2.1a)$$

$$T_{fi}^{DW} = \langle X_f^- | V_{bx} + V_{bA} - U_{bB} | X_i^+ \rangle. \quad (2.1b)$$

Ha a formafaktor pozitív energiájú hullámfüggvény, akkor oszcilláló farokkal rendelkezik, akármelyiket is választjuk a következő §-ban részletezendő előírások közül. Ekkor a (2.1a) kifejezés továbbra is határozott értékkel rendelkezik, mert a kölcsönhatás az A magtól távolodva gyorsan 0-hoz tart. Sajnos azonban e potenciál a belső tartományban az összes nukleon koordinátáitól függ, így a prior mátrixelem gyakorlati számolásra nem alkalmas. A $V_{bA} \simeq U_{bB}$ közelítés a teljes tartományon teljesül, azonban mivel a $V_{bx}(|\vec{r}_b - \vec{r}_x|)$ kölcsönhatás nincs a célmághoz lokalizálva, „nem vág le”, és a (2.1b)-nek megfelelő

$$T_{fi}^{DW} = \langle \chi_b^-(\vec{k}_b, \vec{r}_b) \psi_b(\vec{\xi}_b) \psi_B^-(\vec{k}_x, \vec{r}_{xA}, \vec{\xi}_x \vec{\xi}_A) | V_{bx} | \psi_A(\vec{\xi}_A) \psi_a(\vec{r}_{bx}, \vec{\xi}_b \vec{\xi}_x) \chi_a^+(\vec{k}_a, \vec{r}_a) \rangle \quad (2.2)$$

mátrixelem divergens marad [6]. Egy rezonáns végállapothoz ψ_B^- egyetlen parciális hulláma tartozik, ezért rezonanciában belőle egy vagy kevés parciális hullám figyelembevétele elegendő.

A probléma orvoslására a DWBA-elméletben három módszer ismeretes: konvergenciatényező alkalmazása [6, 7, 8], az integrálnak a komplex síkra való kiterjesztése [9, 10] és a határfeltételek egzakt figyelembevétele [5, 11]. E nehézség megkerülése azzal, hogy a pozitív energiájú állapot helyett kötött állapotú formafaktort alkalmaznak, általában nem vezet megbízható eredményre (lásd a 3. §-t).

Huby és Mines [6] (2.1a)-ban és (2.1b)-ben a két torzított hullámot és ψ_B^- -t parciális hullámokba fejt. Az egyes parciális hullámokhoz tartozó (2.2) alakú mátrixelemek meghatározott értékkel rendelkeznek, és a prior sorfejtés megfelelő tagjaival egyenlők. A „parciális mátrixelemek” végessége (1.23) mintájára egyszerűen belátható: ha a B állapot pozitív energiájú, a két χ mellett aszimptotikusan f_{ij} is periodikus, tehát szorzatuk is az, a $(\sin x)/x$ típusú integrandusok improprius integráljai pedig léteznek, bár igen lassan konvergálnak. A prior mátrixelem sorának összege magát a mátrixelemet adja, következésképp a post sorfejtése is. Az integrálás és az összegzés felcserélése tehát azt eredményezi, hogy a kifejezés konvergens lesz, és a helyes értéket adja. Ugyanezen eredményre vezet, ha egyedül ψ_B^- -t fejtjük sorba, és az $\int dr_{xA}$ operációt a

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int dr_{xA} e^{-\alpha r_{xA}} \quad (2.3)$$

művelettel helyettesítjük. Technikai okokból Huby és Mines [7] és azóta több más szerző a két módszer kombinációját használja: az 1. §-ban leírt módon sorba fejtnek, a radiális integrálok kiszámításakor pedig (2.3)-at numerikus extrapolációval közelítik.

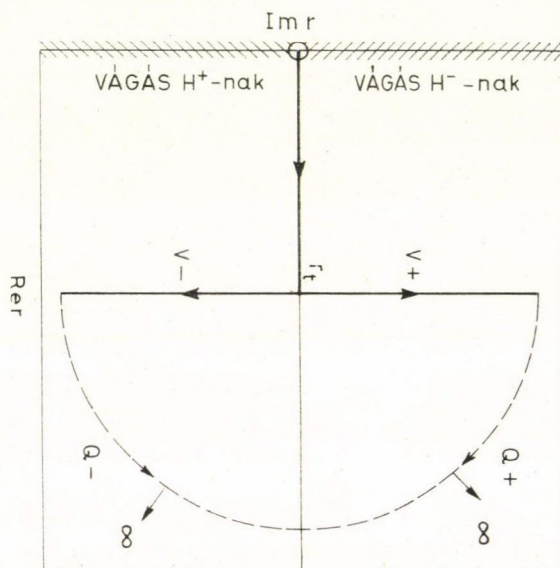
Bang és Zimányi [8] formafaktorként az A — x -probléma Gamow-megoldását használta, mely a külső tartományban exponenciálisan növekvő amplitúdóval oszcillál. DWBA-mátrixelemük azért konvergens mégis, mert az erősebb $\exp \{-\alpha r^2\}$ konvergenciafaktort használják. E konvergenciafaktor alkalmazása azonban nem ad hoc jellegű: a Gamow-állapotok Berggren-elméletében [12] a belső szorzat definíciójában szerepel, s ilyen speciális választása sem szükségyszerű [13, 46]. Ha a belső szorzat e definícióját elfogadtuk, azt kell mondanunk, hogy a Berggren-elméletben a bomló végállapot nem okoz divergenciát, mert formalizmusában a rezonancia-állapot a kötött állapottal teljesen egyenértékű.

Energetikai okokból $k_a > k_x + k_b$, ezért ha $\chi_{L_a J_a}^a$ -t a magpotenciál hatósugarán kívül ($r_t > R_{\text{mag}}$) (1.25) formába írjuk, és az (1.23) így nyert

$$I(0, r_t) + I_- + I_+ = I(0, r_t) + \quad (2.4)$$

$$+ \frac{i}{2} e^{i\sigma_l} \left[\int_{r_t}^{\infty} \chi_{L_b J_b}^b F_{lj} H_{L_a}^- dr - S_{L_a J_a} \int_{r_t}^{\infty} \chi_{L_b J_b}^b F_{lj} H_{L_a}^+ dr \right]$$

felbontásába a függvények aszimptotikus alakját képzeljük, I_- -ban az exponenciális függvény kitevőjében r egyúthatója negatív, I_+ -ban pozitív lesz. A H^+ (H^-) függ-



1. ábra. Integrálási kontúr a komplex r síkon [10]

vény az origóbeli elágazási ponttól és a negatív (pozitív) imaginárius tengely menti elágazási vonaltól eltekintve analitikus. Ezért I_+ integrálja a valós tengely helyett $V_+ Q_+$, I_- -é $V_- Q_-$ vonala mentén is elvégezhető (1. ábra). Ám az előbbiek miatt I_{\pm} integrandusa V_{\pm} mentén a valós tengelytől távolodva exponenciálisan csökken

és $Q_{\pm} (\rightarrow \infty)$ mentén (az integrállal együtt) nulla. Ez Fortune és Vincent módszerének lényege [9, 10].

Bunakov a T -mátrixnak a határfeltételeket tökéletesen involváló Gerjuoy-elméletből [14] vett

$$T_{fi}^{DW} = \langle X_f^- | V_1' | X_i^+ \rangle - T(X_f^{-*}, X_i^+) \quad (2.5)$$

formulájából indul ki [5]. A T operáció itt

$$T(f, g) = \int_{\infty} d\vec{\mathcal{F}} \mathcal{W}(f, g), \quad (2.6)$$

ahol $\int_{\infty} d\vec{\mathcal{F}}$ a $3n$ dimenziós tér (összesen n részecskénk van) origó középpontú végtelen sugarú gömbjének felületén való integrálást jelent, \mathcal{W} pedig a

$$W_j = \frac{\hbar^2}{2m} (f \nabla_j g - g \nabla_j f) \quad (j=1, \dots, n) \quad (2.7)$$

komponensű vektor (m egy nukleon tömege*).

A (2.5) első tagját (a $V_{bA} \simeq U_{bB}$ közelítést eleve alkalmazva)

$$\langle X_f^- | V_{bx} | X_i^+ \rangle = \int_0^R d\vec{r}_{xA} \int_0^{\infty} d\vec{r}_b \int_0^{\infty} d\zeta X_f^{-*} V_{bx} X_i^+ + \int_R^{\infty} d\vec{r}_{xA} \int_0^{\infty} d\vec{r}_b \int_0^{\infty} d\zeta X_f^{-*} V_{bx} X_i^+ \quad (2.8)$$

módon két tagra bontjuk. A X_f^+ , majd X_f^- Schrödinger-egyenletének, végül a Green-tételnek a felhasználásával, a teljes kinetikus energiaoperátorára a $T = T_{bx} + T_{aA} = T_{xA} + T_{bB}$ jelölést bevezetve, a második tagra az

$$\int_R^{\infty} d\vec{r}_{xA} \int d\vec{r}_b \int d\zeta X_f^{-*} V_{bx} X_i^+ = \int_R^{\infty} d\vec{r}_{xA} \int d\vec{r}_b \int d\zeta X_f^{-*} (E - T - H_A - U_{aA}) X_i^+ = \quad (2.9a)$$

$$\begin{aligned} &= \int_R^{\infty} d\vec{r}_{xA} \int d\vec{r}_b \int d\zeta [(TX_f^{-*}) X_i^+ - X_f^{-*} T X_i^+ + X_f^{-*} (V_{xA} + V_{bA} - U_{aA}) X_i^+] = \\ &= \int_R^{\infty} d\vec{r}_{xA} \int d\vec{r}_b \int d\zeta X_f^{-*} (V_{xA} + V_{bA} - U_{aA}) X_i^+ - \\ &\quad - \frac{\hbar^2 R^2}{2m} \int d\vec{r}_b \int d\zeta \int d\Omega_{xA} w_{r_{xA}=R} (X_f^{-*}, X_i^+) + T(X_f^{-*}, X_i^+) \end{aligned} \quad (2.9b)$$

formulát nyerjük. Itt a

$$w_{r_{xA}}(f, g) = f \frac{\partial}{\partial r_{xA}} g - g \frac{\partial}{\partial r_{xA}} f \quad (2.10)$$

* Bunakov tárgyalása nyomán itt A tömegét végtelennek vesszük.

jelölést vezettünk be. (2.9b) első tagja a prior mátrixelem ($r_{xA} > R$)-tól származó járuléka, mely ha $R > R_{\text{mag}}$, eltűnik. A harmadik tag viszont, mely a divergens részt tartalmazná, a (2.5)-be helyettesítés után kiesik. Így a

$$T_{fi}^{DW} = \int_0^R d\tilde{r}_{xA} \int_0^\infty d\tilde{r}_b \int_0^\infty d\xi X_f^{-*} V_{bx} X_i^+ - \frac{\hbar R^2}{2m} \int_0^\infty d\tilde{r}_b \int_0^\infty d\xi \int d\Omega_{xA} w_{r_{xA}=R} (X_f^{-*}, X_i^+) \quad (2.11)$$

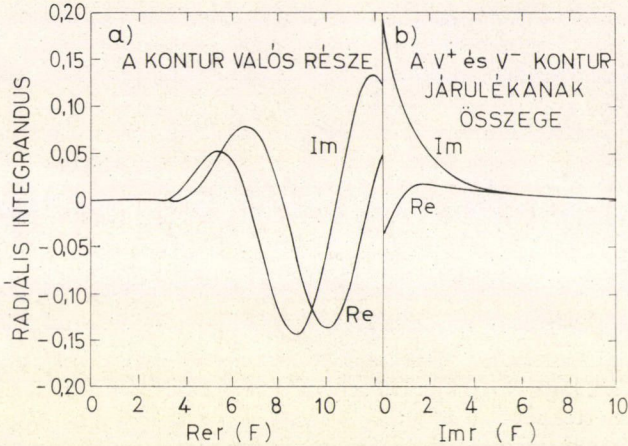
egzakt formulát kapjuk. Ebben szerepel az $R(>R_{\text{mag}})$ önkényes paraméter, melytől a két tag külön-külön függ, de az egész kifejezés értéke, mint a Green-tételnek egy gömbhéjra való alkalmazásával ellenőrizhetjük, R -tól független.

Az első tag a szokásos (ZR, FR-korrekción) közelítéssel [5], tehát egy közönséges DWBA-szubrutinnal számítható. A felületi integrál kiszámítása azonban újabb közelítést kíván. Az R -et meg lehet úgy választani, hogy a belső tartomány jóval nagyobb járulékot adjon a külsőnél, így a felületi integrál kiszámításának „lokális impulzus-WKB-közelítése” [5] megengedhetőnek látszik. Ennek az az eredménye, hogy a felületi járuléka a radiális függvények Wronski-determinánsának ugyanolyan alakú lineáris kombinációja lesz, mint az R -ig vett (1.23) típusú radiális integrálok a térfogati járuléknak. E közelítés jogossága egyszerűen ellenőrizhető, mert tőle a T_{fi} R -függő lett. Az R -függés vizsgálatával megmondható, hogy a közelítés pontossága mennyire érzékeny a rezonancia szélességére.

A konvergenciafaktoros módszer volt történetileg az első, és ma is legelterjedtebb. Megalkotói számolásuk konkrét részleteiről semmit nem közöltek [7]. A komplex függvénytani módszert kifejlesztő szerzőcsoport [15, 10] erősen bírálja ezt az eljárást. Szerintük a konvergenciafaktor alkalmazása nem csökkenti a szükséges integrálási tartományt. Kimutatják, hogy a [7] esetben az ésszerű pontosság minden α -értékhez $R \geq 580$ fermit követel, de ez a sűrű oszcilláció miatt szükséges kis lépésközhez képest nagy integrációs tartomány újabb túl nagy pontatlanság forrása. Ennek ellentmond a Huby—Mines-eljárást legtöbbször használó csoport véleménye [16]: szerintük az integrációs határ, az α -értékek sorozata és a figyelembe vett parciális hullámok számának változtatásával az eredmény pontossága biztonságosan ellenőrizhető, és keskeny rezonanciákra az eljárás jól bevált. A Huby és Mines által csak elvi lehetőségként emlegetett [6] módszert, sorfejtést parciális hullámokba konvergenciafaktor nélkül, is használták [15], és ún. kvázikötött állapotokra, melyek „technikailag nem kötöttek, de a magas penetrabilitás miatt” ezt alig érzik, újabban is használják [17, 18]. Youngblood, Kozub és szerzőtársai azt találták, hogy alacsony R -eknél az R növelésével a hatáskeresztmetszet — bár periodikusan — de nem túl drasztikusan változik, s bizonyos szintekre már $R = 100$ fm elégnek bizonyult, olyanokra pedig, amelyekre az F_{ij} külső és belső amplitúdóinak hányadosa nagyobb 0,01-nél, $R = 200$ fm-t [18] használtak. Ha az így kapott mátrixelem R -függő, R egy sorozatára való átlagolással a számolás pontosabbá tehető [15].

Kétségtelen, hogy — amennyiben megbízható komplex Coulomb-procedúrát használnak — Fortune és Vincent módszere a legegyszerűbb, és ráadásul a legszélesebb tartományban külön diszkusszió nélkül alkalmazható. Integráljuk gyors konvergenciáját a 2. ábra szemlélteti. Újabb számolásaiban a Huby-csoport is ezt az eljárást követi [34].

Bunakov módszerének fő érdeme ezzel szemben koncepcionális újdonsága és gondolatmenetének következetessége: az integrálok többértékűségét e többértékűség forrásának megszüntetésével küszöböli ki. A levezetés új fényt vet a Huby—Miner-módszere is, s közvetve azt és a vele egyenértékű Fortune—Vincent-módszert is alátámasztja. A felületi integrál alkalmazott közelítése meglepően jónak bizonyult:



2. ábra. Tipikus integrandus
Vincent és Fortune kontúrja mentén [10]

a felületi integrál elhagyásával a szögeloszlás erősen R -függő, és a mértől távol áll, megtartásával viszont R -függése akármelyik szögben kisebb, mint 10%, és a kísérlettel jól egyezik. A hatáskeresztmetszet azon értékek körül ingadozik, melyeket a rezonáns hullámfüggvény csomóponthelyeivel egyenlőnek választott R -rel nyertek [11].

Mindhárom módszerrel ugyanazon esetre, az $^{16}\text{O}(d, p)^{17}\text{O}$ reakció 5,08 MeV gerjesztési energiájú $3/2^+$ rezonanciájára, melynek 0,933 MeV-es $1d_{3/2}$ neutronja 94 keV szélességgel bomlik, ugyanolyan optikai paraméterekkel elvégezték a számításokat [7, 10, 11]. A szögeloszlás mindhárom esetben kielégítően egyezik a méréssel. A [19] szerint korrigált mérési eredményekkel számított spektroszkópiai faktorok rendre 1, 0,78 és 0,75. Az $A=90$ tartomány izobár analóg rezonanciáira vezető stripping reakciókra különböző szerzők [16, 18, 20] eredményeinek eltérése már nem tulajdonítható egyszerűen az eltérő számítási módszereknek.

3. §. A rezonáns végállapot

A stripping reakció során az A mag leszakítja az x nukleont a bombázó a részecskéről, és befogja egy olyan pályára, mely esetleg több egyrészeske-szintből van kikeverve, miközben ő maga — a direktreakció-hipotézis szerint — nem változtatja meg szerkezetét. Ha a B rendszer állapota pozitív energiájú, a folyamat az



szkéma szerint megy végbe. A hatáskeresztmetszet megnő, és a magszerkezet-vizsgálat szempontjából különösen érdekessé válik, ha B az A — x -rendszer rezonáns állapota. Ilyenkor az x részecske viszonylag hosszú ideig tartózkodik az A törzs közelében, vele „kvázikötött” állapotot alkot. A rezonanciához diszkrét kvantumszámok rendelhetők, energiája azonban elmosódott, vagyis mért értékét csak két számmal, a rezonancia „helyével” és „szélességével” tudjuk kimerítően jellemezni. Az elmélet fő törekvése arra irányul, hogy ezen alapján véve időfüggő állapotokat a stacionárius elmélet keretében értelmezze. Ez gyakorlati szükségszerűség, de elvileg is alátámasztható, hiszen a rezonancia az időfüggő állapotok olyan határesetének fogható föl, amely úgy viselkedik, mint egy stabil állapot, azzal a különbséggel, hogy bizonyos mérhető adataiban a kvantummechanikai határozatlanságon túlmenő bizonytalanság van. Ezt a tényt tükrözi az összes rezonanciaelméletnek az az igyekezte, hogy a rezonanciát diszkrét energiával („energia-sajátértékkel”) és egyértelmű „sajátfüggvénnyel” ruházza föl, melynek révén a kötött állapottal azonos elbánásban részesülhet. A rezonancia e szemlélet szerint nemcsak egyszerűen x és A részecske mozgása egymás erőterében, hanem a B *magnak egy* szuverén állapota. A bomló állapotra vezető stripping reakció a B mag ezen állapotainak egyik legalkalmasabb szondája. A formafaktor megválasztásának problémája egyrészt általában a bomló állapotok leírásának kérdése, másrészt azt is tartalmazza, hogy e leírásmódok a DWBA-ba hogyan olvashatók be, mennyire és mennyiben célszerűek és egyenértékűek.

A továbbiakban olyan bomló állapotokkal foglalkozunk, melyek adott l -, j -vel rendelkező rezonanciát alkotnak. Ha a többi nyitott csatorna létezését nem vesszük figyelembe, akkor az x csatornában U_{xA} valós potenciálon való rugalmas szórással van dolgunk. Ha a kicserélődési effektusokat elhanyagoljuk, U_{xA} energiafüggetlen. A kicserélődési kölcsönhatás akkor lesz kicsi, ha x és A nukleonjainak fedése az, vagyis a magon belül x hullámfüggvénye kicsi; vagy akkor is, ha a rezonancia olyan parciális hullámban van, amely nem szerepel A nukleonjainak héjmodell-konfigurációjában. A rezonancia-hullámfüggvény belső amplitúdója nagy, ezért ha az utóbbi körülmény nem teljesül, a kölcsönhatás csak a rezonancián kívül független az energiától, vagyis csak a háttér-szórást írja le helyesen. Ezenfelül A virtuális gerjesztése a rezonancia-energiát — az egyrészecske-szélesség nagyságrendjében [10] — általában eltolja, más szóval U_{xA} a rezonancia környékén emiatt is energiafüggő lesz. Mégis azt reméljük, hogy a fizikai rezonanciához közel kell az egyrészecske-potenciálnak egy rezonanciával rendelkeznie. Ez az okoskodás igaz az izobár analóg rezonanciára is, ha az U_{xA} tartalmazza a Lane-potenciált (lásd pl. a [21] hivatkozást). Van azonban egy könnyebbség a kötött állapotra vezető reakciókkal szemben: az energiafüggetlen lokális U_{xA} potenciál optikai paramétereit az x — A -szórás kísérletek eredményeihez úgy idomíthatjuk, hogy éppen a vizsgált rezonancia körül adja vissza legjobban a kísérleti fázistolást.

Az egyrészecske-képtől való eltérést legszokásosabban spektroszkópai faktor bevezetésével építik be (lásd az 5. §-t). Más lehetőség, hogy a potenciálhoz fenomenologikusan újabb tagokat csapnak hozzá. A kísérletileg mért szélesség az egyetlen csatornában előállítható, ha a potenciál komplex. Energiafüggő tag beiktatása a kicserélődési kölcsönhatást veheti figyelembe. Izobár analóg rezonanciák leírására bevezethetjük a $\vec{i}_x \vec{T}_A$ izospinszorzattal arányos Lane-potenciált. Ennek analógiájára polarizációs kísérletek kiértékeléséhez valószínűleg $j\vec{J}_A$ típusú tag figyelembevétele szükséges [5]. Azt, hogy a végállapot egy összetett rezonancia egy komponense,

a stripping-elmélet keretében a különböző kontinuum-héjmodellel és projekciós technikával dolgozó elméletek, pl. a Fano—Feshbach-elmélet [22, 16] vagy a Weinberg-féle kvázirészecske-elmélet [23] segítségével lehet leírni.

Ez utóbbi leírásmódok elvileg a legáltalánosabbak. A rezonancia két alapvető nézőpontja, a projekciós és a héjmodelltechnikaé keveredik bennük, némileg gyakorlati igények szerint adagolva. A Feshbach-féle projekciósoperátor-elméletben (lásd pl. a [24] hivatkozást) minden rezonancia egy nemlokális és energiafüggő effektív kölcsönhatás potenciálrezonanciája. A héjmodell szerint a nemegyrészecske-rezonancia kontinuumba ágyazott kötött állapot (lásd pl. [25]), vagyis saját csatornájukban negatív és pozitív energiájú állapotoknak a maradék-kölcsönhatás által előidézett konfiguráció-keveredése.

Most vizsgáljuk meg, a Fano-féle kontinuum-héjmodell [26] milyen eredményt ad a hullámfüggvényre azon legegyszerűbb esetben, ha egy h_0 rendszer E_n energiájú φ_n diszkrét állapota be van ágyazva egy ψ_E kontinuumba. A rendszer $\Psi(E)$ hullámfüggvénye akkor

$$\Psi(E) = a(E)\varphi_n + \int dE' b(E')\psi_{E'} \quad (3.2)$$

formájú. Az $a(E)$, $b(E)$ együtthatót a teljes $H = h_0 + v$ Hamilton-operátornak a $\{\varphi_n, \psi_E\}$ ortonormált bázison való diagonalizálása segítségével határozhatjuk meg:

$$E_n a(E) + \int dE' V_{E'}^* b(E') = E a(E) \quad (3.3a)$$

$$V_{E'} a(E) + E' b(E') = E b(E'). \quad (3.3b)$$

Itt $V_{E'}$ a

$$V_{E'} = \langle \psi_{E'} | H | \varphi_n \rangle = \langle \psi_{E'} | v | \varphi_n \rangle \quad (3.4)$$

mátrixelemet jelenti. A disztribúciók terében $b(E')$ -re megoldva a (3.3b) egyenletet, a

$$b(E') = \left[\frac{1}{E - E'} + z(E') \delta(E - E') \right] V_{E'} a(E) \quad (3.5)$$

kifejezésre jutunk, melyben $z(E)$ -t (3.3a)-ba való helyettesítéssel kapjuk:

$$z(E) = \frac{E - E_c}{|V_E|^2}, \quad E_c = E_n + P \int dE' \frac{|V_{E'}|^2}{E - E'}. \quad (3.6)$$

Itt P a Cauchy-féle főértéket jelenti. $a(E)$ -t $\Psi(E)$ Dirac- δ -ra való normáltságából lehet meghatározni:

$$|a(E)|^2 = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{2} \Gamma}{(E - E_c)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}, \quad \Gamma = 2\pi |V_E|^2. \quad (3.7)$$

Végeredményben:

$$\Psi(E) = a(E) \left(\varphi_n + P \int dE' \frac{V_{E'} \psi_{E'}}{E - E'} + \frac{E - E_c}{V_E^*} \psi_E \right). \quad (3.8)$$

A rezonancia a kötött állapot energiájához képest a (3.6) formula szerint eltolódik, és (3.7) szerint kiszélesedik. A hullámfüggvény a kötött állapotot egy Breit—Wigner-amplitúdóval szorozva tartalmazza. A kontinuum járulékanak egyik tagja a rezonanciában eltűnik. A másik tag akkor lesz jelentős, ha a kontinuumban is

van egy rezonancia. Ez az egyszerű szkéma az 5. §-ban lehetővé teszi majd egy bonyolult magállapot szórési csatornához adott hozzájárulásának megbecsülését.

Huby [23] is olyan szórásproblémát vizsgál, amelyben a rendszer kötött állapotai egycsatorna-rezonanciához csatolódnak. A rezonanciát egy Weinberg-állapottal [27] azonosítja. A kölcsönhatást különböző fizikai jelentésű tagokra vágja, közelítésekkel él, és ezzel sikerül a hullámfüggvényre olyan formulát nyernie, mely kielégíti a fizikai várakozást.

A Hamilton-operátort a spint elhanyagolva

$$H = H_A + T_{xA} + U(r) + V(r, \xi) \quad (3.9)$$

formában veszi fel, ahol $V(r, \xi)$ a maradék-kölcsönhatás. Feltételezi, hogy csak az elasztikus csatorna van nyitva; erre a P operátor vetít, $Q = 1 - P$. A problémát egyetlen parciális hullámra fogalmazza meg. A síkhullám l -edik komponense $\varphi_l = \varphi_l^0(\vec{r}_{xA}, \epsilon)\psi_{A,0}(\xi)$. H -t úgy bontja föl

$$H = H^0 + H' \quad (3.10)$$

formára, hogy pozitív energiájú állapotban H^0 az x - A -rendszer mozgását kölcsönhatásmentesen, negatív energián viszont az átlagpotenciálban jellemezze:

$$PH^0P = P(H_A + T_{xA})P, \quad (3.11a)$$

$$QH^0Q = Q(H_A + T_{xA} + U)Q, \quad (3.11b)$$

tehát

$$H' = PUP + V. \quad (3.11c)$$

A H' -ről leválaszt egy szeparábilis V_0 tagot, mely csak az egyetlennek tekintett $|\alpha_0\rangle$ egyrézecske-rezonancia („kvázirészecske”) létrehozásában játszik szerepet:

$$V_0 = \frac{PH'P|\alpha_0\rangle\langle\tilde{\alpha}_0|PH'P}{\langle\tilde{\alpha}_0|PH'P|\alpha_0\rangle} \quad PH'P = V_0 + V', \quad (3.12)$$

ahol az \sim az időtükrözést jelenti [12, 27]. Ezt arra használja, hogy a

$$\Psi^+ = \varphi_l + I\Psi^+ \equiv \varphi_l + \frac{1}{E - H^0 + i\epsilon} H' \Psi^+ \quad (3.13)$$

Lippmann—Schwinger-egyenlet I magjáról a QH^0Q egyenletének $|\alpha_i\rangle$ ($i=1, \dots, M$) megoldásai mellett a Green-operátor sorfejtésének $|\alpha_0\rangle$ -hoz tartozó tagját is leválassza:

$$I = I_0 + I_1 + I_2 \equiv \frac{1}{E - H^0 + i\epsilon} [(V_0 + QH') + PH'Q + PV'P]. \quad (3.14)$$

Így az I_2 -höz tartozó $F_2 \equiv (1 - I_2)^{-1} - 1$ rezolvens Born-sora a Weinberg-elmélet szerint gyorsan konvergál [27]. Ez adott esetben lehetővé teszi $1 + F \equiv (1 - I)^{-1}$ és így a Ψ^+ közelítő kiszámítását is. Az $|\alpha_0\rangle$ kvázirészecskét Huby az

$$\frac{1}{E - H^0 + i\epsilon} PUP\Psi_0(E) = \eta(E)\Psi_0(E). \quad (3.15)$$

Weinberg-féle sajátérték-egyenlet megoldásának választja:

$|\alpha_0\rangle \equiv |\Psi_0\rangle$. Világos, hogy Ψ_0 a

$$\Psi_0(\vec{r}_{xA}, \xi, E) = \psi_0(\vec{r}_{xA}, E) \psi_{A,0}(\xi) \quad (3.16)$$

alakban szeparálódik, és ψ_0 az U potenciálon való szórás Weinberg-függvénye:

$$\left(T_{xA} + \frac{U}{\eta}\right) \psi_0 = E \psi_0. \quad (3.17)$$

A sajátérték-probléma határfeltétele az, hogy ψ_0 legyen az origóban reguláris, aszimptotikusan pedig tisztán kifutó hullám. Ez pozitív valós energián nyilvánvalóan csak diszkrét komplex η -kra teljesülhet. Im $\{\eta\} (<0)$ révén a (3.17) Schrödinger-egyenlet (U/η) potenciálja pozitív képzetes résszel rendelkezik, amely „forrásként” működik, és képes helyettesíteni a befutó hullámot. Egy rezonancia E_0 energiáját $\text{Re } \{\eta(E_0)\} = 1$ definiálja. Ha az U szórási probléma S -mátrixának a valós tengelyhez közel van pólusa, akkor nyilvánvalóan $\text{Im } \{\eta(E_0)\} \ll 1$. Huby a Weinberg-függvény minden komplex mátrixelemét valós részével helyettesíti. A Weinberg-sajátfüggvényt lényegében [28] a Gamow-függvény mintájára [12] normálja, vagyis $1 = \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle$ -ban a radiális integrál helyére a

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int dr e^{-\alpha r^2} \quad (3.18)$$

műveletet helyezi.

A megoldás közben a rezolvensről az $(1 + F_2)(1 + I_1)$ tag leválasztható; ez a Ψ^+ befutó részét adja. A maradékot $|\alpha_0\rangle, \dots, |\alpha_M\rangle$ -en diagonalizálva az

$$|\omega_\lambda\rangle = \sum_{\mu=0}^M t_{\mu\lambda} |\alpha_\mu\rangle \quad (\lambda=0, \dots, M) \quad (3.19)$$

W_λ energiájú, Γ_λ szélességű sajátállapotok lineáris kombinációját nyerjük. A megoldás egy W_λ nível közelében

$$\Psi^+ \simeq \left(1 + \frac{1}{E - H^0 + i\varepsilon} V'\right) \varphi_l + \left(\frac{\Gamma_\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{E - W_\lambda + \frac{i}{2} \Gamma_\lambda} \left(1 + \frac{1}{E - H^0 + i\varepsilon} PV\right) |\omega_\lambda\rangle, \quad (3.20)$$

ahol a Γ_λ nívószélesség

$$\Gamma_\lambda = 2\pi |\langle \varphi_l | H' | \omega_\lambda \rangle|^2 \quad (3.21)$$

módon van definiálva. Ebből a rezonanciafüggvény összetételét tagról tagra leolvashatjuk: a befutóhoz az x - A -kölsönhatás nem rezonáns része által torzított hullám adódik — itt első Born-közelítésben; a rezonáns rész egy egységes Breit-Wigner-amplitúdóval rendelkezik, és két tagból áll: az első a Weinberg- és a kötött állapotok egyszerű járuléka, a második újabb rezonáns jelet hordoz, mely a maradék-kölsönhatástól származik.

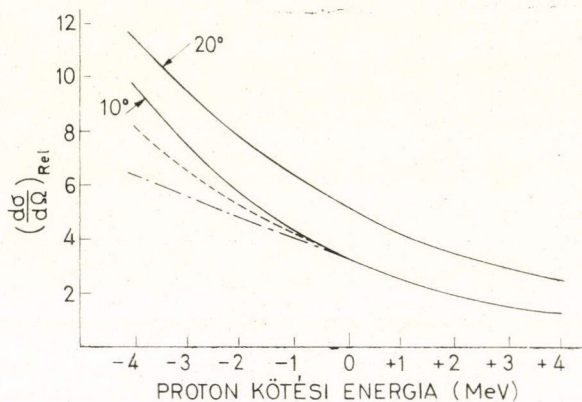
A most ismertetett és a hasonló, meglehetősen körmönfont rezonanciafüggvényeknek a direkt folyamathoz tartozó tagját alapos egyszerűsítések után használják formafaktorként. A DWBA-számolás úgyis pontatlanabb, hogysem nagyon finom effektusokat nyomon követhetnénk segítségével. A (3.8) és a (3.20) összefüggés azonban alkalmas ad a spektroszkópiai faktor értelmezésének kiterjesztésére. A 4. §-ban a formafaktorról, az 5.-ben a spektroszkópiai faktorról foglalkozunk.

4. §. Rezonáns állapotok formafaktora

A formafaktor megválasztásának első durva közelítését a héjmodell szemlélet és a (3.8) formula sugallja: hanyagoljuk el a kontinuum járulékát, és hagyjuk meg a φ_n kötött állapotú függvényt. Izobár analóg rezonanciára vezető protonátadó reakciókban így közelítünk, amikor az izospinmegmaradást sértő kölcsönhatásokat elhanyagoljuk:

$$\psi_p \propto t - \psi_n. \quad (4.1)$$

Valóban, annak köszönhetőleg, hogy a belső tartományban a proton optikai és a Coulomb-potenciál összege a neutron optikai potenciállal közel egyenlő, ott ψ_p és ψ_n hasonló alakú. A stripping reakciókban azonban éppen a felületi járulék a döntő, és ott a két függvény már eléggé eltér. A kötött állapotú függvény farokviselkedése egy kissé a nem kötött állapotúhoz idomítható, ha a potenciál sekélyítésével a szintet igen gyengén kötötté tesszük (lásd a 4. ábrát). Erre nézve számos összehasonlító adat található a [15, 10, 8, 16] hivatkozásokban. Általánosan megállapítható, hogy a rezonanciaállapotú formafaktor jobban visszaadja a kísérleti szögeloszlást, bár előfordul, hogy a kötött állapotival számolt is elég jól közelíti [10]. A σ_{DW} nagysága azonban a két formafaktoral számolva általában többszörös faktoral eltér; a spektroszkópiai faktoral ezért kötött formafaktoral végzett számolással nem várhatunk információt [15, 10, 29].



3. ábra. Példa a hatáskeresztmetszet kötésienergiafüggésére [17]. A -.- vonal a kötöttből való lineáris, a - - - - - kvadratus extrapolációt jelent, a folytonos a tényleges számolást. Pozitív kötési energia kötött állapothoz tartozik

A hatáskeresztmetszetnek az átadott részecske kötési energiájától való függését követhetjük nyomon a 3. ábra alapján [17]. A kötési energiát a potenciálmélység változtatásával szabályozták, miközben a Q -érték állandó volt. Ezalatt a szögeloszlás lényegében azonos tendenciájú maradt, kissé meredekebb hajlással és — összhangban a bomló állapotról vivő átmenetekkel kapcsolatos általános kísérleti és elméleti tapasztalattal — kevesebb „szerkezettel”. Az eredmény óvatosságra int a kötött állapotról rezonanciába való mindenfajta extrapolációval szemben.

Egynukleon-rezonanciára vezető reakciók formafaktor-választásának megvan a kvantummechanikailag következetes módja. Ezt az előző §-ban ismertetett módokon összetett rezonanciákra is kiterjesztik. A formafaktor minden egyes energián az $A(x, x)A$ rugalmas szórás fázisát visszaadó

$$U_{xA}(r) = (V_0 + iW_0)f(r) + \left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2 \frac{V_{so}}{r} \frac{df}{dr} \vec{l} \vec{\sigma} \quad (4.2)$$

alakú optikai potenciál hullámfüggvénye [6]. Minden — általunk ismert — konkrét számításban $W_0=0$ és V_{so} valós szám. Itt

$$f(r) = \{1 + \exp[(r - \frac{R_1}{2})/a]\}^{-1}, \quad R_1 = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad (4.3)$$

a Saxon—Woods-alakfaktor. E módszernek megvan az a szépséghibája, hogy a rezonancia diszkrét sajátosságát általában nem tükrözi. Emellett rendkívül számolás-igényes.

A [15] referencia szerint különösen protonrezonancia esetén nagyon lényeges, hogy a rezonancia tartományában a potenciál pontosan adja vissza az l -edik parciális hullámfüggvény valóságos fázistolásait, mert ennek függvényében a külső csomópontok helye változik, és a hatáskeresztmetszet nagysága a csomópontok és az integrációs felső határ relatív helyzetére igen érzékeny. Más módszer [17] ezt kiküszöböli, egyrészt az integrációs felső határ növelésével, másrészt az R -mátrix-elméletben szokásos „renormálás” [43, Függelék e pont] alkalmazásával:

$$\int_0^{R_{TP}} f_{ij}^2 dr = 1, \quad (4.4)$$

ahol R_{TP} a külső klasszikus fordulópont: az a nagyobbik sugárérték, amelyben a Coulomb-potenciál az energiával egyenlő. Kötött állapotú függvényre természetesen $R_{TP} = \infty$. A hullámfüggvény alakja az R_{TP} -n belül — különösen a magfelületen és még beljebb — a fázis $(\pi/2)$ -es változtatására is alig változik. Annál inkább változik a belső amplitúdónak a külsőhöz való viszonya. Ám a (4.4) normálás a külső amplitúdót nem érzi, ezért a hatáskeresztmetszet nagysága csak a magtól távolról származó járulékok súlyának arányában változik a fázis változtatásával. Hasonló hatást ér el *Fortune*-nak és szerzőtársainak az a normálási módszere, hogy a belső amplitúdót egy normált, a belső tartományon hasonló alakú kötött állapotú függvény amplitúdójával egyenlőnek rögzítik [15].

Minden ilyenfajta, kötött állapotra emlékeztető normálás törekvés arra, hogy egyetlen diszkrét energiához tartozó hullámfüggvénnyel jellemezzék a rezonanciát. Ezzel természetesen elvész az energiafüggésre vonatkozó részletes információ. Így ezek a normálások nyilvánvalóan nem teszik lehetővé a rezonanciaalak letapogatását. Youngblood és Kozub is szórási függvénnyel a rezonancia egészét írja le. A rezonanciafüggvényt egy igen plauzibilis előírással egységesítik [17, 18]: a Woods—Saxon-völgy mélységét úgy választják meg, hogy a kívánt energián a függvény külső és belső amplitúdójának A_{ex}/A_{in} aránya minimális legyen.

Bunakov szintén szórási függvényt használ. A rezonanciát a $\delta = \pi/2$ előírással definiálja; ehhez állítja be a potenciál mélységét [11]. A rezonanciát következetesen ezen potenciál szórási állapotainak folytonos sokaságaként értelmezi. A szórási rezonancia hullámfüggvényére [30] nyomán plauzibilis feltevést tesz, és ebből meg-

kapja a stripping reakcióban észlelhető rezonanciák alakját. Nevezetesen, a rezonanciafüggvény szórásra normálva

$$f_{lj}(r) = \begin{cases} A(k)u_l(r) & r < R_{\text{mag}} \\ e^{i\delta_l} \sin\left(kr + \delta_l - \frac{1}{2}l\pi\right) & r > R_{\text{mag}} \end{cases} \quad (4.5)$$

alakú, ahol az u_l

$$\int_0^R |u_l|^2 dr = 1 \quad (4.6)$$

módon normált, és rezonanciában

$$A(k) \simeq \left[\frac{k\hbar^2}{2\mu} \frac{\frac{1}{2}\Gamma}{(E - E_{\text{res}})^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.7)$$

$R=R_{\text{mag}}$ -ot választva f_{lj} eme formuláját az átmeneti mátrixelem képletébe írva [5], a rezonancia benne explicite jelentkezik. A belső tartomány járuléka a rezonáns rész, a külső tartomány a háttér. A hatáskeresztmetszetben e két tag a szokásos módon interferál.

Számításában *Bunakov, Gridnyev és Krasznov* [11] az E_x energia függvényében tapogatja le a rezonancia alakját. Kiderül, hogy habár a rezonáns szórási függvény erősen változik a rezonancia tartományában, mégis a szögeloszlás jó közelítésben független az energiától:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma}{(E - E_{\text{res}})^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} f(\theta). \quad (4.8)$$

Ezzel a rezonanciát egyetlen diszkrét állapotként felfogó közelítések jogosságát támasztja alá.

Bang és Zimányi a kontinuumaspektusról a diszkrét állapoti nézőpontra az x - A -probléma S -mátrixának pólusához tartozó megoldás, az ún. Gamow-hullám-függvény segítségével tér át [8]. Az $f_{lj}(k, r)$ formafaktort, mely az $L=l$ -lél, $J=j$ -vel vett (1.24) egyenlet (4.2) potenciállal való megoldása, (1.25) szerint

$$f_{lj}(k, r) = \frac{1}{2} i(f^- - Sf^+) \quad (4.9)$$

formára bonthatjuk. Az $S = \exp\{2i\delta\}$ fázisa egy pólus közelében egy rezonáns és egy sima viselkedésű tag összegeként írható föl:

$$\delta = \delta_p(k) + \delta_1(k). \quad (4.10)$$

Ennek segítségével a formafaktor a következőképpen dekomponálható:

$$\begin{aligned} f_{lj}(k) = & \frac{e^{2i\delta_p(k)} - 1}{2i} e^{2i\delta_1(k_0)} f^+(k_0) + \frac{1}{2} i \{ [f^-(k) - e^{2i\delta_1(k_0)} f^+(k_0)] - \\ & - e^{2i\delta_p(k)} [e^{2i\delta_1(k)} f^+(k) - e^{2i\delta_1(k_0)} f^+(k_0)] \}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Bang és Zimányi a rezonáns δ_p -t

$$\frac{1 - e^{2i\delta_p(k)}}{2i} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma_0}{E - \left(E_0 - \frac{1}{2}i\Gamma_0\right)} \quad (4.12)$$

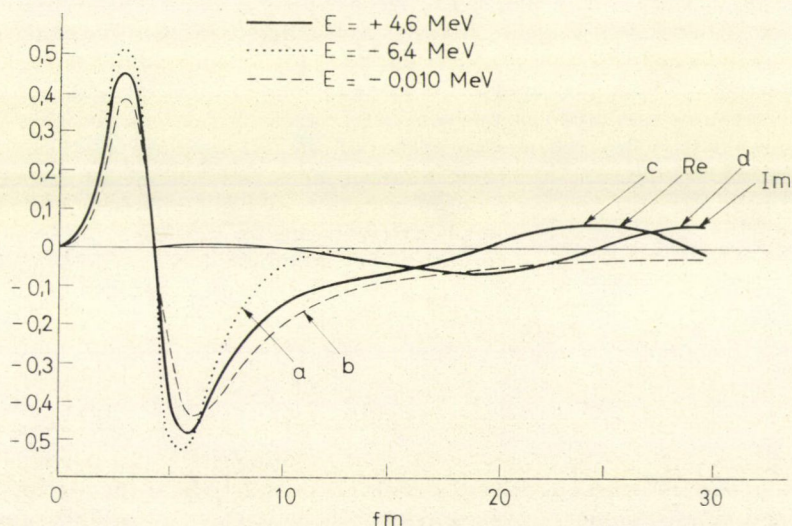
módon Breit—Wigner-alakkal közelítette, és a $\{$ }-ben levő tagot elhanyagolta. Az energiafüggés ily módon szeparálódik a radiális függvénytől, s az energia szerinti integrálás egyszerűen végrehajtható. Az $f^+(k_0)$ Gamow-függvényt úgy normálták, hogy aszimptotikusan

$$f^+(k_0) \sim \sqrt{2\gamma_0} \frac{e^{i(\kappa_0 - i\gamma_0)r}}{r} \quad (4.13)$$

legyen, ahol $k_0 = \kappa_0 - i\gamma_0$. Ez a normálás megegyezik a [12] hivatkozás szám példájában közelítőleg érvényes normálással, és a szerzők numerikus ellenőrzéssel úgy találták, hogy esetükben is körülbelül megegyezik a

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty f^{+2} e^{-\alpha r^2} dr = 1 \quad (4.14)$$

Berggren-féle [12] normálási eljárással. A 4. ábrán a Bang és Zimányi egyik számolásában használt Gamow-függvényt láthatjuk, két kötött állapot megoldással összehasonlítva.



4. ábra. A $^{90}\text{Zr}(d, n)^{91}\text{Nb}$ $E = 4,6$ MeV kötési energiájú $2d_{5/2}$ IAR-ra vezető reakció Gamow-formafaktora (——), a neutron analóg ($E \approx -7$ MeV,) és egy gyengén kötött neutronállapot ($E = -0,01$ MeV, — — —) normált radiális hullámfüggvénye [8]

Berggren egy egyszerűbb folyamat hatáskeresztmetszetére nyert olyan formulát, melyben a Gamow-függvény szerepel [31]. Rámutatott arra, hogy levezetése minden további nélkül végigvihető stripping reakcióra is. E levezetés szintén a rezonancia kontinuumszemléletéből indul ki, de nem használ semmilyen feltevést az S -mátrix energiafüggésének alakjára, és a Berggren-elméletet [12] következetesen használja. Így a hatáskeresztmetszetre — ellentétben a [8]-ban alkalmazott közelítéssel — komplex szám adódik.*

Huby a (3.20) függvény

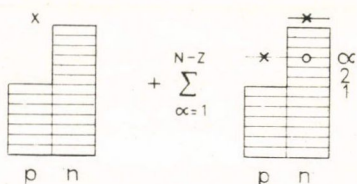
$$P\Psi^+ = \left(1 + \frac{1}{E - H^0 + i\varepsilon} V'\right) \varphi_l^0(\vec{r}_{xA}, E) \psi_{A,0}(\xi) + \frac{\Gamma_\lambda^2}{2\pi} \frac{1}{E - W_\lambda + \frac{i}{2} \Gamma_\lambda} \left[t_{0\lambda} \psi_0(\vec{r}_{xA}, E) \psi_{A,0}(\xi) + \frac{1}{E - H^0 + i\varepsilon} PV|\omega_\lambda\rangle \right] \quad (4.15)$$

„direkt” komponensének megfelelő - indexes „antiszórási” függvényt ajánlja ψ_B^- rezonanciaállapotnak, és módszerét „hü”-nek vagy „jól megalapozott”-nak nevezi [32]. Javasolja azonban ennek „ál-kötöttállapot” közelítéseként a Weinberg-állapotot tartalmazó tag meghagyását, a Weinberg-függvénynek valós részével való közelítését, oszcilláló farkának sima levágását és egyre normálását. Cole, Huby és Mines e módszert approximálja elvégzett számításában, úgy, hogy a Weinberg-függvény helyett a $\delta = \pi/2$ fázistolású rezonáns szórási függvényt csonkítja simán első külső csomópontjában [33]. A módszer 1 MeV-nél nem magasabb pozitív energiájú állapotokra mutatkozik kielégítőnek. A szerzők e drasztikus és önkényes közelítésének elfogadható eredménye összhangban van Bunakovnak [11] azzal a fentebb már idézett megfigyelésével, hogy R -t a csomópontok koordinátájának választva, módszere az egyéb R -ekkel kiszámolt értékek átlagát, tehát valószínűleg közel a pontos eredményt adja.

Különösen éles formában jelentkezik a formafaktor megválasztásának kérdése azokban a reakciókban, amelyekben a lényeges effektusokért a töltéscicserélő kölcsönhatás felel: az izobár analóg rezonanciára (IAR) vezető protonátadó strippingben és az $A(d, p)B$ reakcióban az $A(d, \bar{n})B'$ folyamat küszöbén, ahol a - az n fölött azt jelzi, hogy B' a B mag izobár analogonja. E két kérdéskört tekintjük most át.

Ha az $x=p$ proton (pozitív) energiája durván [21] a ${}^{A+1}_{Z+1}B_N$ mag ΔE_c Coulomb-eltolódásával haladja meg a ${}^{A+1}_{Z+1}C_{N+1}$ mag egy energiaszintjét, akkor nagy valószínűséggel az idegen izospinú kör-

nyezet miatt tartós élettartamú, 5. ábra szerinti szerkezetű IAR-ba fogódik be. Indexként az izospin és vetületének kvantumszámát bevezetve, a nukleon izospinvektó-



5. ábra. Az IAR skémája.
x nukleont, o lyukat jelent.

* A hatáskeresztmetszet mérhető értékét e mennyiség valós részének tulajdoníthatjuk, a képzetes rész annak a bizonytalanságnak a mértéke, amely a rezonanciaállapot meghatározatlanságából adódik.

rát külön kiírva, a spinváltozót viszont most nem jelölve, a B hullámfüggvénye a

$$\begin{aligned} \psi_B(\vec{r}_{xA}, \xi_x, \xi_A) &= |A; p\rangle + |D; n\rangle = \\ &= \psi_{T_A T_A}(\xi_A) \psi_p(\vec{r}_{xA}) \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \psi_{T_A T_A-1}(\xi_A) \psi_n(\vec{r}_{xA}) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

formát ölti. Itt D a $D = A - n + p$ analóg szintet jelenti; ψ_p és ψ_n nem normált. A kötött neutronállapotnak a protonkontinuumhoz való csatolását a

$$i_x \vec{T}_A U_S(\vec{r}) = U_S(r) t_{x,3} T_{A,3} + \frac{1}{2} U_S(r) (t_{x,+} T_{A,-} + t_{x,-} T_{A,+}) \quad (4.17)$$

Lane-potenciál második tagja biztosítja ($t_{x,3}$, $T_{A,3}$ az izospinek 3. komponense, $t_{x,\pm}$, $T_{A,\pm}$ a léptető operátorok):

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{xA} - \frac{T_A}{2} U_S + V_C - E \right) \psi_p + \sqrt{\frac{T_A}{2}} U_S \psi_n &= 0, \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{xA} + \frac{T_A-1}{2} U_S + \Delta E_C - E \right) \psi_n + \sqrt{\frac{T_A}{2}} U_S \psi_p &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Az $|A; p\rangle$ és a $|D; n\rangle$ függvényből az izospin-összeadás szabályai szerint képezhető a $T_+ = T_A + 1/2$ és a $T_- = T_A - 1/2$ tiszta izospinű

$$\left| T_A T_+ \frac{1}{2}, T_A - \frac{1}{2} \right\rangle = (2T_A + 1)^{-\frac{1}{2}} (|A; p\rangle + \sqrt{2T_A} |D; n\rangle) \quad (4.19a)$$

$$\left| T_A T_- \frac{1}{2}, T_A - \frac{1}{2} \right\rangle = (2T_A + 1)^{-\frac{1}{2}} (\sqrt{2T_A} |A; p\rangle - |D; n\rangle) \quad (4.19b)$$

állapot. Itt (4.19a) az az „analóg” állapot, melyet a szóban forgó direkt reakció gerjeszt.

IAR-k formafaktorának a (4.1) közelítése [29, 16] mellett, mely a spektroszkópiai faktor meghatározásában egyértelműen kudarcot vallott, általánosan használják a rezonáns szórási állapotokat is [18, 29, 34, 20]. Az IAR szintjénél mélyebben mindig létezik egy ugyanolyan radiális és impulzusmomentum-kvantumszámokkal jellemezhető proton egyrészecske-rezonancia [16]; a protonvölgy sekélyítésével ezt hozzák az IAR energiájára, s e függvénnyel közelítik az IAR egyrészecske-komponensét. Bang és Zimányi egyik Gamow-függvényes számolása is IAR-ra vonatkozott [8]. A potenciálszórásból meghatározott hullámfüggvényt az $|A; p\rangle$ -vel azonosítják. Belőle a $|T_A T_+ \frac{1}{2}, T_A - \frac{1}{2}\rangle$ állapot direkt komponensét, a formafaktort, (4.19a) szerint a $(2T_A + 1)^{-1/2}$ spektroszkópiai amplitúdóval beszorozva kapjuk. A formafaktor adekvát megválasztásán múlik, hogy e reakciótípusban észlelt anomáliákat sikerül-e a direktreakció-hipotézissel magyarázni (lásd az 5. §-t).

Zaidi és Coker [16] azzal az igénnyel nyúlt a problémához, hogy a kérdést a (4.18) Lane-modell alkalmazásával tisztázza. A

$$\left[T_{xA} + U_{xA} - \frac{T_A}{2} U_S + V_C + \Delta - E \right] \Phi_p = 0, \quad (4.20a)$$

$$\left[T_{xA} + U_{xA} + \frac{T_A - 1}{2} U_S + \Delta' - (E - \Delta E_C) \right] \Phi_n = 0 \quad (4.20b)$$

egyenletekkel definiálja az egysatorna-függvényeket. Itt Δ egy térfogati típusú potenciáltként, melyre egyetlen kikötése, hogy az IAR-val azonos kvantumszámú protonrezonanciát kötötté tegye; $\Delta' = 0$. A Φ_p -k részben a Φ_E állapotok folytonos, részben a Φ_i kötött állapotok diszkrét sokaságát alkotják, Φ_n az itt szerepet játszó kötött neutronállapot. Ezekből Feshbach-technikával [24] megkonstruálnak egy formafaktornak szánt bonyolult állapotot. Ebben a nemrezonáns szórt hullám T_A -tól nem függő tagként szerepel, a rezonáns járuléka viszont $(2T_A + 1)^{-1/2}$ -del szorozva, amelyből azt a következtetést lehet levonni, hogy T_A növekedésével az egysatornás közelítés egyre kevésbé állja meg a helyét.

A formula gyakorlatilag is használható változatát vezették le Fano-módszerrel. A v maradék-kölcsönhatásnak (4.17) jobb oldalának második tagját tekintették, következésképpen a (3.8) alakú eredményben a $\Delta = \Delta' = 0$ választással specifikált (4.20) egyenletek megoldásai szerepelnek egyrészcse-függvényként, továbbá

$$\psi_E = \Phi_E^- \left| A; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad \varphi_n = \left(\frac{2T_A}{2T_A + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \Phi_n \left| D; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (4.21)$$

$$V_E = \left(\frac{2T_A}{2T_A + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \langle \Phi_E^- | \sqrt{(1/2)T_A} U_S | \Phi_n \rangle.$$

Tudjuk, hogy közelben van az említett protonrezonancia E_{sp} energiája, melynek Γ_{sp} sugarú környezetében (4.1) és (3.8) szellemében Φ_E^- a

$$\Phi_E^- \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\frac{\Gamma_{sp}}{2}}{(E - E_{sp})^2 + \frac{\Gamma_{sp}^2}{4}} \right]^{\frac{1}{2}} \Phi_n \quad (4.22)$$

alakkal közelíthető. Az E_{sp} -t $\Delta = 0$ -ra elsőrendű perturbációs számítással megbecsülhetjük, ha kihasználjuk, hogy E_{sp} egybeesne az IAR E_c energiájával, ha $\Delta = T_A U_S$ -et választanánk [35]:

$$E_{sp} \approx E_c - T_A \langle \Phi_n | U_S | \Phi_n \rangle. \quad (4.23)$$

A Φ_E^- (4.22) rezonáns komponensével a (3.8)-beli főértékintegrált elvégezhetjük. A (3.8) ezek szerint specifikált alakjának direkt komponensét $|A; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ -re való

vetítéssel kapjuk:

$$\left\langle A; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \Psi^-(E) \right\rangle = a(E) \left[\frac{1}{\sqrt{2T_A+1}} \Phi_n + P' \int dE' \frac{V_{E'} \Phi_{E'}^-}{E-E'} + \frac{E-E_c}{V_E^*} \Phi_E^- \right]. \quad (4.24)$$

Itt P' a (4.22) integráljának levonásával maradt főértékintegrált jelenti. Zaidi és Coker $E=E_c$ -ben ezt használja formafaktornak. Mint látható, a második tag itt is tartalmazza a nemrezonáns szórt hullámokat.

A (4.24) hullámfüggvény mindazonáltal a (4.18) Lane-egyenletek $(2T_A+1)^{-1/2}\psi_p$ megoldásának csak egy közelítése. A Lane-egyenletek hasonló, de egyszerűbb és sok szempontból előnyösebb héjmodellmegoldása kapható a $\{\Phi_n|D; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \Phi_{p,g}|A; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ bázison való diagonalizálással, ahol Φ_n a (4.20b) $\Delta'=U_S/2$ választással nyert megoldása, $\Phi_{p,g}$ pedig a $\Delta=T_A U_S$ -sel specifikált (4.20a)-nak a Gamow-megoldása [36, 35, 46]. A Bang—Zimányi-féle formafaktor [8] éppen egy ilyen héjmodell-hullámfüggvény direkt komponensének tekinthető.

Az $A=90$ -es tömegszám-tartományban azok a (d, p) reakciók, amelyek gerjesztési függvényében nagy szögeknél a (d, \bar{n}) küszöb környékén a DWBA-val nem magyarázható anomáliát találtak, nem bomló állapotra vezetnek. Mégis, a „csatolt csatornás Born-közelítés” révén DWBA-mátrixelemükhöz egy olyan tag járul, amely a \bar{n} küszöb fölött bomló állapotot formafaktort tartalmaz (CCBA-számítás).

A jelenség magyarázatára Zaidi és von Brentano a kimenő protoncsatorna és az \bar{n} neutroncsatorna közötti töltéscsere kölcsönhatás figyelembevételét javasolta [37]. Ezzel a X_f^- függvény (1.4a) egyenletében szereplő V_0' potenciál az (1.11b) jobb oldalának első tagja mellé egy

$$v(\vec{r}_{bB}) \vec{t}_b \vec{T}_B \quad (4.25)$$

alakú tagot kap. E potenciál révén a távozó proton képes a B törzset izobár analóg konfigurációjára gerjeszteni, így a X_f^- a B állapot és a $B'=T_B, -B$ analógon lineáris kombinációja lesz:

$$X_f^- = \chi_p^- \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \psi_B^- + \chi_n^- \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle T_B, -\psi_B^-. \quad (4.26)$$

Ha ezt a (4.25)-tel kiegészített (1.4a) egyenletbe visszahelyettesítjük, ahogyan a (4.16) felbontás is a (4.18)-at adta, (4.26) a χ_p^- és a χ_n^- függvényt összekapcsoló Lane-egyenletekre vezet. A CCBA-mátrixelem a

$$T_{dp}^{CC} = \langle \chi_p^- \psi_n | V_{np} | \varphi_d \chi_d^+ \rangle - \langle \chi_n^- \psi_p | V_{np} | \varphi_d \chi_d^+ \rangle \quad (4.27)$$

alakot ölti. A második tag negatív előjele abból a föltevésből adódik, hogy a deuteron $t_d=0$ izospinű állapotban van. A $\psi_n(\vec{r}_{nA}) \equiv \psi_{lm}(\vec{r}_{nA})$ [lásd (1.19)] radiális része a rendes kötött állapotú formafaktor. A χ_p^- és a χ_n^- összezatolt „torzított hullámok” közül χ_n^- a \bar{n} küszöb alatt valójában kötött állapotú megoldás. Éppen χ_n^- egyik parciális hullámának küszöb környéki erős energiatfüggése okozza a küszöbhatást. A ψ_p a ψ_n analóg állapota, melyet az izospin-formalizmus közelítésében (4.1) határoz meg. Ilyen formafaktor használata nyilvánvalóan rossz, pontosabb definícióját azonban a Zaidi—Brentano-közelítés nem adja meg. Ezért a $^{90}\text{Zr}(d, p)^{91}\text{Zr}(2d_{5/2}, \text{alapállapot})$ reakcióban a $^{90}\text{Zr}(d, \bar{n})^{91}\text{Nb}$ $E_{th}=7,05$ MeV-os küszöbe körül tapasztalható ano-

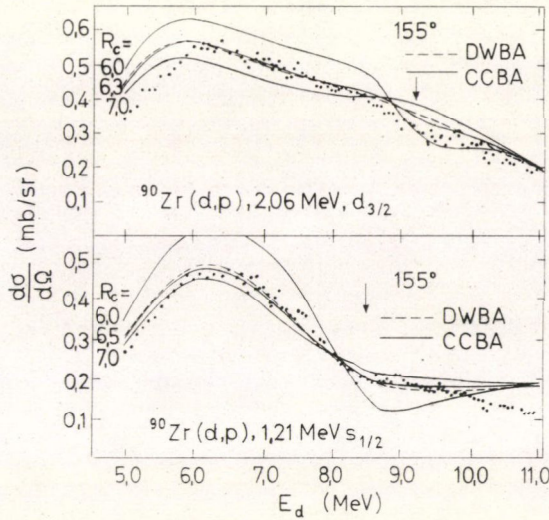
mália vizsgálatakor *Tamura* és *Watson* [38] és ennek nyomán több más hasonló reakció leírásakor *Coker* és *Tamura* [39], valamint *Coker*, *Hollas*, *Riley* és *Sen* [40] a következő eljáráshoz folyamodott: a belső tartományban $\psi_p = \psi_n$ -et vettek, kívül pedig a ψ_p állapotnak megfelelő hullámszámmal terjedő valós Coulomb-hullámot. A két megoldást egy $r = R_c$ értéknél simán illesztették. A folytonos differenciálhatóság feltétele azonban végtelen sok R_c értéket enged meg, ami a külső A_{ex} és a belső A_{in} amplitúdó arányára, mely a formafaktor fizikailag leginkább releváns jellemzője, ugyanilyen határozatlanságot jelent. Az eredmény természetesen igen érzékeny R_c -re (6. ábra). Létezik optimális R_c , amellyel számolva a modell a kísérlettel jó egyezést ad (7. ábra). Az R_c érték magról magra és szintről szintre változik, de egy szintre nézve ugyanazon R_c írja le helyesen az $A(d, p)B$ és az $A(d, \bar{n})B'$ (bomló) reakciókat.* Ezért a szerzők az R_c -nek ezt az értékét úgy tekintik, hogy segítségével sikerült a fizikailag „igaz” hullámfüggvényt megkonstruálni. Ám kételyre ad okot az a tény, hogy több szinthez tartozó R_c érték 6,1—6,5 ferminek adódik. Az $A = 90$ -es tömegszám-tartományban a (4.3)-ban szerepő $R_{1/2} \approx 5,5$ fermi, $a \approx 0,65$, így a tiszta Coulomb-hullámfüggvény tartománya jócskán benyúlik a magerők hatósugarán belülre. Így pl. a $^{86}\text{Kr}(d, p)^{87}\text{Kr}$ reakciónak a $^{87}\text{Rb } d_{5/2}$ protonállapotához tartozó küszöbhatása $R_c = 6,2$ fermivel írható le [40]. Ha a χ_p meghatározására használt optikai paramétereket vesszük alapul, akkor a magpotenciál ezen R_c -ben még csak a teljes mélység negyedére csökkent.

Az ellenőrzési lehetőséget adja meg *Zimányi* és *Gyarmati* pontosabb elmélete [41]. Az A -t, a n -t és a p -t teljesen szimmetrikusan kezelik: a Hamilton-operátorban szerepel mindhárom alkotórész páronkénti töltéscsere-lő kölcsönhatása. Így a X_f hullámfüggvény (4.26) formulája helyett hat tag összege biztosítja, hogy a Schrödinger-egyenletben rájuk ható izospinléptető operátorok ne vezessenek ki az általuk kifeszített térből. Következésképpen a behelyettesítés és balról képzett alkalmas belső szorzások a hat egyrészcseke-függvényre hat csatolt egyenletet szolgáltatnak. A mátrixelem (4.27) formájú. Az egyenletek abban a közelítésben, hogy a szomszédos nuklidok optikai függvényei egyenlők, részben szétcsatolódnak. A torzított hullámok ugyanazon Lane-egyenletnek tesznek eleget, mint [37] szerint, ψ_n egyenlete is ugyanaz. Ám ψ_p most egy olyan Lane-egyenletrendszer protonmegoldása, mely $E_n - \varepsilon$ neutronenergiához tartozik. Itt E_n a ψ_n sajátértéke, ε pedig abból adódó kis energiacsúszás, hogy a \bar{n} -küszöböt nem az A , hanem a $B' = A + p$ mag Coulomb-eltolódása határozza meg. Ezen Lane-egyenletek ε -ra nézve sajátérték-problémát adnak; ψ_p a rendszer rezonáns megoldása. A szerzők ezért a tisztán kifutó határfeltételt tartják célszerűnek.

Az ajánlott számolás elvégzése a CCBA-program birtokában nem jelent az előbbi módszernél lényegesen több numerikus munkát. *Coker* és *Tamura* az így nyerhető ψ_p komplexsége miatt nem végezte el. Szerintük a komplex mennyiségeket adó Lane-egyenletek „naiv” alkalmazása „veszéllyel jár” [39]. A CCBA-számítás bomló állapotú tagjában szereplő formafaktor a hozzá tartozó fizikai jelenség finomsága, érzékenysége miatt a különböző fizikai érvekkel és ízléssel konstruált bomló állapotú formafaktorok egybevetésének egyik hatásos módja volna.

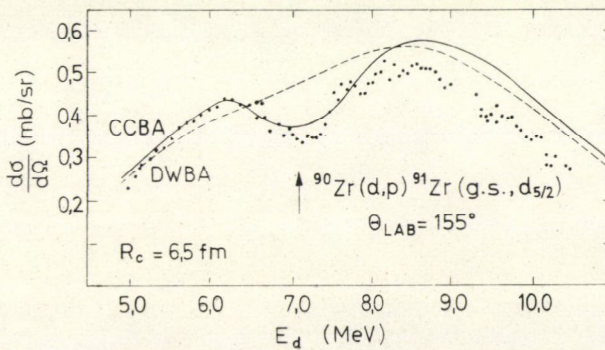
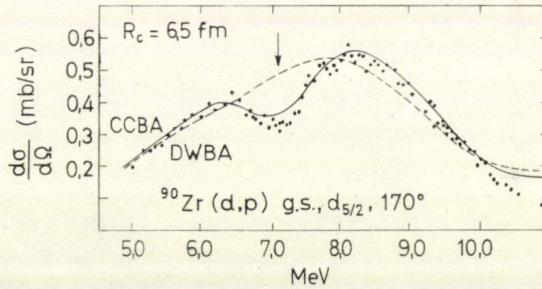
A rezonanciaállapot DWBA-ban való leírására tehát több recept ismeretes:

* Az IAR-ra vezető (d, n) reakciókban a töltéscsere-lő kölcsönhatás nem játszik jelentős szerepet, mert a hozzájuk csatolt (d, p) csatornában ott nincs küszöb, nincs erős energiafüggés. Az $A(d, \bar{n})B'$ -ben optimális R_c -vel elvégzett CCBA-számítások a DWBA-közelítést igazolják [39].



Mérés: pontok; DWBA: -----; CCBA: —————

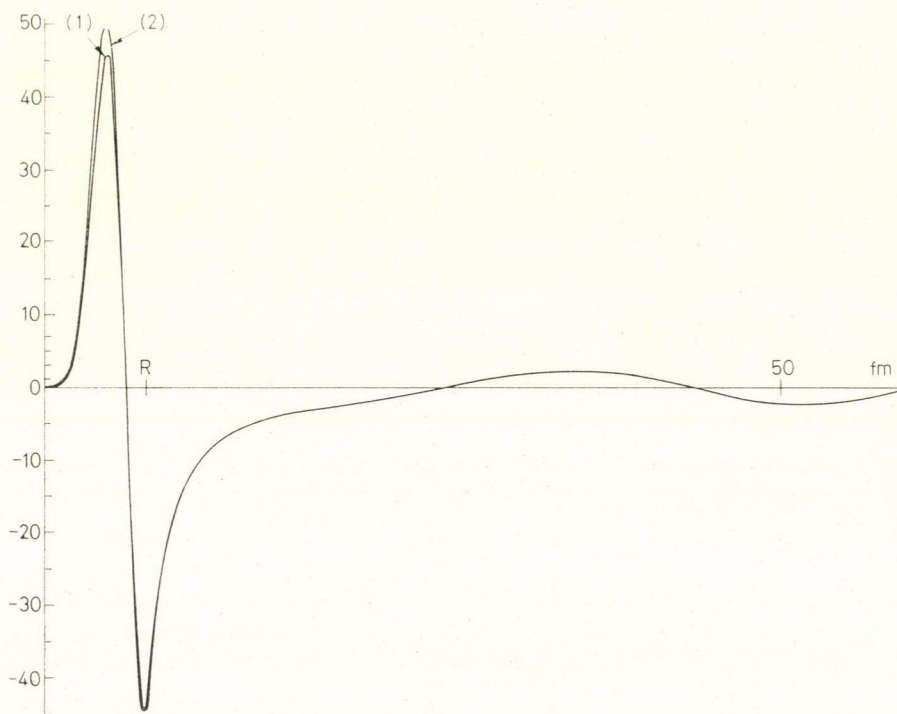
6. ábra. A CCBA-számítás érzékenysége az R_c paraméterre [39]



7. ábra. A mért, a DWBA és a CCBA gerjesztési függvény összehasonlítása [39]

különböző definíciójú szórási függvények, Gamow- és Weinberg-sajátfüggvény. IAR-k leírására az egyszerű egycsatornás modell mellett kíváncsi kipróbálni a közelítésmentes Lane-modell használatát. Az irodalomban változatos mátrixelem-számítási eljárásokkal különböző potenciáladatokat használva — mint az 5. §-ban látni fogjuk — eléggé eltérő spektroszkópiai faktorokat kaptak ugyanazon reakciókra vagy ugyanazon állapotra vezető különböző strippingekre. Különböző formafaktorral ugyanazon numerikus eljárással és azonos adatokkal összehasonlító eredmény nem áll rendelkezésre, mert a programok általában csak egyetlen módszer használatára alkalmasak.

Készültek azonban összehasonlító számítások magukra a formafaktorokra [47, 48]. Egy $E_n = E_n - i\Gamma_n/2$ energiájú, keskeny rezonanciát képviselő pólushoz tartozó, két csatolt négyszögpotenciálban számolt Gamow-függvényt, az E_n energiájú szórási függvényt és a völgymélység szabályozásával beállított $E_n^{sp} = E_n - i\Gamma_n^{sp}/2$ energiájú egycsatornás Gamow-, E_n energiájú Weinberg- és szórási függvényt hasonlítjuk össze a 8. ábrán. A függvények első külső maximumai vannak egybe normálva (ez a szórási megoldásokra nézve azt jelenti, hogy ugyanazon faktorial szorozva volnának δ -ra normálva), de alig változna az ábra, ha a pólusfüggvényeket



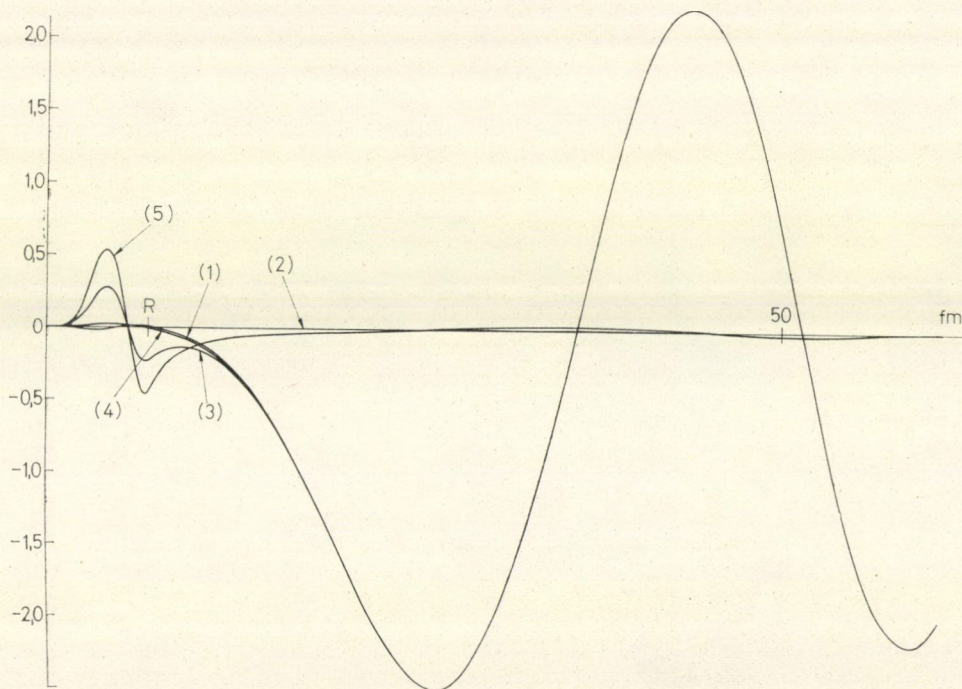
8. ábra. Két- és egycsatornás rezonanciafüggvények az $l = 4$ -es parciális hullámban, $R = 7$ sugarú négyszögpotenciálban igen keskeny rezonancia esetén [47]. Az a) és a b) ábra skálája különbözik

a) A függvények valós része. Csatolt csatornás Gamow- és szórási függvény (1); egycsatornás Gamow-, Weinberg- és szórási függvény (2)

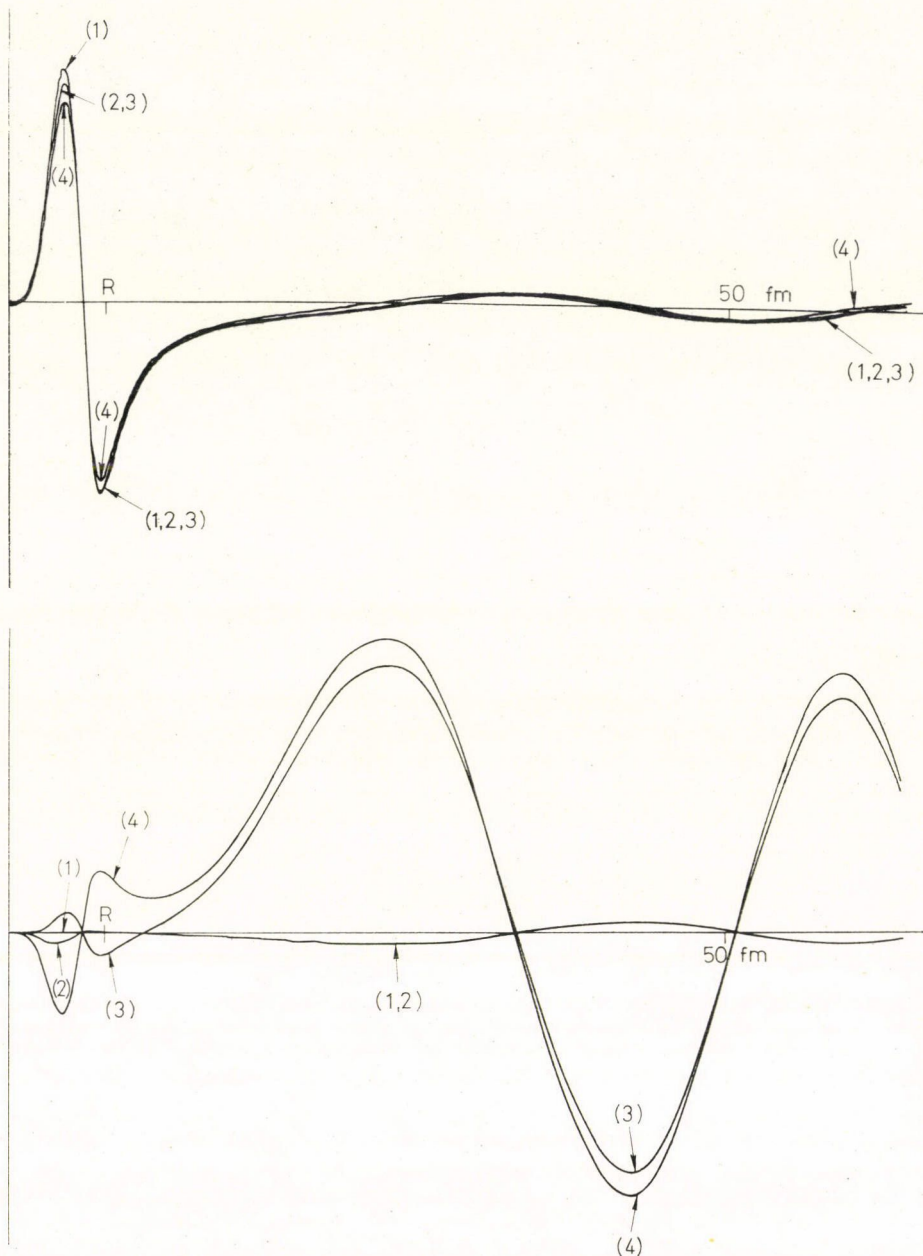
(4.14) szerint, a szórásokat pedig (4.4) szerint, vagy ál-kötöttállapotú módszerrel normálnánk. A függvények között az egyetlen lényeges eltérés az, hogy a valós szórásokkal szemben a pólusfüggvényeknek a magon kívül a valós részükkel egyenlő amplitúdójú képzetes részük van. A függvényalakok azonosságát a felületi csatolás is csak kevésbé csorbitja. Ha az egycsatornás rezonancia széles ($\Gamma_n^{sp}/E_n > 0,1$), már az eltérően ($\delta = \pi/2$, $E = E_n^{sp}$, $A_{ex}/A_{in} = \min$ stb. előírással) definiált szórási függvények is alaposan eltérnek [48]. A Gamow-függvény képzetes része a magon belül is megnő, ezért mátrixelemei s a hatáskeresztmetszet is nagy képzetes résszel rendelkeznek, ami a rezonancia meghatározottságának nagyfokú bizonytalanságát explicit módon jelzi.

Komplex derékszögű potenciálos Lane-modellbeli számításokat láthatunk a 9. ábrán. A képzetes potenciálok úgy vannak megválasztva, hogy a $|T_A T_{A-1/2}\rangle$ tiszta izospinú állapotban ne legyen abszorpció. Habár $|A_{ex}/A_{in}|$ -et most is $E \simeq E_n$ minimalizálja, még az E_n -ben vett szórási függvénynek a képzetes része is igen nagy kívül a belső amplitúdóhoz képest. Ezért a szórási függvény alkalmatlan arra, hogy a rezonanciát egyetlen állapotként képviselje. Látjuk, hogy a csatolt csatornás Gamow-függvény rezonáns marad, ezért várhatjuk, hogy egymagában is tükrözze az abszorpció által torzított rezonancia viselkedését.

A négyyszögpotenciálos eredményeket realisztikus egycsatornás és Lane-modellben végrehajtott ellenőrző számítások mindenben igazolják [48].



b) A függvények képzetes része. Csatolt csatornás Gamow- (1) és szórási függvény (2); egyrészesecske-Gamow- (3), Weinberg- (4) és szórási (5) hullámfüggvény



9. ábra. Komplex négyzög-potenciális csatolt csatornás függvények és az egycsatornás Gamowfüggvény összehasonlítása [48] (1) Egycsatornás Gamow-függvény; (2) csatolt csatornás Gamow-függvény; (3) csatolt csatornás szórási függvény $E = E_n$; (4) csatolt csatornás szórási függvény $E_n - \Gamma_n/2 < E < E_n$
 a) valós rész; b) képzetes rész

5. §. Rezonanciaállapotok spektroszkópiai faktora

Az (1.16) formula szerint a spektroszkópiai amplitúdó a normált $\psi_{ij,\mu}$ egyrészecske-állapot együtthatója a stripping reakció termékmagjának tényleges fizikai végállapotában. A spektroszkópiai faktor valószínűségi jelentése szembevetendő, ha az amplitúdóra az antiszimetritől, impulzusmomentum-viszonyoktól eltekintve igaz, szkatematikus

$$\int \psi_B^*(\vec{r}_{xA}, \xi_A \xi_x) \psi_A(\xi_A) d\xi_A = \theta \psi_x(\vec{r}_{xA}, \xi_x) \quad (5.1)$$

összefüggést idézzük. Az $S = |\theta|^2$ annak a valószínűsége, hogy a B mag éppen a $\psi_A \psi_x$ törzs + egyrészecske-konfigurációban tartózkodik. Ezen információt várjuk a méréstől a B mag szerkezetére nézve, ha a direktreakció-hipotézist elfogadjuk.

Ha a reakció bomló állapotra vezet, úgy $\psi_{ij,\mu}$ helyére a pozitív energiájú, nem normálható $\psi_{ij,\mu}$ függvény kerül. Ez a matematikai nehézség azt a fizikai tényt takarja, hogy egy rezonanciaállapotban való tartózkodásnak nincs mérésen alapuló egyértelmű definíciója, ezért nem tartozhat egy teljes eseményrendszerhez, amelyhez valószínűségi eloszlást rendelhetnénk. Az egyes magreakcióelméletek megkonstruálják a saját „diszkretizált” rezonanciafogalmukat, s ennek révén a spektroszkópiai faktor — ezen elméleteken belül egységes — definíciója megadható rezonanciákra is. E spektroszkópiai faktorok olyan pontossággal hordozzák az előbb említett valószínűségi jelentést, amilyen pontossággal az elméleti rezonancia egybevág azzal, amit mérnek.

A bomló állapotra vezető stripping reakciók elméletében a rezonanciaállapot spektroszkópiai faktort annyiféleképpen vezetnek be, ahányféle formafaktor-előírás van. Most ismertetjük a különböző szemléletű definíciókat: az R -mátrix-elméleti, a héjmodell szerinti, a kötött állapottal való analógiával operáló és az egyrészecske-kontinuum rezonáns tartományán elvégzett integrálással kapott spektroszkópiai faktort. — Az R -mátrix-elméleti spektroszkópiafaktor-fogalmat [42] nyomán ismeretjük. A felhasznált fogalmak precíz definícióját a [43] hivatkozás III—V. fejezetében találhatjuk meg.

Válasszunk le egy n darab nukleonból álló rendszer H Hamilton-operátoráról egy H_0 operátort, mely két fragmentum potenciálszórását írja le. A H és a H_0 „fizikai” szórási megoldása legyen ψ , illetve ψ_0 , R -mátrix-sajátállapota χ_λ , illetve $\chi_{pc} = \varphi_c(\xi, \Omega_c) u_p(r_c)$:

$$H\psi = E\psi \quad H_0\psi_0 = E\psi_0 \quad (5.2a)$$

$$H\chi_\lambda = E_\lambda \chi_\lambda \quad H_0\chi_{pc} = E_{pc} \chi_{pc}, \quad r \leq a_c. \quad (5.2b)$$

χ_λ és χ_{pc} a τ belső [$r \leq a_c (> R_{\text{mag}})$] tartomány $(3n-1)$ -dimenziós S határfelületén ($r = a_c$) ugyanazon határfeltételt elégítse ki, és mind a négy függvény a konfigurációs tér belső tartományán legyen normálva:

$$\int_\tau |f|^2 d\tau = 1, \quad (f = \psi, \psi_0, \chi_\lambda), \quad \int_{\mathcal{S}} |\varphi_c|^2 d\mathcal{S} = 1, \quad \int_0^{a_c} u_p^2(r_c) dr_c = 1. \quad (5.3)$$

A $\{\chi_\lambda\}$ és a $\{\chi_{pc}\}$ függvényrendszer a konfigurációs tér belső tartományára értelmezett belső szorzatra nézve egy-egy függvénytér fölött teljes; a χ_λ -nak a szűkebb térre való vetülete

$$\chi_\lambda = \sum_{pc} \theta_{\lambda, pc} \chi_{pc} \quad (5.4a)$$

módon sorbafejthető, és ha nincs antiszimmetrizálás, a sorfejtés invertálható:

$$\chi_{pc} = \sum_{\lambda} \theta_{\lambda, pc} \chi_{\lambda}. \quad (5.4b)$$

$\theta_{\lambda, pc}$ a c rugalmas csatorna p egyrészecske-rezonanciájának az általában összetett λ rezonanciára vonatkozó spektroszkópiai amplitúdója. A $\tilde{\gamma}_{\lambda c}^2$ redukált egyrészecske-szélességeket és a tényleges állapotok $\gamma_{\lambda c}^2$ redukált szélességeit a

$$\tilde{\gamma}_{\lambda c} = \left(\frac{\hbar^2}{2\mu_c a_c} \right)^{\frac{1}{2}} \int \varphi_c \chi_{pc} d\mathcal{S} = \left(\frac{\hbar^2}{2\mu_c a_c} \right)^{\frac{1}{2}} u_p(a_c) \quad (5.5)$$

$$\gamma_{\lambda c} = \left(\frac{\hbar^2}{2\mu_c a_c} \right)^{\frac{1}{2}} \int \varphi_c \chi_{\lambda} d\mathcal{S} = \left(\frac{\hbar^2}{2\mu_c a_c} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_p \theta_{\lambda, pc} u_p(a_c) = \sum_p \theta_{\lambda, pc} \tilde{\gamma}_{pc} \quad (5.6)$$

összefüggések adják. Ha feltételezzük, hogy egy összetett nívóhoz csak egy pc egyrészecske-szint járul hozzá,

$$S_{\lambda} \equiv \theta_{\lambda, pc}^2 = \frac{\gamma_{\lambda c}^2}{\tilde{\gamma}_{pc}^2} = \frac{\Gamma_{\lambda c}}{\Gamma_{pc}} \frac{1 - (\partial \Delta_{pc} / \partial E)_{E_{pc}^{\text{res}}}}{1 - (\partial \Delta_{\lambda c} / \partial E)_{E_{\lambda c}^{\text{res}}}}, \quad \sum_{\lambda} S_{\lambda} = 1. \quad (5.7)$$

Itt Δ_{ic} ($i = \lambda, p$) az egyszint-formula szinteltolódása, E_{ic}^{res} ($i = \lambda, p$) a rezonancia-energia: $E_{ic}^{\text{res}} = E_{ic} + \Delta_{ic}(E_{ic}^{\text{res}})$. Amikor a γ^2 redukált parciális szélességeket a Γ parciális szélességekkel fejeztük ki, kihasználtuk, hogy pozitív energiájú állapotokról van szó.

Az egyrészecske-szint felhasad bonyolult nívók sorozatára. Az S_{λ} spektroszkópiai faktor (5.4a) szerint azt jelzi, hogy az összetett állapotban milyen súllyal szerepel egy egyrészecske-szint, másrészt, mint (5.4b) mutatja, az egyrészecske-rezonancia milyen súllyal tevődik össze a rendszer bonyolult állapotaiból. Az (5.7) összefüggés egy még szemléletesebb jelentést is felfed: S_{λ} a „valóságos” és a potenciálrezonancia redukált szélességének és egyúttal közelítőleg a parciális szélességek viszonya. Ez a közelítés, mivel a Coulomb-gát a két rezonanciára megegyezik, csak a szinteltolódás elhanyagolásából áll. A parciális szélesség a rezonanciába való beletalálás valószínűségével arányos mennyiség. S_{λ} tehát azt mutatja meg, hogy hányad részére csökken annak a valószínűsége, hogy a rezonanciába beletaláljunk, ha a H_0 rezonanciája helyére a valóságos H operátor rezonanciáját ültetjük.

Az (5.7) formula szemléletesebb, egyszerűbb alakot kap, ha kihasználjuk, hogy [42]

$$\left(1 - \frac{\partial \Delta_{pc}}{\partial E} \right)_{E_{pc}^{\text{res}}} \simeq 1 + \int_a^{R_{TP}} u_{pc}^2(r_c) dr_c = \int_0^{R_{TP}} u_{pc}^2(r_c) dr_c. \quad (5.8)$$

Analóg formula igaz a λ rezonanciára. Ha a függvények normálását $\int_0^{R_{TP}} dr \dots = 1$ -re változtatjuk, mint a formafaktorra a (4.4) formula szerint Youngblood és Kozub teszi, és az így kapott $\Gamma_{\lambda c}$ -t a mért Γ_{exp} szélességgel azonosítjuk, Γ_{pc} -t pedig Γ_{sp} -vel jelöljük,

$$S_{\lambda} = \frac{\Gamma_{\text{exp}}}{\Gamma_{sp}}. \quad (5.9)$$

Youngblood és *Kozub* formafaktorukat egy alkalmasan választott határfeltételű és R_{TP} -ig normált R -mátrix-sajátfüggvénnyel azonosítják [17], s így spektroszkópiai-faktor-fogalmuk is az R -mátrixelméletével esik egybe. A $^{40}\text{Ca}(^3\text{He}, d)^{41}\text{Sc}$ (bomló) reakció általuk számított spektroszkópiai faktora a $^{40}\text{Ca}(p, p)^{40}\text{Ca}$ rugalmas szórás spektroszkópiai faktoraival mérésihiba-határon belül egybeesnek [17].

A spektroszkópiai faktor Fano-féle héjmodell-értelmezéséhez úgy juthatunk, ha — mint *Bunakov*, *Gridnyev* és *Krasznov* [44] — a ψ_E kontinuum-megoldást egyetlen potenciálrezonancia hullámfüggvényével helyettesítjük [vö. (4.22)–(4.23)]:

$$\psi_E \simeq \left[\frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{2} \Gamma_{sp}}{(E - E_{sp})^2 + \frac{1}{4} \Gamma_{sp}^2} \right]^{\frac{1}{2}} u(r). \quad (5.10)$$

Ez a szeparáció csak a belső tartományon írható föl, ezért $u(r)$ -et ott képzelhetjük egységre normálnak. A ψ_E azon a tartományon képzett radiális integrálra nézve lesz Dirac- δ -ra normált, amelyen $u(r)$ 1-re normált. Ha ezt a formulát (3.8)-ba behelyettesítjük, a főértékintegrál elvégezhető:

$$\Psi(E) = a(E) \left\{ \varphi_n + \left[\frac{\langle \varphi_n | H | u \rangle (E - E_{sp})}{(E - E_{sp})^2 + \frac{1}{4} \Gamma_{sp}^2} + \frac{E - E_c}{V_E^*} \left(\frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{2} \Gamma_{sp}}{(E - E_{sp})^2 + \frac{1}{4} \Gamma_{sp}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] u \right\}. \quad (5.11)$$

(3.7) és (5.10) alkalmazásával a []-en belüli tagban a

$$\frac{\langle \varphi_n | H | u \rangle}{\sqrt{(E - E_{sp})^2 + \frac{1}{4} \Gamma_{sp}^2}} = \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_{sp}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

helyettesítést elvégezve, $E \simeq E_c$ -re szorítkozva, az $|E_c - E_{sp}| \gg \frac{1}{2} \Gamma_{sp}$ feltevéssel (5.11) a

$$\Psi(E) \simeq a(E) [\varphi_n + \sqrt{\Gamma/\Gamma_{sp}} u] \quad (5.13)$$

közelítő alakot veszi fel. A direkt járulék tehát $a(E)\sqrt{\Gamma/\Gamma_{sp}}$ -vel szorzódik. Mivel a hatáskeresztmetszet egyetlen energiafüggő faktora $a^2(E)$, és ennek a teljes tartományon vett integrálja 1, ezért a DWBA-hatáskeresztmetszet a rezonanciára integrálva az u normált függvénnyel képzett értékhez képest (Γ/Γ_{sp}) -vel szorzódik. Ebben a közelítésben tehát Γ_{exp} -nek Γ -val való azonosítása után ismét a spektroszkópiai faktor (5.9) formuláját kaptuk. *Bunakov*nak és szerzőtársainak az (5.9) képlet segítségével több reakció olyan rezonáns végállapotához sikerült a DWBA-számítás és a mérés összehasonlításával l és j értéket rendelni, amely jellemzéséhez a szög-eloszlás nem nyújtott elég támpontot [44]. E hozzárendelések az x - A rugalmas szórásból kapott adatokkal összhangban vannak.

A Huby-elmélet (4.15) képlete a rezonanciaállapot hullámfüggvényének a szó-

rási csatornára vetített $P\Psi^+$ részét adja meg. Ebben a rezonáns formafaktor az $\int dE|B.-W.|^2 = 1$ tulajdonságú $B.-W.$ Breit—Wigner-amplitúdón kívül a $t_{0\lambda}$ számmal van megszorozva, tehát

$$\theta_\lambda = t_{0\lambda}. \quad (5.14)$$

Az így definiált spektroszkópai faktorra ($S_\lambda = \theta_\lambda^2$) is (5.9)-hez hasonló összefüggés vezethető le. (3.21)-ből kiindulva, úgy rögzítve $|\omega_\lambda\rangle$ fáziskonvencióját, hogy $\langle\varphi_l|H'|\omega_\lambda\rangle$ valós legyen, majd (3.11c), (3.19) és (3.16) alkalmazásával, végül a

$$\Gamma_{sp} = 2\pi|\langle\varphi_l|U|\Psi_0\rangle|^2 \quad (5.15)$$

definíció bevezetésével a következő eredményre jutunk:

$$\Gamma_\lambda^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}\langle\varphi_l|H'|\omega_\lambda\rangle \quad (5.16)$$

$$= \theta_\lambda \Gamma_{sp}^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2\pi}\langle\varphi_l|V|\omega_\lambda\rangle. \quad (5.17)$$

Ha a maradék-kölcsönhatás $\langle\varphi_l|V|\omega_\lambda\rangle$ mátrixeleme jóval kisebb, mint $\langle\varphi_l|U|\omega_\lambda\rangle$, akkor az így definiált szélességek a spektroszkópai faktorial (5.9) összefüggésben vannak [23].

Amilyen közelítésben az ál-kötöttállapot módszer [33] a hű leírásmódból [32] levezetettnek tekinthető, olyan közelítésben vette *Cole*, *Huby* és *Mines* alapul az (5.14) definíciót a spektroszkópai faktor kiszámítására [33]. ($^3\text{He}, d$) reakciók mért és számított keresztmetszetének hányadosát összehasonlították a mért (p, p) szélességek és a számított egyrészecske-szélességek arányával. Mintegy 30%-on belüli egyezést kaptak, ami a mérés közelítéshez képest figyelemre méltó.

A szórási egyrészecske-állapotokat használó módszerekkel [7*, 9, 10, 11, 34, 20] a hatáskeresztmetszetet a meg nem figyelt részecske energiájának a rezonancia tartományára elvégzett integrálásával kapják. Vincent és Fortune a hatáskeresztmetszetre Breit—Wigner-alakot tételezve föl, elvégzik ezt az integrálást. Azt kapják, hogy a rezonancia differenciális hatáskeresztmetszete az aszimptotikus alakjának rögzítésével normált formafaktorial a $\delta = \pi/2$ -nek megfelelő csúcsra kapott elméleti hatáskeresztmetszet és a feltételezett szélesség szorzatának $(\pi/2)$ -szerese [10]. Tehát a csúcshelyi számított hatáskeresztmetszetet ismerve, a rezonancia kísérleti hatáskeresztmetszete a szint valódi szélességének a mértéke. Más szóval, ha az elméleti (egyrészecske-) hatáskeresztmetszetet úgy definiáljuk, hogy az egyrészecske-szélességgel szorzunk, a kísérleti és az elméleti érték hányadosa, mely (1.27) szerint a spektroszkópai faktor, a tényleges és az egyrészecske-szélesség hányadosát adja. Ez ismét az (5.9) eredménnyel vág egybe.

Érdemes a spektroszkópai faktor szempontjából megvizsgálni *Bang* és *Zimányi* (4.13) normálási módszerét. Az általánosan használt [10, 5] (1.25) típusú „szórásra normálásokkal” szemben, melyek az aszimptotikus hullám amplitúdóját vagy fluxussűrűségét rögzítik, ez a $\sqrt{2\gamma_0}$ tényezőt tartalmazza. Mivel $\gamma_0 \propto \Gamma_{sp}$, ez a hatáskeresztmetszetnek éppúgy a Γ_{sp} -vel való arányosságára vezet, mint a szórási állapotokra való integrálás.

* Azt, hogy a [7] referenciában közölt számítás ilyen módszerrel végezték, a [33] hivatkozásból tudjuk meg.

A Gamow-állapothoz az (5.1) általánosításaként egzakt módon rendelhető mennyiség valós részeként definiálható spektroszkópiai faktor is tükrözi közelítőleg az (5.9) összefüggést [48]. A csatolt négyszögmodellben a szórási csatorna spektroszkópiai faktora és a Γ_n/Γ_n^{sp} közel egyenlő. Eltérésük a bizonytalanságot jellemző képzetes rész körül ingadozik. Mind négyszög-, mind realisztikus modellben bebonyosodott, hogy a Gamow-függvényt alkalmazó héjmodellszámítás [36, 35, 46] a spektroszkópiai faktornak is jó közelítését adja [48].

Egy neutronátadó reakció adott nívóhoz tartozó S_n spektroszkópiai faktora az izobár analóg szintre vezető protonátadó reakcióéval (S_p) az izospinformalizmus közelítésében (4.19a) miatt

$$S_p = (2T_A + 1)^{-1} S_n \quad (5.19)$$

szerint összefügg. Méréseket hajtottak végre az $A=90$ -es tömegszám tartományban egyazon IAR-ra vezető (${}^3\text{He}, d$) és (d, n), valamint ugyanazon nívót gerjesztő (p, p) reakcióra és az analóg szinthez tartozó (d, p)-re. A kapott spektroszkópiai faktorokat összehasonlították. A [29] cikkekben közölt (${}^3\text{He}, d$) és (d, n) kísérletek szerint a $3s_{1/2}$ nívóra való átmenet rendkívül csekély, alig kimutatható. Sem (4.1) közelítésben, sem szórási függvényekkel elvégzett számítások ezt nem igazolták, a $2d_{5/2}$ nívóra pedig a mértnél jóval nagyobb értéket adtak [29]. Ezért a szerzők ezt a hatást az IAR-k szerkezetének tulajdonították. Kozub és Youngblood mérései igazolták a fenti mérések helyességét, a módszerükkel végzett DWBA-analízis azonban jó összhangban van mind a saját, mind a [29] (${}^3\text{He}, d$) méréseivel, bár a (${}^3\text{He}, d$)-ből a $2d_{5/2}$ -re nyert spektroszkópiai faktor a (d, n) reakciókének kétszerese [18].

Cole, Huby és Mines ugyanazon reakciókra végzett számításokat a spektroszkópiai faktor kétféle megválasztásával, és az eredményeket összevetette a kísérletekkel [34]. Szórási függvényeket használtak formafaktornak, és a [10] hivatkozás szerint (lásd fentebb) a hatáskeresztmetszet számított értékének a $[d\sigma(\theta)/dE]_{sp, \max}$ maximum $(\pi/2)\Gamma_{sp}$ -szeresését vették. A spektroszkópiai faktor két definíciója a következő volt:

$$S_p^{(1)} = \frac{\Gamma_p}{\Gamma_{sp}}, \quad S_p^{(2)} = \frac{1}{2T_A + 1} S_n. \quad (5.20)$$

Itt Γ_p a (p, p) szórásból kísérletileg meghatározható szélesség. Az ugyanazon reakcióra számított hatáskeresztmetszetek egymással és a méréssel némely szintekre meglepően jól, másokra csak egy 2-es (ill. 1/2-es) faktor erejéig egyeznek. Mivel a szerzők a spektroszkópiai faktorokat nem adják meg, az ugyanazon szintre vonatkozó (${}^3\text{He}, d$) és (d, n) értékek nem hasonlíthatók össze.

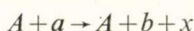
Zaidi és Coker ilyen típusú reakciókra végezte számításait a (4.24) formafaktoral [16]. (4.24) a rezonáns tagban az $1/\sqrt{2T_A + 1}$ -es tényezőt már tartalmazza, úgyhogy $S_p = S_n$ választásuk $S_p^{(2)}$ -nek felel meg. Adataik egy része átfed Huby és társai adataival [34]; ezekre a kísérlettel jobb egyezést kaptak. Három (d, n) eredményük közül kettő a kísérleti adat kétszeresét szolgáltatja. Ezen három esetre Fortune és Vincent $S_p = S_p^{(1)}$ választással megismételte a számításait, és a 10–30%-os kísérleti hibahatáron belüli vagy körüli eredményt kapott [20]. Zaidi és Coker formafaktor-választása elvben biztosan pontosabb, eredménye mégis — úgy látszik — pontatlanabb. Hibájuk Fortune és Vincent szerint az integrálás pontatlanságából, az optikai paraméterek más megválasztásából, az $S_p = S_n$ feltevés alaptalanságából

vagy esetleg a Lane-egyenletmegoldás (4.24) közelítésének pontatlanságából eredhet. Ami bizonyos, az az, hogy a formafaktorválasztással és az $S_p = S_n$ feltevessel az IAR speciális tulajdonságait kihasználták, *Fortune* és *Vincent* pedig nem. Ha numerikus eljárásukról feltételezzük, hogy hibátlan, akkor eredményük magyarázata az, hogy az IAR-ról kihasznált feltevések nem teljesülnek. A [20] számítások pedig azt látszanak indokolni, hogy az IAR „speciális szerkezetének” feltételezésére nincs szükség a mérési eredmények interpretálásához: az $s_{1/2}$ és a $d_{5/2}$ anomáliák valószínűleg nem magszerkezeti, hanem reakciómechanizmusbeli okokra vezethetők vissza. Az anomáliák elsősorban az egyes állapotok penetrabilitásának különbözőségén alapulnak, ami a formafaktor külső amplitúdójával van összefüggésben [45].

A formafaktor megválasztása a szögeloszlást kevésbé, inkább a σ_{DW} nagyságát, s ezáltal a spektroszkópiai faktort befolyásolja. Az eddig nyert spektroszkópiai faktorok nem döntenek egyértelműen afelől, hogy mi a formafaktor speciális választásának hatása és jelentősége, és hogy a bomló állapotra vezető stripping reakciókat magstruktúra-effektusok mennyire befolyásolják.

Összefoglalás

A vizsgált (3.1) reakciótípus az



folyamat azon határesetre, amely a $B = A + x$ kvázistacionárius mag létrejöttét, azaz azt feltételezi, hogy az x a b részecske távozása után az átszelési időhöz képest hosszan tartózkodik a B magban. A B tetszőleges bonyolult állapotban lehet, a reakció azonban ennek csak egyetlen $A - x$ törzs-nukleon komponensén keresztül jön létre.

A b és az x részecske egymás utáni távozása úgy vehető számításba, hogy a $b - x$ végállapotú kölcsönhatást elhanyagoljuk. Csak ilyen keretek között alkalmazható a folyamatra a torzított hullámú Born-közelítés. Azt azonban, hogy az a részecske távozásával a folyamat nem ért véget, vagyis a végállapot bomló, a DWBA-elméletbe be kell építeni. Ha az x nukleonnak B -ben elfoglalt állapotát a direkt-csatornára vetítjük, egy spektroszkópiai amplitúdóval szorzott egyrészecske-rezonanciát kapunk. Ezt azonosítjuk az $A(x, x)A$ rugalmas szórásban azon az energian a egy parciális hullámban található rezonanciával, és megpróbáljuk az A mag egy optikai potenciálján végbement rezonanciaszórásaként leírni.

A bomló állapotra vivő stripping reakciók leírásának kulcskérdése, hogy a másodlagos folyamatról, a B mag bomlásáról minél tökéletesebben számot adó egyrészecskevéggállapotot találjunk. A reakció feltételezett mechanizmusának bármely más finomítása (pl. csatolt csatornák vagy háromtest-modell) nagyságrendekkel bonyolítaná a problémát. Ezért lényeges a DWBA-elméletben minden eszközt megragadni, amellyel a folyamat természetét még teljesebb módon figyelembe vehetjük.

Rezonanciaállapotként vagy a szórási állapotok folytonos „sorozatát” vagy különböző reakcióelméletek speciális definíciójú „sajátállapotát” használják. A rezonanciafüggvények oszcilláló farka miatt a pontatlan definíciójú átmeneti mátrixelem nem rendelkezik meghatározott értékkel. Különböző fogásokkal azonban

kiválasztható az az érték, amelyet matematikailag egzakt elmélet útján kapnánk. Ezen eljárásokra numerikus közelítéseket dolgoztak ki.

Ha folytonos energiájú állapotokat használnak, a spektroszkópiai faktort a rezonancia tartományán elvégzett integrálással, ha diszkrétizálnak, a diszkrét állapot sajátos normálásával kapják. A különbözőképpen megadott definíciók az egymással tökéletesen analóg $\Gamma_{\text{exp}}/\Gamma_{\text{sp}}$ formára hozhatók, ahol azonban Γ_{exp} -et más-más kifejezéssel azonosítjuk, s Γ_{sp} -t is különböző előírásokkal számoljuk.

Az utóbbi három-négy évben e reakciótípusra tekintélyes mennyiségű kísérleti adat gyűlt össze. *Levin* kimutatta [22], hogy akkor mérnek optimálisan, ha adott a -energián a b részecske energiáját és szögeloszlását mérik. Az $a-x$ koincidencia-mérések csak akkor hoznak lényeges új információt, ha vagy az illető reakció mechanizmusával, vagy a képződő mag szerkezetével tisztában vagyunk. A vizsgálatra érdemes elég keskeny szintek energiája többségében 0–2 MeV között van. Tehát ha a bombázó energia a bombázó részecske szeparációs energiáját ennyivel meghaladja, a reakció végbemehet. Így egy ötmillió voltos gyorsítóval e folyamatok már vizsgálhatók.

Kísérleti és elméleti kutatásuk továbbra is érdekes eredményeket ígér. Nem tisztázott a formafaktor megválasztásának szerepe. Lezáratlannak kell tekintenünk a spektroszkópiai faktor különböző definíciói közötti viszony kérdését. További vizsgálatot kívánnak az izobár analóg rezonanciák esetén többféle feltevéssel bevezetett spektroszkópiai faktorokra adódott eltérések, és az ugyanazon nívóra, valamint analogonjára vezető reakciók spektroszkópiai faktorának különbözőése. Izobár analóg rezonanciával a direkt mechanizmus különösen jól ellenőrizhető, hiszen a rezonancia szerkezete viszonylag jól ismert. Igazolásra szorul a (d, p) reakcióknak a (d, \bar{n}) -küszöb körüli viselkedését visszaadó önkényes R_c paraméter szerepe.

A formafaktor külső és belső amplitúdójának viszonyától azt várjuk, hogy a vizsgált fizikai rendszertől erősen függ. Ez az érzékeny mennyiség csak a bomló állapotra vezető folyamatokban jelenik meg. Mindenfajta magszerkezeti és reakció-mechanizmusbeli vizsgálat szempontjából kitüntetett szerepet játszanak azok a módszerek, amelyek szerint a formafaktort az egész térben kell normálni. A külső és belső amplitúdó viszonya csak ilyen módszerek használata esetén befolyásolja számottevően az eredményt.

Köszönöm *Gyarmati Borbálának* ösztönző figyelmét és értékes tanácsait, megjegyzéseit.

IRODALOM

1. *E. Goldberg*, Phys. Rev. 89, 760, 1953.
2. *Leonard S. Rodberg, Roy M. Thaler*: Introduction to the Quantum Theory of Scattering, Academic Press, New York—London 1967, 12. fejezet
3. *G. R. Satchler*, Nucl. Phys. 55, 1, 1964.
4. *P. J. A. Buttle, L. J. B. Goldfarb*, Proc. Phys. Soc. 83, 701, 1964.
5. *V. Je. Bunakov*, Nucl. Phys. A140, 241, 1970.
6. *R. Huby, J. R. Mines*, Proc. of the Conf. on Direct Interactions and Nuclear Reaction Mechanisms (szerk.: E. Clementel, C. Villi), Gordon and Breach, New York—London 1963, 530. o. *R. Huby, J. R. Mines*, Rev. Mod. Phys. 37, 406, 1965.
7. *J. L. Alty, L. L. Green, R. Huby, G. D. Jones, J. R. Mines, J. F. Sharpey-Shafer*, Phys. Lett. 20, 664, 1966.
J. L. Alty, L. L. Green, R. Huby, G. D. Jones, J. R. Mines, J. F. Sharpey-Shafer, Nucl. Phys. A97, 541, 1967.

8. J. Bang, J. Zimányi, Nucl. Phys. A139, 534, 1969.
W. R. Coker, előnyomat
9. H. T. Fortune, C. M. Vincent, Phys. Rev. 185, 1401, 1969.
10. C. M. Vincent, H. T. Fortune, Phys. Rev. C2, 782, 1970.
11. V. Je. Bunakov, K. A. Gridnyev, L. V. Krasznov, Phys. Lett. 32B, 587, 1970.
V. Je. Bunakov, K. A. Gridnyev, L. V. Krasznov, Jagy. Fiz. 15, 906, 1972.
12. Tore Berggren, Nucl. Phys. A109, 265, 1968.
13. B. Gyarmati, T. Vertse, Nucl. Phys. A160, 523, 1971.
14. E. Gerjuoy, Ann. Phys. (N. Y.) 5, 58, 1958.
15. H. T. Fortune, T. J. Gray, W. Trost, N. R. Fletcher, Phys. Rev. 179, 1033, 1969.
16. S. A. A. Zaidi, W. R. Coker, Phys. Rev. C4, 236, 1971.
17. D. H. Youngblood, R. L. Kozub, R. A. Kenefick, J. C. Hiebert, Phys. Rev. C2, 477, 1970.
18. D. H. Youngblood, R. L. Kozub, Phys. Rev. Lett. 26, 572, 1971.
R. L. Kozub, D. H. Youngblood, Phys. Rev. C4, 535, 1971.
19. I. M. Nagib, L. L. Green, Nucl. Phys. A112, 76, 1968.
20. H. T. Fortune, C. M. Vincent, Phys. Rev. Lett. 27, 1664, 1971.
21. Vertse Tamás, ATOMKI Közl. 12, 213, 1970.
22. F. S. Levin, Ann. Phys. (N. Y.) 46, 41, 1968.
23. R. Huby, Nucl. Phys. A167, 271, 1971.
24. Lovas István, Magyar Fizikai Folyóirat XIX, 209, 1971.
25. C. Mahaux, A. M. Saruis, Nucl. Phys. A117, 103, 1971.
26. U. Fano, Phys. Rev. 124, 1866, 1961.
27. Steven Weinberg, Phys. Rev. 131, 440, 1963.
28. R. Huby, Nucl. Phys. A138, 442, 1969.
29. R. L. McGrath, N. Cue, W. R. Hering, L. L. Lee, Jr., B. L. Liebler, Z. Vager, Phys. Rev. Lett. 25, 682, 1970.
S. A. A. Zaidi, C. L. Hollas, J. L. Horton, P. J. Riley, J. L. C. Ford, Jr., C. M. Jones, Phys. Rev. Lett. 25, 1503, 1970.
30. A. I. Baz, Ja. B. Zeldovics, A. M. Perelomov: Rasszejanyije, reakcii i raszpadi v nyereljatyvistszkoj kvantovoj mehanike, Nauka, Moszkva 1971, VII. fejezet
31. Tore Berggren, Nucl. Phys. A169, 353, 1971.
32. R. Huby, Phys. Lett. 33B, 323, 1970.
33. B. J. Cole, R. Huby, J. R. Mines, Phys. Lett. 33B, 320, 1970.
34. B. J. Cole, R. Huby, J. R. Mines, Phys. Rev. Lett. 26, 264, 1971.
35. B. Gyarmati, T. Vertse, Nucl. Phys. A182, 315, 1972.
36. B. Gyarmati, T. Vertse, J. Zimányi, M. Zimányi, Phys. Rev. C1, 1, 1970.
J. Zimányi, M. Zimányi, B. Gyarmati, T. Vertse, Acta Phys. Hung. 28, 251, 1970.
37. S. A. A. Zaidi, P. von Brentano, Phys. Lett. 23, 466, 1966.
38. T. Tamura, C. E. Watson, Phys. Lett. 25B, 186, 1967.
39. Rory Coker, Taro Tamura, Phys. Rev. 182, 1277, 1969.
40. W. R. Coker, C. L. Hollas, P. J. Riley, S. Sen, Phys. Rev. C4, 836, 1971.
41. J. Zimányi, B. Gyarmati, 1967 (publikálatlan)
J. Zimányi, B. Gyarmati, Phys. Lett. 27B, 120, 1968.
42. G. D. Westin, J. L. Adams, Phys. Rev. C4, 363, 1971.
43. A. M. Lane, R. G. Thomas, Rev. Mod. Phys. 30, 257, 1958.
44. V. Je. Bunakov, K. A. Gridnyev, L. V. Krasznov, Phys. Lett. 34B, 27, 1971.
45. U. Strohbusch, H. J. Körner, G. C. Morrison, J. P. Schiffer, Phys. Rev. Lett. 28, 47, 1972.
46. Gyarmati Borbála, beküldve a Magyar Fizikai Folyóirathoz
47. B. Gyarmati, R. G. Lovas, J. Zimányi, Phys. Lett. 35B, 549, 1971.
48. Lovas Rezső: Rezonáns végállapotok leírása stripping reakciókban, egyetemi doktori értekezés, ATOMKI, Debrecen, 1972.

NEUTRONOKKAL LÉTREHOZOTT, IZOMÉR ÁLLAPOTBÓL SPONTÁN HASADÓ MAGOK KELETKEZÉSÉRE VEZETŐ REAKCIÓK VIZSGÁLATA*

NAGY TIBOR

MTA Központi Fizikai Kutató Intézet, Budapest

TARTALOMJEGYZÉK

I. Bevezetés	556
II. Elméleti áttekintés	558
1. A maghasadás cseppmodellje	558
2. A spontán hasadás valószínűsége	559
3. A gerjesztett mag hasadásának valószínűsége	560
4. A hasadó mag héjszerkezet-effektusa	562
5. A kétpúpú barrier modell és alkalmazása a spontán hasadó izomérekkel kapcsolatos mérések eredményeinek értelmezésénél	563
a) A kétpúpú barrier	563
b) Közbülső állapotok a hasadásnál	565
c) A kétpúpú barrier szerkezetének tanulmányozása a spontán hasadó izomérek sajátosságainak vizsgálata útján	566
III. Mérési módszerek és mérőberendezések	569
1. A mérési módszer megválasztásának szempontjai	569
2. A hasadási termékek detektálása	570
3. A neutronnyalábok jellemzői	571
4. Pulzált neutronnyalábbal végzett mérések	571
5. Ionizációs kamra segítségével végzett mérések	572
6. Szikraszámláló segítségével végzett mérések	573
7. Repülési idő módszer segítségével végzett mérések	575
8. Mérések késleltetett koincidencia módszer segítségével	578
IV. Neutronok radiációs befogásával spontán hasadó izomérek keletkezésére vezető reakciók vizsgálata	580
1. A $^{241}\text{Am}(n, \gamma)^{242}\text{Am}$ és $^{243}\text{Am}(n, \gamma)^{244}\text{Am}$ reakciók gerjesztési függvényeinek mérése	580
2. A mért gerjesztési függvények kiértékelése a kétpúpú barrier modell alapján	584
3. Spontán hasadó izomérek nyerésére irányuló kísérletek termikus neutronok radiációs befogásával létrehozott reakciók útján	590
V. Spontán hasadó izomérek nyerése rugalmatlan neutronszórással	591
1. Hatáskeresztmetszetek mérése széles energiaspektrummal rendelkező neutronnyalábok felhasználásával	591
2. A mért hatáskeresztmetszetek értékelése a kétpúpú barrier modell alapján	594
3. 14,7 MeV energiájú neutronok rugalmatlan szórásával spontán hasadó izomérek keletkezésére vezető reakciók hatáskeresztmetszeteinek mérése	596
VI. $(n, 2n)$ reakciók során keletkező spontán hasadó izomérek keletkezési hatáskeresztmetszeteinek mérése	597
VII. Összefoglalás	600
Irodalom	601

* Kandidátusi Értekezés. Érkezett: 1972. dec. 11.
Mégvédve 1972. jún. 16.

I.

Bevezetés

Rövid idővel a neutronokkal létrehozott maghasadás felfedezése után *Flerov* és *Petrzsak* felfedezte az alapállapotból végbemenő maghasadást, vagy spontán hasadást [1]. A mag izomér állapotból végbemenő spontán hasadását jóval később, 1962-ben *Polikanov* és társai fedezték fel az Egyesített Atomkutató Intézet Magreakciók Laboratóriumában nehézionokkal létrehozott reakciók vizsgálata során [2]. Ez az előbbtől mindenekelőtt anomálisan kis felezési idejével különbözik. Amíg ui. az alapállapotból végbemenő spontán hasadás felezési ideje pl. az U-Cm magok tartományában (páros-páros magok esetén) 10^6 – 10^{16} év [3], addig a spontán hasadó izomereket ugyanezen magtartományban 10^{-9} – 10^{-2} sec-os felezési idők jellemzik [4]. A magok izomér állapotból végbemenő spontán hasadásának valószínűsége néhány esetben eléri az alapállapotú spontán hasadás valószínűségének 10^{30} -szorosát [5].

Jelenleg mintegy 30 spontán hasadó izomér állapot ismeretes. Ezeket az izomereket különféle magreakciókkal hozták létre, s sajátságait különböző módszerekkel vizsgálták. A spontán hasadó izomerek tanulmányozására a nehézionokkal létrehozott reakciókon kívül (n, γ) [6, 10]; $(n, 2n)$ [11]; $(p, 2n)$ [4, 5, 12]; $(d, 2n)$ [4, 5, 12]; (α, xn) [13–16]; (γ, n) [17, 18] reakciókat, valamint különféle direkt reakciókat, mint (d, p) , (d, t) és (d, pn) [4, 5, 12, 19, 20, 21] használtak fel. E vizsgálatok során meghatározták az U, Pu, Am és Cm spontán hasadó izomerek élettartamát és keletkezési hatáskeresztmetszetét. Néhány esetben megmérték olyan xn reakciók gerjesztési függvényét is, amelyek lehetővé tették az izomér állapot gerjesztési energiájának meghatározását [4, 5, 11, 12, 15, 17, 18].

A spontán hasadó izomér állapotok tanulmányozása során az anomálisan kis élettartamon kívül ez állapotok egyéb meglepő sajátságaira is fény derült. Ilyenek: 1. Ezeknek az állapotoknak az ez ideig megállapított egyetlen bomlásmódja a spontán hasadás. Más bomlásmódok (α -részecske, γ -sugárzás, konverziós elektronok) lehetőségének vizsgálata negatív eredményre vezetett [22]. 2. Az izomér-viszonyszám (az izomér keletkezési hatáskeresztmetszetének és a mag alapállapotba történő keletkezési hatáskeresztmetszetének hányadosa) nem változik a magba bevitt impulzusmomentum változásával [23]. 3. A (d, p) és (d, t) direkt reakciókban az izomér-viszonyszám lényegesen kisebb, mint egyéb reakciók esetén. 4. Korrelációt fedeztek fel a spontán hasadó izomér keletkezési folyamata és a gerjesztett hasadás között [6, 7, 8]. Ez a korreláció legélesebben a ^{242}Am és ^{244}Am izotópokra vezető radiációs neutronbefogással járó reakciónál mutatkozik meg [6, 8]. A spontán hasadó izomerek mért gerjesztési függvényei arra mutatnak, hogy bár az izomér állapot energiája kb. 3 MeV [11, 17], a spontán hasadó izomerek keletkezésére vezető reakciók küszöbértéke közel esik a hasadási küszöbértékhez (6,4 MeV a ^{242}Am , és 6,3 MeV a ^{244}Am esetén).

A spontán hasadó izomerek ilyen sajátságai minden bizonnyal a hasadási barrier bonyolult szerkezetére utalnak. Rövid idővel a jelenség felfedezése után többen is próbálkoztak annak értelmezésével [24–28], e próbálkozások eredményeit azonban nehezen lehetett összeegyeztetni a konkrét kísérleti adatokkal.

A spontán hasadó izomér jelenség értelmezésére szolgáló, jelenleg elfogadott modell elméleti alapját *V. M. Strutinsky* adta meg [29]. *Strutinsky* kimutatta, hogy

a mag deformációs energiája a „folyadékcsepp”-energiából és a héjkorrekciós energiából állítható elő. A folyadékcsepp-energiától eltérően a héjkorrekció a mag tömegszámának és a deformációnak oszcilláló függvénye. Ennek eredményeképpen a hasadási barrier egy sor mag esetén az egyszerű parabola alak helyett a nyereg-pontnak megfelelő deformációnál minimummal rendelkezik (kétpúpú barrier).

Feltevés szerint az ilyen kétpúpú barrier felelős a spontán hasadó izomér kialakulásáért; az izomér-nívó a második potenciálvölgy legalacsonyabban fekvő nívója. A spontán hasadó izomér kialakulására vezető reakciók hatáskeresztmetszetei, valamint a gerjesztési függvények alakja erősen függ a mag kétpúpú barrier-jének paramétereitől. Az ilyen reakciók tanulmányozása tehát a hasadási barrier szerkezetére vonatkozó értékes felvilágosítást adhat.

Jungclaussen a kétpúpú barrier feltevés alapján sikeresen értelmezte a $^{242}\text{Pu}(d, 2n)^{242}\text{Am}$ reakció vizsgálata során kapott kísérleti eredményeket [30]. A kétpúpú hasadási barrier feltételezés helyességének valószínűségét erősítik meg a hasadási folyamatok tanulmányozása során észlelt egyéb különleges tulajdonságok is. Ilyen a hasadási hatáskeresztmetszet közbenső szerkezete neutronbefogásnál bizonyos magok, pl. a ^{237}Np [31] és ^{240}Pu [32] esetén, valamint a fotohasadás hatáskeresztmetszete és a fotohasadásnál keletkező hasadási termékek szögeloszlása közötti összefüggés páros-páros magok esetén [33].

Az egyszerű kétpúpú barrier modell azonban még korántsem képes leírni minden, a hasadási jelenségek vizsgálata során észlelt különleges tulajdonságot. Tökéletesítéséhez további elméleti és kísérleti vizsgálatokra van szükség. A modell továbbfejlesztése szempontjából nagy jelentősége van a spontán hasadó izomérek tulajdonságai vizsgálatára irányuló kísérleteknek, mivel e tulajdonságokat nagymértékben meghatározza a kétpúpú hasadási barrier alakja. Az ilyen vizsgálatokat viszont nagymértékben megnehezíti az a tény, hogy az izomér állapotok jelenleg ismert egyetlen bomlásmódja a spontán hasadás. Ilyen módon a spontán hasadó izomérek sajátosságaira vonatkozó ismeretek fő forrásául az ilyen izomér állapotokra vezető magreakciók szolgálnak.

A magreakciók közt első helyet foglalnak el a neutronokkal létrehozott reakciók. A neutronok semleges volta miatt a vizsgálatok céljára a legkisebb energiájú neutronok is felhasználhatók. Ilyen energiáknál sok esetben igen nagy a hasadási hatáskeresztmetszet. Ezenkívül a hasadásra vezető ilyen reakciók egyes jellemzőinek (hatáskeresztmetszetek, küszöbenergiák, gerjesztési függvények) a spontán hasadó izomérek jellemzőivel való összehasonlításakor sokkal határozottabb eredményeket kapunk, mint töltött bombázó részecskék esetén.

Jelen munka célja a spontán hasadó izomérek keletkezésére vezető (n, γ) , (n, n') és $(n, 2n)$ reakciók hatáskeresztmetszeteinek mérése a neutronok széles energiatartományában (termikus energiától 16 MeV-ig) a Th-tól az Am-ig terjedő tömegszámú izotópok esetére, és a mérési eredményeknek a kétpúpú barrier modell alapján történő analízisa.

A vizsgálatokat részben a Központi Fizikai Kutató Intézetben (Budapest), részben az EAI Magreakciók Laboratóriumában (Dubna) végeztük.

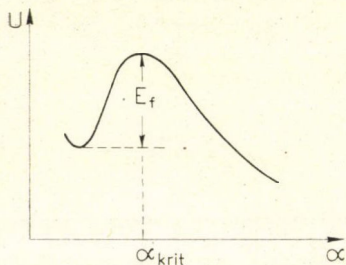
II.

Elméleti áttekintés

A bevezetőben láttuk, hogy a spontán hasadó izoméreket furcsa sajátságok jellemzik. Ezeket a sajátságokat a maghasadás cseppmodellje nem képes értelmezni. Lehetőség kínálkozik a magyarázatra, ha a mag deformációjának „folyadékcsepp”-energiáját kiegészítjük a héjkorrekcióból adódó energiával. Ez a kép oda vezet, hogy a nehéz magok hasadása kétpúpú barrieren át megy végbe. Ebben a fejezetben általános képet adunk a hasadási barrierre (elsősorban a kétpúpú barrierre) vonatkozó elképzelésekről. Megnézzük a kétpúpú hasadási barrier paramétereit, a köztük fennálló kapcsolatot, valamint azt, hogyan befolyásolják e paraméterek a hasadásra és a spontán hasadó izomérek keletkezésére vezető reakciók hatáskeresztmetszetét.

1. A maghasadás cseppmodellje

A maghasadás elmélete abból indul ki, hogy a nukleonok a magban kollektív mozgást végeznek. Az ezen elképzelésen alapuló legegyszerűbb modell a folyadékcsepp-modell, amely a magot elektromos töltésű folyadékcseppnek tekinti. E modell szerint a maghasadást a csepp deformációja előzi meg, amely a felületi energia megnövekedését és az elektrosztatikus energia csökkenését vonja maga után. Meghatározott α_{krit} kritikus deformációig (α a deformáció-paraméter), amely a hasadási küszöbértéknek felel meg, a mag potenciális energiája nő, ezután csökken (1. ábra).



1. ábra. A mag potenciális energiájának függése a deformációtól.

Végül a mag szétszakad. A hasadáskor fellépő deformációs energia különbség a hasadási termékek (fragmentek) gerjesztési energiájába megy át.

Mivel a mag kezdeti állapota energiaminimumnak felel meg, az stabil bizonyos határérték alatti deformációkkal szemben. Az egyszerűség kedvéért forgástestnek tekintett csepp deformált felületét a következő egyenlet fejezi ki:

$$r(\theta) = R[1 + \alpha_0 + \alpha_2 P_2(\cos \theta) + \alpha_3 P_3(\cos \theta) + \dots], \quad (1)$$

ahol $r(\theta)$ a csepp középpontjából a felületnek a forgástengelyhez képest θ szög alatt eső pontjába mutató sugárvektor, $R = r_0 A^{1/3}$ a nem deformált mag sugara, A a tömegszám, $P_n(\cos \theta)$ a Legendre-polinom. A stabilitás feltételeit megkapjuk a deformált csepp felületi és elektrosztatikus energiájának összegére kapott alábbi kifejezésből:

$$E_{s+c} = 4\pi R^2 \sigma \left[1 + \frac{2}{5} \alpha_2^2 + \dots + \frac{(n-1)(n+2)}{2(2n+1)} \alpha_n^2 + \dots \right] + \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R} \left[1 - \frac{1}{5} \alpha_2^2 - \dots - \frac{5(n-1)}{(2n+1)^2} \alpha_n^2 - \dots \right], \quad (2)$$

ahol σ a felületi feszültség, Z a rendszám. Ahhoz, hogy a mag az $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ para-

méterekkel jellemzett kis deformációkkal szemben stabil legyen szükséges, hogy az α_2^2 együttthatói pozitív értékűek legyenek, amiből következik, hogy:

$$\frac{Z^2}{A} < \left(\frac{Z^2}{A} \right)_{\text{krit}} = \frac{40}{3} \pi \sigma \frac{r_0^3}{e^2} \approx 50. \quad (3)$$

A természetben előforduló legnehezebb magokra $Z^2/A \approx 40$. Az

$$x = \frac{Z^2/A}{(Z^2/A)_{\text{krit}}} \quad (4)$$

kifejezést hasadási paraméternek nevezik. A hasadási barrier magasságának (E_f) e paramétertől való függését a következő formában lehet kifejezni:

$$E_f = 4\pi R^2 \sigma f(x), \quad (5)$$

ahol $f(x)$ az $x \ll 1$ és $(1-x) \ll 1$ határesetekben analitikusan, általános esetben azonban, valamint nagy deformációk esetére numerikusan kifejezhető mennyiség. Kvalitatíve E_f csökken a hasadási paraméter növekedésével, a kísérletek azonban azt mutatják, hogy a hasadási barriernek nem csökkennek olyan gyorsan, ahogyan azt a folyadékcsepp-modell alapján várni lehetne (valójában azok 5–7 MeV energiatartományba eső értékek s többé-kevésbé konstansok).

2. A spontán hasadás valószínűsége

A spontán hasadásra csak a kvantummechanikai alagúteffektus képes magyarázatot adni. A spontán hasadás W_f valószínűségét a potenciálbarrieren való áthatolás valószínűsége adja meg:

$$W_f \approx \omega \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{2[E_{s+c}(\alpha) - E_0] \sum_i m_i \left(\frac{dx_i}{d\alpha} \right)^2} d\alpha \right\}, \quad (6)$$

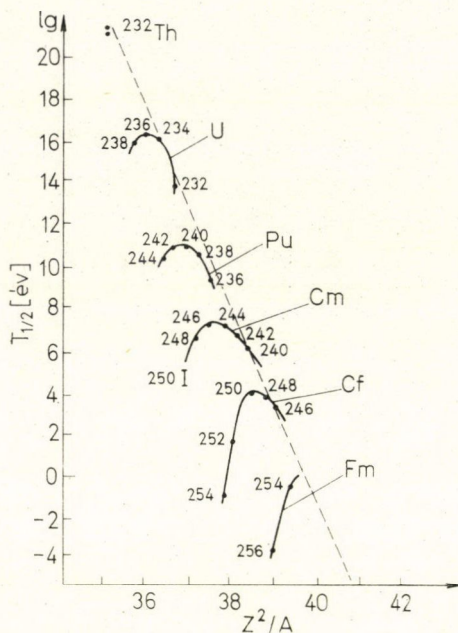
ahol ω a mag kvadrupól-rezgéseinek frekvenciája, m_i , x_i a nukleonok tömege és koordinátája, E_0 a mag kezdeti energiája. A (6) formulából durva becslésként a következő egyszerűbb formulát kaphatjuk:

$$W_f \approx \omega \cdot e^{-\frac{\alpha}{\hbar} \sqrt{2mE_f}}. \quad (7)$$

A 2. ábrán látható páros-páros magok esetén a spontán hasadás felezési idejének a Z^2/A -tól való függése. A 2. ábrán feltüntetett adatok analizálása lehetőséget ad arra, hogy a spontán hasadás T_{sf} felezési idejét empirikus formulával fejezzük ki. *Seaborg* megfigyelte, hogy a páros-páros magok spontán hasadásának felezési idejét általános módon a következő kifejezéssel lehet leírni [39]:

$$T_{sf} = 10^{-21} \cdot 10^{178-3,75Z^2/A} \text{ sec.} \quad (8)$$

Mivel a spontán hasadás a barrieren való áthatolás kvantummechanikai effektusa, természetes, hogy T_{sf} értéke erősen függ a barrier E_f magasságától. *Frankel*



2. ábra. A spontán hasadás felezési idejének Z^2/A -tól való függése páros-páros magok esetén.

$E(\alpha)$ egydimenziós potenciálbarrieren való áthaladásának valószínűségét. A spontán hasadás felezési idejére kapott kifejezés a közvetlen számolás számára túlságosan bonyolultnak bizonyult, ezért a barrier maximuma körül sorfejtést hajtottak végre. Elhanyagolva a magasabb rendű tagokat, a következő leegyszerűsített kifejezésre jutottak:

$$T_{sf} = 3,1 \cdot 10^{-21} \cdot \exp \left\{ \frac{2\pi}{|\hbar\omega|} [E_f - (E - E_0)] \right\} \text{ sec}, \quad (11)$$

ahol $\hbar\omega$ a barrier szélességére jellemző paraméter, E a kiinduló állapot energiája, E_0 az alapállapot energiája.

3. A gerjesztett mag hasadásának valószínűsége

Ha a magba neutron, γ -kvantumot vagy töltött részecskét juttatunk, a kinetikus energia, valamint a bejuttatott részecske kötési energiája gyorsan eloszlik a mag sok nukleonja között (az ilyen rendszert nevezzük compound magnak). Ahhoz hogy a maghasadás létrejöjjön szükséges, hogy a gerjesztési energia egy része a kollektív szabadsági fokokra koncentrálódjék. Az ilyen mag hasadásának valószínűségét Γ_f hasadási szélességgel jellemezzük. Általános statisztikai megfontolások-

és *Metropolis* [40] erre az összefüggésre a következő kifejezést kapta:

$$T_{sf} = 10^{-21} \cdot 10^{7,85 E_f} \text{ sec}. \quad (9)$$

Seaborg azzal a feltételezéssel, hogy a (9) kifejezés általános érvényű, a (8) kifejezést felhasználva az $E_f = f(Z^2/A)$ összefüggésre a következő kifejezést kapta:

$$E_f = \left(19,0 - 0,36 \frac{Z^2}{A} \right) \text{ MeV}. \quad (10)$$

Hangsúlyozni kell, hogy a (8), (9) és (10) kifejezés csak páros-páros magokra, az utóbbi kettő ezenkívül a Z^2/A értékek korlátozott intervallumára érvényes. A páratlan magok spontán hasadásának valószínűsége csaknem 10^3 -szor, míg a páratlan-páratlan magoké kb. 10^5 -szer kisebb a páros-páros magok spontán hasadásának valószínűségénél.

A (9) formulát a $T_{sf} E_f$ -től való függésének meghatározására félempirikus módszerrel hozták létre. *Nix* és *Walker* erre az összefüggésre tisztán elméleti úton jutott [41]. A kollektív és belső szabadsági fokokat különválasztva kiszámolták egy, a hasadás irányába mozgó, $B(\alpha)$ tömegparaméterű rendszer

ból az átlagos hasadási szélességre a következő kifejezés adódik [42]:

$$\bar{\Gamma}_f = \frac{\bar{D}}{2\pi} N_f, \quad (12)$$

ahol \bar{D} az adott spinnel és paritással rendelkező compound mag energianívói között levő átlagos távolság, N_f a hasadási csatornák átlagszáma.

Feltételezve, hogy a hasadási barrier parabolikus alakú, azaz hogy egy harmonikus oszcillátor potenciális energiájának „fordított” görbéjével ábrázolható, Hill és Wheeler meghatározta a barrieren való áthatolás valószínűségének (W) a deformáció E_b küszöbenergiától való függését adott E^* gerjesztési energia esetén [43]:

$$W(E^* - E_b) = \frac{1}{1 + e^{\frac{2\pi}{\hbar\omega_b}(E_b - E^*)}}, \quad (13)$$

ahol ω_b a potenciálra jellemző körfrekvencia. Ez a kifejezés egységnyi $E^* \gg E_b$ esetén, 0,5 $E^* = E_b$ esetén és élesen csökken a gerjesztési energia további csökkenésével. A csatornák effektív száma [42]:

$$N_f = \sum_{b=1}^{\infty} W(E^* - E_b). \quad (14)$$

A hasadási csatornák a gerjesztési energia növelésével fokozatosan bekapcsolódnak a hasadási folyamatba, lépcsős függvényt adva N_f -re. Bohr kimutatta [44], hogy ha a hasadó rendszer (konfiguráció) a nyeregpontra elég lassan megy át, akkor ebben a pontban határozott energiával és spinnel rendelkező, különálló, kvázistacionárius állapotokról beszélhetünk. Ezért beszélhetünk egyes hasadási csatornákról is; s ebből következik a (12) formulában szereplő N_f értelme is, amelyet eredetileg úgy definiáltak, hogy az „az adott gerjesztési energiánál rendelkezésre álló nívók száma az átmeneti állapotban” [45].

A barrierre és a hasadási csatornákra vonatkozó információk nagy részét a hasadó magoknak néhány MeV-ig terjedő energiájú neutronokkal történő besugárzása során kaptuk. Mivel ilyen esetekben a hasadás compound magon át megy végbe [43, 45], a hatáskeresztmetszet a következő formában fejezhető ki:

$$\sigma_f = \sigma_c \frac{\bar{\Gamma}_f}{\bar{\Gamma}_f + \bar{\Gamma}_n + \bar{\Gamma}_\gamma}, \quad (15)$$

ahol σ_c a compound mag keletkezési hatáskeresztmetszete, $\bar{\Gamma}_n$ az átlagos neutron-, $\bar{\Gamma}_\gamma$ pedig az átlagos radiációs nívószélesség.

A $\bar{\Gamma}_f$ hasadási csatornaszélesség gyorsan nő a gerjesztési energia növekedésével. Az energiától való hasonló függést találtak a neutronkibocsátás valószínűségére jellemző $\bar{\Gamma}_n$ neutron-csatornaszélességre is.

A Γ_f és Γ_n szélességek átlagértékeinek a gerjesztési energiától való, előbb említett monoton növekedésén kívül megfigyelték a Γ_f és Γ_n értékeknek a compound mag nívóról-nívóra való átmeneteikor bekövetkező éles változásait is. Ezek a változások olykor igen nagymértékűek. Ugyanakkor a Γ_γ radiációs szélesség gyakorlatilag nem változik a nívóról-nívóra történő átmeneteknél. Értéke $(0,035 \pm 0,01)$ eV [46]. A hasadási folyamat e sajátosságát a magok kollektív modellje a következő módon értelmezi. A hasadó mag már alapállapotában eltér a gömbszimmetrikus

formától. Alakja közelítőleg forgásellipszoidnak tekinthető. Minthogy a küszöb-energiát nem nagy mértékben felülmúló gerjesztési energiáknál az energia nagy része a deformáció potenciális energiája alakjába megy át, a magot gyengén gerjesztettnek (hidegnek) lehet tekinteni. A mag számára a potenciálbarrieren való lassú átmenet ideje alatt elérhető kvantumállapotok ez esetben messze esnek egymástól, s a gömbtől eltérő alakú nehéz magok alacsony gerjesztési nívóinak spektrumához hasonló spektrumot alkotnak. Az ilyen egyszerű rotációs spektrumok fő jellemzői (spin, paritás, a nívók közötti és a rotációs sávok közötti távolságok) meghatározhatók. A nívók kis száma a mag közbülső állapotában a hasadás számára lehetséges átmenetek (csatornák) kis számát, s ennek megfelelően a nívóról-nívóra való átmeneteknél a Γ_f nagy fluktuációját jelenti. A radiációs bomlás, szemben a hasadással, sok csatornán át mehet végbe, mivel a mag gerjesztett és alapállapotai között nagyszámú nívó helyezkedik el. Ezért marad a Γ_γ értéke konstans a különböző nívók esetén.

$E_n > 0,5$ MeV energiatartományban $\bar{\Gamma}_\gamma \ll (\bar{\Gamma}_n + \bar{\Gamma}_f)$, ezért ilyen esetekben $\bar{\Gamma}_\gamma$ értékét a (15) formulában figyelmen kívül hagyhatjuk. Ekkor:

$$\sigma_f = \sigma_c \frac{\bar{\Gamma}_f}{\bar{\Gamma}_f + \bar{\Gamma}_n}. \quad (16)$$

A jelen munkában ismertetett mérések eredményeinek kiértékelésekor többször felvetődik a hasadás és a neutron-emisszió közötti konkurrencia kérdése. Nézzük meg ezért röviden, hogyan függ a Γ_f/Γ_n viszonyszám a mag gerjesztési energiájától és tömegszámától olyan gerjesztési energiák esetén, amelyek jelentősen felülmúlják a neutron-emisszió küszöbértékét.

A Γ_f/Γ_n viselkedését tanulmányozva *Lindner* és *Turkevich* különböző munkák adatait analizálta [47]. Arra a következtetésre jutottak, hogy az urán körüli tartományba eső magokra Γ_f/Γ_n nem változik a gerjesztési energia változásával. Ugyanakkor kimondható, hogy a Γ_n/Γ_f viszonyszám általában a tömegszám növekvő függvénye [48, 49].

A barrierre és a hasadási csatornákra vonatkozó elképzelések elősegítik a hasadási hatáskeresztmetszetekben és a hasadási termékek szögeloszlásában mutatkozó alapvető sajátságok megértését. Van azonban egy sor jelenség, amelyeket a fenti elképzelések alapján nem tudunk értelmezni.

4. A hasadó mag héjszerkezet-effektusa

Amint arra rámutattunk, az a maghasadás mechanizmusára vonatkozó feltevés, hogy a hasadás meghatározott csatornákon át megy végbe, pozitív lépést jelentett a cseppmodellel való tárgyaláshoz képest. Ez azt jelenti, hogy a hasadás jelenségét nem tudjuk leírni, ha csak a nukleonoknak a magban kialakult kollektív mozgásával számolunk. Számításba kell venni a nyeregpont tartományába eső deformációval rendelkező mag belső állapotait is. Erre utal egy másik kísérleti tény is, amely szerint a hasadási termékekből kibocsátott neutronok átlagos számának a hasadási termékek tömege szerinti eloszlása speciális, fűrészfog alakú. *Apalin* és társai ezt a jelenséget a következő módon értelmezik [50]: a két hasadási termék belső szerkezete nagymértékben különbözik egymástól, bár a hasadási termékek

tömegei csaknem egyenlőek egymással. A neutronok átlagos számának minimuma $A \approx 130$ tömegszámánál van. Ez a $Z=50$ és $N=82$ kettős mágikus számú héj jelenlétével kapcsolatos. Az ilyen hasadási termék majdnem „csupasz”, és közel gömb alakú. A komplementáris hasadási termék azonban, amelynek tömege viszonylag közel esik a másik hasadási termék tömegéhez, erősen deformált, s így több neutront képes kibocsátani magából.

A tapasztalat szerint — amint azt már előbb említettük — a mért hasadási barrierok nehéz magok esetén a hasadási paraméter növekedésével nem csökkennek olyan gyorsan, amint az a cseppmodellből következne. Ez is egyike azoknak a jelenségeknek, amelyeket a cseppmodell nem tud értelmezni.

Az utóbbi években olyan új jelenségeket fedeztek fel, amelyek ellentmondanak a maghasadás fentebb ismertetett mechanizmusának: a spontán hasadó izoméreket, a hasadási rezonanciák modulációit neutronbefogás esetén, a hasadási termékek anomális szögeloszlását olyan maghasadásoknál, amelyeket a hasadási barrier közelébe eső energiájú γ -kvantumokkal hoztak létre.

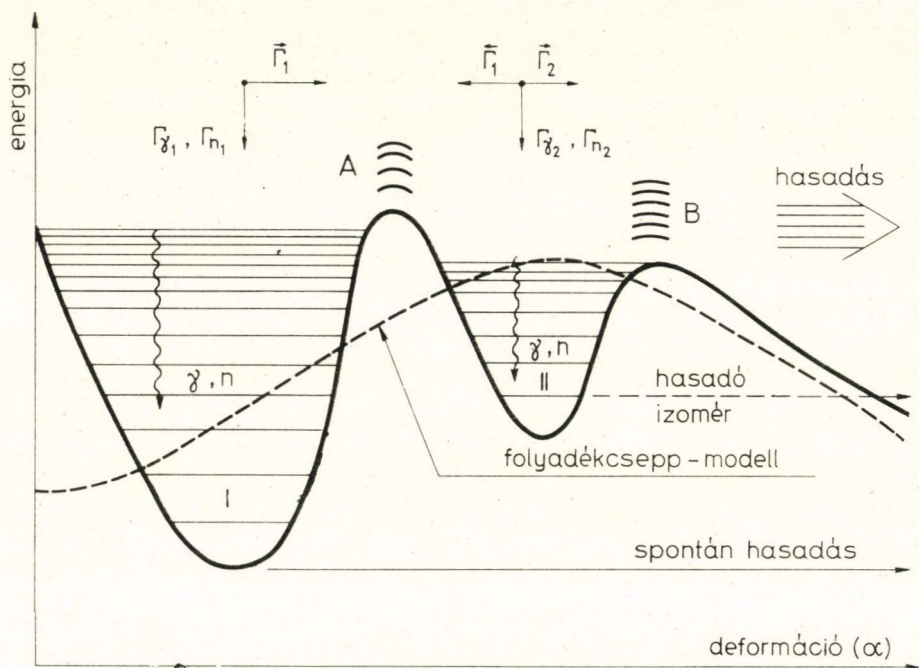
E jelenségek értelmezése végett a maghasadás elméletének továbbfejlesztése vált szükségessé. Elsősorban azt kell tudnunk, hogyan változik a mag alakja a hasadás folyamán a hasadás pillanatáig. Ebből a célból nagy pontossággal ki kell számolni a potenciális energiának a mag deformációjától való függését. Ilyen típusú számításokat végzett *Strutinsky*, figyelembe véve mind a mag kollektív tulajdonságait, mind az egyes nukleonok befolyását. Ezekből a számításokból következik, hogy a reális hasadási barrier bonyolult alakú (minimuma van a nyeregpont-tartományban). Sok esetben a hasadást kétlépcsős folyamatnak kell tekinteni, ahol is fontos szerepet játszanak a második minimumban kialakult kvázistacionárius állapotok. A hasadás mechanizmusának ilyen szemlélete, legalábbis kvalitatíve, magyarázni tudja a fentebb felsorolt jelenségeket. Ezért a következő pontban kissé részletesebben szemügyre vesszük a kétpúpú barrier modellt, az abból levonható következtetéseket, a spontán hasadó izomérek sajátosságainak, valamint az ilyen izomérek keletkezésére vezető reakciók mechanizmusának értelmezését a kétpúpú barrier modell alapján. Kiválasztjuk azokat a formulákat, amelyek a hasadási hatáskeresztmetszetek kiszámolásánál szükségesek, hogy azután az így kiszámolt hatáskeresztmetszet-értékeket összehasonlíthassuk a kísérletek során kapott hatáskeresztmetszetek értékeivel. Arra vonatkozóan, milyen mértékben értelmezi ez a modell a maghasadás egyéb jelenségeit, irodalmi utalásokra szorítkozunk.

5. A kétpúpú barrier modell és alkalmazása a spontán hasadó izomérekkel kapcsolatos mérések eredményeinek értelmezésénél

a) A kétpúpú barrier

A folyadékcsepp-modell alapján számolva, a hasadás energetikáját, valamint a teljes kötési energiát a magok átlagos tulajdonságaiként kapjuk meg. A mag tömegének szisztematikus mérése arra az eredményre vezetett, hogy az átlagértéktől való legnagyobb eltérések az ún. héjakkal kapcsolatosak, amelyek általános értelemben a Fermi-felület közelében elhelyezkedő nukleonok energiaeoszlásában fennálló egyenetlenségekkel magyarázhatók [51]. Ezek az egyenetlenségek befolyásolják a hasadási barrierok értékeit is.

A cseppmodellel számolt hasadási barriert héjkorrekcióval egészítve ki *Strutinsky* meghatározta, hogyan befolyásolják a héjak a mag teljes kötési energiáját. Ismeretes, hogy a cseppmodellben a deformáció potenciális energiáját parabolikus görbe ábrázolja. A héjkorrekció a deformáció oszcilláló függvénye. Ezért a deformáció cseppmodell alapján számolt potenciális energiája és a héjkorrekció összegeként kapott tényleges hasadási barriert sok mag esetén két maximummal rendelkező görbe írhatja le (3. ábra). A számítások azt mutatják, hogy a potenciális energiában



3. ábra. A nehéz magok deformációs energiájában jelentkező (idealizált) kétpúpú barrier. Lehetséges átmenetek a két stacionárius állapot között.

a második minimum legmélyebb azoknál a magoknál, amelyek neutronjainak száma kb. 146—148. Ez a második minimum olyan nagy deformációnál található, amely az alapállapot deformációnak közel kétszerese [52]. A második minimum helye az urántól a berkéliumig terjedő intervallumba eső magok esetében a folyadék-csepp-modell alapján számolt barrier nyeregpontjának felel meg.

A két minimum létezése, amelyeket a belső barrier választ el egymástól azt jelenti, hogy a mag gerjesztett állapotai két csoportra oszthatók. Az egyes csoportok níói között kialakult kölcsönhatást a belső barrier magassága (és szélessége) határozza meg. Ez a kölcsönhatás lehet erős, ha a níók a belső barrier tetejéhez közel helyezkednek el, és gyenge az alacsonyabban fekvő níók esetén. A gerjesztett állapotok két gyengén kötött rendszerének léte magyarázza azt a kis energiájú neutronokkal létrehozott, befogásos reakcióknál tapasztalt jelenséget, hogy a barrier alatti hasadási rezonanciák modulálódnak [32, 53—55]. A kétpúpú barrier léte

lehet kapcsolatos azzal a nehézséggel is, amelyet a hasadási termékek szöganizotrópiájának a Bohr-féle csatornaanalízis alapján való értelmezésénél tapasztaltak bizonyos esetekben [56].

A nehéz magok potenciális energiájában jelentkező második minimum a közel-múltban végzett számítások szerint ([57—59]) eléggé tipikus, mivel a második minimum minden jelenleg ismert reális modell szerint számolva jelentkezik, ideértve a véges mélységű Saxon—Woods-potenciált is [59].

b) Közbülső állapotok a hasadásnál

Ha a gerjesztési energia elég nagy, a nukleonok kollektív mozgása gyorsan eloszlik a többi szabadsági fokok között s a mag olyan alakot vesz fel, amely a két energiaminimum valamelyikének felel meg. A kollektív szabadsági fokokba viszonylag kis mennyiségű energia koncentrálódik. Nagyságrendjét a T maghőmérséklet határozza meg. Ha ez az energia kisebb a potenciálvölgy mélységénél, a mag egyensúlyi alakját sokáig megtartja. Következésként a compound mag két közbülső egyensúlyi állapottal rendelkezik (lásd a 3. ábrán I. és II.); mindkettőnek van saját hőmérséklete (T_1 és T_2), saját spektruma stb. A magban lejátszódó sok folyamat leírható a két potenciálvölgy állapotai között, valamint az egyes völgyön belül végbemenő egyszerű átmenetekkel.

Tipikus átmeneteket ábrázol a 3. ábra. A két völgyben kialakult T_1 és T_2 hőmérséklet a belső állapotok sűrűségét jellemzi adott teljes gerjesztési energiánál. A völgyek között a γ -kvantum-kisugárzással és neutron-kibocsátással járó szokásos átmenetek mellett lehetőség van kisugárzás nélküli átmenetekre is.

Tekintsünk most egy olyan hullámcsomagot, amely mindkét völgyben a nívók közti távolsághoz képest nagy energia-diszperzióval rendelkezik [51], s legyen az első és második völgy állapotainak betöltöttsége τ időben $n_1(\tau)$ és $n_2(\tau)$. Tétélezzük fel, hogy a hullámcsomag $\tau=0$ időben az első völgyben tartózkodik (pl. a neutron-befogás esete), azaz:

$$n_1(0)=1, \quad n_2(0)=0. \quad (17)$$

$\tau > 0$ esetén a következő egyenletek érvényesek:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial \tau} &= -\Gamma_1' \cdot n_1 + \bar{\Gamma}_2 \cdot n_2, \\ \frac{\partial n_2}{\partial \tau} &= \bar{\Gamma}_1 \cdot n_1 - \Gamma_2' \cdot n_2, \end{aligned} \quad (18)$$

ahol $\hbar=1$. A $\bar{\Gamma}$ jelölés a belső parciális átmenetek szélességeit jelenti az első völgyből a másodikba ($\bar{\Gamma}_1$) és fordítva ($\bar{\Gamma}_2$); Γ_1' és Γ_2' az állapotok teljes szélessége az első, illetve a második völgyben:

$$\Gamma_1' = \bar{\Gamma}_1 + \Gamma_1^d; \quad \Gamma_2' = \bar{\Gamma}_2 + \Gamma_2^d, \quad (19)$$

ahol $\Gamma_{1,2}^d$ a valamennyi energetikailag lehetséges parciális bomlásra vonatkozó bomlási szélesség összege:

$$\begin{aligned} \Gamma_1^d &= \Gamma_{n_1} + \Gamma_{\gamma_1}, \\ \Gamma_2^d &= \Gamma_{n_2} + \Gamma_{\gamma_2} + \bar{\Gamma}_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Amint látjuk, a Γ_2^d kifejezés tartalmazza a második völgyben levő hasadási szélességet ($\vec{\Gamma}_2$) is. Erre érvényes a Bohr—Wheeler-formula [45]:

$$\vec{\Gamma}_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{N(B)}{Q_2}, \quad (21)$$

ahol $N(B)$ a csatornák effektív száma a B barriernél, Q_2 a második potenciálvölgyben E^* gerjesztési energia mellett fennálló nivósűrűség. Ha az E^* energia kisebb a B barriernél, $N(B)$ a potenciálbarrieren való áthatolás valószínűségére jellemző exponenciális kifejezés.

Amint az a fentebb bevezetett kifejezésekből következik, a barrier alatti energiájú, monoenergiás neutronokkal létrehozott reakciók során a hasadási szélességek eloszlásában várható olyan struktúra, amely a második völgyben kialakult állapotokkal kapcsolatos. A hasadási hatáskeresztmetszet (σ_f) modulálódik; a modulációt a második völgyben levő állapotok teljes szélessége ($\vec{\Gamma}_2$) határozza meg [53, 54].

Bizonyos átmenetek a második völgyben az ott elhelyezkedő alacsonyan fekvő állapotok betöltésére vezetnek. Ilyen esetben a mag hosszú ideig tartózkodik a második völgyben, mivel az első völgybe való átmenet valószínűsége a két völgyet elválasztó potenciálbarrier jelenléte következtében nagymértékben lecsökken. Ez esetben a második völgyből az elsőbe való γ -átmenetek valószínűsége jelentősen csökken, de ugyanúgy lecsökken a második völgy alacsonyan fekvő nivójáról pillanatszerűen bekövetkező hasadás (a prompt hasadás) valószínűsége is. A második völgyben létrejövő kaszkád γ -átmenetek a második völgy legalacsonyabban fekvő kvázistacionárius állapotához — a spontán hasadó izomér állapothoz vezetnek.

c) *A kétpúpú barrier szerkezetének tanulmányozása
a spontán hasadó izomérek sajátosságainak vizsgálata útján*

Vizsgáljuk meg a spontán hasadó izomérek keletkezésére vezető reakciók mechanizmusát a kétpúpú barrier modell alapján. Nem túl nagy gerjesztési energiák (néhány MeV-vel a hasadási barrier feletti energiák) esetén feltételezhető, hogy a hasadás és az izomér-keletkezés folyamata kétlépcsős folyamat. A neutron befogódása után compound mag keletkezik, amelyben hőmérsékleti egyensúly alakul ki (a gerjesztési energia egyrészecske szabadsági fokokba koncentrálódik). Amikor a gerjesztési energia vibrációs szabadsági fokokba megy át, a mag legyőzheti az első barriert, s bejuthat a második potenciálvölgybe. Ha ez a völgy elég mély, akkor abban erős kölcsönhatás jön létre a vibrációs és az egyrészecske szabadsági fokok között. Eredményként a második völgyben ismét hőmérsékleti egyensúly alakul ki és ugyanúgy compound mag keletkezik, mint a neutronbefogás után. Ezt azonban nagyobb deformáció és kisebb hőmérsékleti energia jellemzi. Az ilyen magból kibocsátott γ -kvantumok vagy neutronok spontán hasadó izomérek keletkezésére, a második barrieren való átmenetek pedig hasadásra vezetnek.

Az előbb bevezetett feltevésből következik, hogy az izomér keletkezésének folyamata, ugyanúgy, mint a hasadás folyamata, három fokozatból áll, s hogy a σ_i hatáskeresztmetszet három tényező szorzataként írható fel:

$$\sigma_i = \sigma_c \frac{\vec{\Gamma}_1}{\Gamma_{\gamma_1} + \vec{\Gamma}_1 + \Gamma_{n_1}} \cdot \frac{\Gamma_{d_2}}{\Gamma_{\gamma_2} + \vec{\Gamma}_2 + \Gamma_{n_2} + \vec{\Gamma}_2}. \quad (22)$$

Itt az első szorzó az első potenciálvölgyben kialakuló compound mag keletkezési hatáskeresztmetszete, a második szorzó az első barrieren való átmenet valószínűsége, amely átmenet a második völgyben vezet compound mag kialakulására, s a harmadik szorzó a neutron, vagy γ -kvantum kibocsátásának valószínűsége (ez utóbbi nem vezet a deformáció megváltozásához, a mag a második völgyben marad). A Γ_{d_2} jelölés a neutronok, vagy γ -kvantumok kibocsátására vonatkozó szélesség a második völgyben, amely spontán hasadó izomér állapot kialakulására vezet. Az első barrieren való kisugárzás nélküli átmenetre a parciális szélesség a következő alakú:

$$\Gamma_1 = \frac{N_1}{2\pi\rho_1(E^*)}, \quad (23)$$

ahol N_1 az első barrieren való átmenet számára szolgáló nyitott csatornák száma, $\rho_1(E^*)$ a nívósűrűség az első völgyben E^* gerjesztési energia esetén.

A $\vec{\Gamma}_1$ parciális szélesség exponenciálisan nő az energia növekedésével, amíg a gerjesztési energia el nem éri az első barrier tetejét (ez után $\vec{\Gamma}_1$ növekedése kisebb mértékű). Amennyiben a (22) formula harmadik szorzója gyengén függ az energiától (e szorzó energiafüggéséről később lesz szó), úgy a spontán hasadó izomér keletkezési hatáskeresztmetszetének menetét a $\vec{\Gamma}_1$ parciális szélesség viselkedése, ez utóbbit pedig a belső barrier paraméterei határozzák meg. Ezért a spontán hasadó izomerek keletkezésére vezető reakciók gerjesztési függvényének mérése olyan gerjesztési energia tartományban, amely közel esik a belső barrier csúcsához, lehetőséget nyújt arra, hogy e barrier paramétereire vonatkozó értékes információkhoz jussunk. A reakció hatáskeresztmetszete exponenciálisan nő a gerjesztési energia növekedésével amíg az el nem éri a belső barrier magasságát, majd ez a növekedés megszűnik. A gerjesztési függvény meredekségét a barrieren való áthatolás valószínűségének változása határozza meg, amely a belső barrier szélességével és a tömegegyütthatóval kapcsolatos $\hbar\omega$ paraméter függvénye.

Feltételezve, hogy hasadáskor ugyanolyan kétlépcsős folyamat játszódik le, mint az izomér kialakulásakor, a hasadási hatáskeresztmetszetre a következő formula írható fel:

$$\sigma_f = \sigma_c \frac{\vec{\Gamma}_1}{\Gamma_{\gamma_1} + \Gamma_{n_1} + \vec{\Gamma}_1} \cdot \frac{\vec{\Gamma}_2}{\Gamma_{\gamma_2} + \Gamma_{n_2} + \vec{\Gamma}_2 + \vec{\Gamma}_2}. \quad (24)$$

A spontán hasadó izomér keletkezési hatáskeresztmetszet és a hasadási hatáskeresztmetszet viszonyzáma ekkor a következő lesz:

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_f} = \frac{\Gamma_{d_2}}{\vec{\Gamma}_2}. \quad (25)$$

γ -kvantum kibocsátás esetén a redukált szélességre a következő kifejezés adódik [60]:

$$\Gamma_{\gamma_2} \sim \frac{1}{\rho_2(E^* - E_i)} \int_0^{E^* - E_i} E^3 \rho_2(E^* - E_i - E) dE, \quad (26)$$

neutronkibocsátás esetén pedig:

$$\Gamma_{n_2} \sim \frac{1}{\varrho_2(E^* - E_i)} \int_0^{E^* - B_n - E_i} E \varrho_2(E^* - B_n - E_i - E) dE, \quad (27)$$

ahol $\varrho_2(E^*)$ a nívósűrűség E^* gerjesztési energia esetén, E_i az izomér nívó energiája, E a kibocsátott neutron, vagy γ -kvantum kinetikus energiája.

Ha ismerjük a gerjesztési energiát és az izomér-nívó energiáját, akkor a (26) és (27) formula segítségével kiszámolhatjuk a Γ_{γ_2} és Γ_{n_2} parciális szélességek értékét a második potenciálvölgy nívóira. Ugyancsak feltételezhetjük, hogy ezek a Γ_{γ_2} és Γ_{n_2} értékek közel esnek az első völgyben levő parciális szélességek értékeihez, amelyeket kísérletekből ismerünk, ha azokat a megfelelő völgy fenekétől számolt azonos gerjesztési energiák mellett nézzük.

Kiszámolva, ill. felhasználva a tapasztalatból ismert Γ_{γ_2} és Γ_{n_2} értékeket, valamint kísérletileg meghatározva a σ_i/σ_f viszonyszámot, a (25) formula segítségével megkaphatjuk a $\vec{\Gamma}_2$ hasadási szélesség értékét a második völgyben. Ez a $\vec{\Gamma}_2$ érték lehetővé teszi a második barrier magasságának meghatározását, mivel:

$$\vec{\Gamma}_2 = \frac{N_2}{2\pi\varrho_2(E^* - E_i)}, \quad (28)$$

ahol N_2 az effektív csatornák száma a külső barrieren. Az N_2 érték függ a gerjesztési energiák különbségétől és a második barrier magasságától.

A második barrier magasságára vonatkozóan információkat kaphatunk úgy is, hogy megmérjük a σ_i/σ_f viszonyszám energiafüggését. Ha a gerjesztési energia kisebb marad a második barrier magasságánál, akkor a $\vec{\Gamma}_2$ redukált hasadási szélesség gyorsan csökken, míg a σ_i/σ_f viszonyszám növekszik. Ilyen helyzet csak kis gerjesztési energiák esetén állhat elő, amikor energetikailag csak az (n, γ) reakció jöhet létre.

Az izomér állapot energiáját az izomér és az alapállapotra vezető reakciók küszöbértékeinek különbségéből határozhatjuk meg. Küszöbméréseket (γ, n) [17, 18], $(p, 2n)$ [4, 5, 12], $(n, 2n)$ [11] és (α, xn) [15] reakcióknál végeztek Pu és Am izotópokra. Azt találták, hogy az izomér állapotok energiája kb. 3 MeV és keveset változik a tömegszám változásával. A ^{236}Pu és ^{238}Pu magoknál az izomérek energiái anómáisan nagyoknak — kb. 4 MeV-nek — adódtak. Igen valószínű, hogy ezek az energiák nem az alap-, hanem a gerjesztett állapotoknak felelnek meg a második völgyben.

Az alapállapotú és az izomér nívók élettartamának mérésével is meghatározhatjuk a belső és külső barrier paramétereit. A (11) formulával analóg módon az izomér állapot felezési idejét a következő kifejezés határozza meg [41]:

$$T_{sf}^i \approx 3 \cdot 10^{-21} \cdot e^{\frac{2\pi}{\hbar\omega_2}(E_2 - E_i)} \text{ sec}, \quad (29)$$

ahol E_2 és E_i a második barrier, ill. az izomér nívó energiája, $|\hbar\omega_2|$ a barrier görbületére jellemző paraméter.

Ha a spontán hasadás alapállapotból megy át a kétpúpú barrieren, akkor a spontán hasadás felezési idejét leíró (11) kifejezés a következőképpen módosul:

$$T_{sf}^g \approx 3 \cdot 10^{-21} \cdot e^{2\pi \left[\frac{E_1}{|\hbar\omega_1|} + \frac{E_2}{|\hbar\omega_2|} \right]} \text{ sec}, \quad (30)$$

ahol E_1 és $\hbar\omega_1$ az első barrier magassága, ill. a szélességére jellemző paraméter. Ilyen módon a spontán hasadó izomérek keletkezésére vezető reakciók hatáskeresztmetszeteinek és gerjesztési függvényeinek mérésével felvilágosítás nyerhető a kétpúpú barrier paramétereire vonatkozólag. Ezek az adatok megkaphatók más jelenségek analíziséből is (barrier alatti rezonanciák modulációja, fotohasadásnál kapott hasadási termékek szögeloszlása). A különböző módon kapott adatok összehasonlítása jó kritériuma lehet a kétpúpú barrier modell érvényességének, és az ennek alapján a spontán hasadó izomérek keletkezésére vezető reakciók mechanizmusára vonatkozóan levont következtetések helyességének.

III.

Mérési módszerek és mérőberendezések

1. A mérési módszer megválasztásának szempontjai

A vizsgálataink során alkalmazott mérőberendezések ismertetése előtt nézzük meg, milyen általános szempontok szerint történt azok kiválasztása.

Mivel az izomér állapotok egyetlen bomlástípusa a spontán hasadás, a vizsgálatok szempontjából alapvető kérdés, hogyan lehet szétválasztani a spontán hasadó izomérek hasadási termékeit a gerjesztett (prompt) hasadás hasadási termékeitől. A kétféle hasadás közt fennálló alapvető különbség az, hogy a spontán hasadó izomérek keletkezésének és bomlásának időpontja nem esik egybe egymással. Az eltérés nagyságát az izomér nivó élettartama határozza meg. A fő kérdés tehát a mérési módszer megválasztásánál az, hogyan választhatjuk szét egymástól a bombázó részecske befogódása pillanatában keletkező hasadási termékeket az e pillanathoz képest kb. $(10^{-9} - 10^{-2})$ sec idővel később keletkező hasadási termékektől.

Ezt a problémát különbözőképpen lehet megoldani. Ilyenek: 1. A céltárgynak (targetnek) pulzált neutronnyalábbal történő besugárzása. Ez esetben külön regisztrálhatjuk a neutronimpulzusok ideje alatt keletkező prompt hasadás hasadási termékeit, s a neutronimpulzusok közötti időközökben a spontán hasadó izomérek hasadásából származó (késleltetett) hasadási termékeket [34, 37, 38]. 2. A prompt és késleltetett hasadással járó magreakciókban keletkező kétféle típusú hasadási termékek térbeli elkülönítése. A hasadási termékek ilyen módon való megkülönböztetését az teszi lehetővé, hogy a bombázó neutron a magnak impulzust ad át, amely izomér állapotba jutása esetén kilöködhet a targetből. A kilökött izomér állapotú mag repülési úthosszát adott feltételek mellett az izomér állapot élettartama határozza meg. 3. Az izomér nivó betöltődésekor kibocsátott részecskék (protonok, neutronok, γ -kvantumok, konverziós elektronok) és az ezekhez képest később megjelenő spontán hasadó izomérek hasadási termékei között fennálló koincidenciák mérése. Utóbbi két esetben a targetet folyamatos részecskenyalábbal bombázhatjuk.

Az adott mérési feladattól függ, hogy a felsorolt mérési módszerek közül mikor melyiket válasszuk. A választást befolyásolják a vizsgált réteg jellemzői (geometria, az alapállapotú spontán hasadás aktivitása, α -aktivitás), a mérni kívánt felezési idők és a neutronok energiája.

2. A hasadási termékek detektálása

A spontán hasadó izotópok keletkezési hatáskeresztmetszetének meghatározása tehát, mint láttuk, különböző mérési módszerekkel történhet. A különböző módszereknek megfelelően a hasadási termékek detektálása különböző típusú hasadási detektorokkal történik. A hasadási detektorokkal szemben támasztott alapvető követelmények:

1. Kis háttérérzékenység mellett nagy detektálási hatásfok, mivel a reakció kis hatáskeresztmetszete miatt a spontán hasadó izotópok hasadási termékeinek hozama igen kicsi (egyes esetekben óránként mindössze néhány hasadási termék).

2. Jó időbeli felbontóképesség, mivel sok esetben az izotóp állapotok élettartama kicsi (10^{-9} sec nagyságrendű).

3. Nagyon kis érzékenység az α -részecskék regisztrálását illetően, mivel a vizsgált rétegek sok esetben nagyon nagy α -aktivitásúak (pl. a ^{241}Am izotópból készített réteg 1 mg-jából 10^8 α -részecske repül ki sec-ként). A jelen munka során használt hasadási detektorok főbb jellemzőit az 1. táblázat tartalmazza. Az előbb fel-

1. TÁBLÁZAT

A hasadási detektorok jellemzői

Hasadási detektor	Max. detektálási hatásfok [%]	Időbeli felbontóképesség [sec]	α -részecskék megengedhető max. intenzitása [l/sec]
Ionizációs kamra	100	10^{-7}	10^7
Félvezető detektor	100	10^{-8}	10^8
Gázszcintillációs számláló	100	$5 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^8$
Szikraszámláló	30	10^{-7}	10^9 [1/cm ²]
Dielektrikum-detektor (csillámlemez)	90	—	10^{14} [1/cm ²] (integrális áram)

sorolt követelményeken kívül, amelyek a spontán hasadó izotópok vizsgálatára irányuló valamennyi esetre jellemzőek, van még néhány speciális követelmény a neutronokkal végzett vizsgálatok esetében. A töltött részecskék keskeny, jól fókuszálható nyalábjával szemben a neutronnyaláb meglehetősen nagy kiterjedésű, s olyan geometriai feltételek esetén, amikor a hasadási detektort a réteghez közel kell elhelyezni, nemcsak a réteget, hanem a detektort is besugározzuk. A detektornak tehát nem szabad megváltoztatni sajátosságait intenzív neutronbesugárzás hatására. Ezenkívül a hasadási termékek hozamának növelése céljából kívánatos nagy felületű rétegek használata, következésképp a detektor felületének is nagynak kell lennie (néhányszor 10 cm² méretig). Ezeknek a követelményeknek nem felel meg a félvezető detektor, s csak kisebb mértékben a gázszcintillációs számláló. Ezért ezeket a detektorokat csak a koincidencia-mérések során használtuk, amikor

a kis időbeli felbontóképesség volt a lényeges követelmény. Pulzált neutronnyalábbal végzett mérések esetén vagy ionizációs kamrát használtunk (a réteg α -aktivitása kicsi), vagy szikraszámlálót (a réteg α -aktivitása nagy). Dielektrikum-detektorokat akkor használtunk, amikor időmérés helyett az izomér állapotból végbemenő maghasadás helyének koordinátáit mértük.

3. A neutronnyalábok jellemzői

Mint ismeretes, a neutronok szekunder részecskék, amelyeket gyorsított töltött részecskék és targetmagok kölcsönhatásának eredményeként, vagy maghasadási termékként kapunk. Munkánk során kétféle típusú gyorsítót használtunk neutronok nyerése céljára — NG—200 típusú neutrongenerátort, amely deuteronokat gyorsít 200 keV energiáig, és EG—5 típusú elektrosztatikus generátort, amely protonokat és deuteronokat gyorsít 5 MeV energiáig.

Az NG—200 típusú generátornál végzett munkák során $T(d, n)$ reakcióból nyertünk 14,7 MeV energiájú neutronokat. A deuteronnyaláb intenzitása (moduláció nélkül) (0,4—0,6) mA volt, amely mellett sec-ként 4π térszögben kb. 10^{10} , ill. a besugárzott targeten kb. 10^9 neutront kaptunk.

Az elektrosztatikus generátornál különböző bombázó részecskéket és különböző targetet használva neutronok nyerésére, széles energiatartományba eső, különböző energiájú neutronokat tudunk előállítani. A munkánk során használt neutronnyalábok jellemzőit (energiatartomány, a töltött részecskék nyalábjához képest 0° -ban kirepülő neutronok intenzitása 1 MeV energiavesztéségnak megfelelő vastagságú target esetén) a 2. táblázat tartalmazza.

2. TÁBLÁZAT

A neutronnyalábok jellemzői

Reakció	Q [MeV]	A neutronok energiatartománya $E_{p, d}^{\max} = 4$ MeV-nél [MeV]	$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ($\theta=0^\circ$, $E=4$ MeV) [$\frac{\text{mbarn}}{\text{térszög}}$]	Y_n (rétegvastagság 1 MeV) [$\frac{1}{\text{sec. } \mu\text{A. térszög}}$]
${}^7\text{Li} + p$	— 1,645	0,030 — 2,32	55	10^8
${}^3\text{H} + p$	— 0,764	0,064 — 3,22	90	$4 \cdot 10^8$
${}^2\text{H} + d$	3,28	2,47 — 7,26	68	$4 \cdot 10^8$
${}^3\text{H} + d$	17,6	14,7 — 20,8	21	10^8
${}^9\text{Be} + d$	4,4	0,66 — 8,6	—	$2 \cdot 10^{10}$

(vastag réteg, 4π térszög)

4. Pulzált neutronnyalábbal végzett mérések

A gyorsított töltött részecske-nyaláb modulációját, s ilyen módon pulzált neutronnyaláb előállítását különböző módon valósítottuk meg.

Az NG—200 neutrongenerátornál egyidejűleg moduláltuk az ionforrás nagyfrekvenciás terét és a forrásra adott kihúzó feszültséget. Azokban az időközökben, amikor az ionforrás kialudt, a kihúzó elektródra 450 V ellenfeszültséget adtunk. Az ionimpulzus frekvenciája és szélessége 80 Hz, ill. 0,6 msec volt.

Az ionnyaláb modulációját más esetben mechanikus módon, rozsdamentes acélkorong segítségével végeztük. A korong átmérője 10 cm, vastagsága 1 mm volt.

Az ionok áteresztése céljából a korong kerületén 0,5 cm széles, sugárirányban 1 cm hosszú nyílást vágtunk ki. A korongot, amely a gyorsítócsőben helyezkedett el az ionnyaláb útjában, egy a gyorsítócsőn kívül elhelyezett motor forgatta. Az ionnyaláb csak a korong nyílásán át juthatott tovább a target irányába. A korongra eső ionnyaláb átmérője 0,5 cm volt. A korong 1000 ford./perc-es fordulatszáma esetén az ioncsomagok szélessége kb. 2 msec, a csomagok közti szünetek hossza pedig 60 msec volt.

Rövidebb neutronimpulzusokat a töltött részecske-nyalábnak elektromos térrel történő periodikus eltérítése útján állítottunk elő. Ebből a célból derékszög alakú feszültség-impulzusokat adtunk arra a párhuzamos eltérítő lemezpárra, amelyen a részecskenyaláb áthaladt (a lemezek közötti távolság 1 cm volt). A derékszögű impulzusok frekvenciáját és hosszát speciális generátorral állítottuk be. Ezeket az impulzusokat 600 Voltos amplitúdóig erősítettük fel az NG—200 neutrongenerátor, és 4000 Voltig az elektrosztatikus generátor esetén, mely utóbbinál a töltött részecskék nagy energiája miatt a nyaláb eltérítéséhez természetesen nagy feszültséget kellett alkalmazni.

A neutrongenerátorban felgyorsított deutériumnyaláb eltérítés után a trícium-targettól 0,5 méterre elhelyezett, rézből készült diafragma esett. A gyorsított deutériumoknak a diafragmán abszorbeálódott deutériummal való kölcsönhatásaként keletkezett neutronhátter a besugárzott targetnél a trícium-targettól származó neutronáramnak maximum 10^{-5} részét tette ki.

Az elektrosztatikus generátornál az eltérített proton- és deutériumnyaláb tantáldiafragma esett. Ez a rétegtől 3 méterre volt, s ezen belül 1 méter vastag betonfal nyújtott további védelmet a háttérneutronok ellen. Ennek eredményeként a neutronhátter, amely a protonok és deutronok tantállal történő kölcsönhatásaként keletkezett, a target közelében nem tette ki a targetből kapott neutronáram 10^{-5} részét.

A modulációt rövid fel-, ill. lefutású impulzusokkal végezve elő tudtunk állítani olyan neutronimpulzusokat, amelyek intenzitása 1 μ sec alatt a maximális érték 10^5 -ed részére csökkent. Így lehetőség nyílt arra, hogy 1 μ sec feletti felezési idejű spontán hasadó izomereket vizsgálhassunk. Ennél kisebb élettartamú izomerek esetén a vizsgálatokat más módszerrel végeztük.

A leírt módon kapott pulzált neutronnyalábbal besugároztuk a hasadási detektor belsejébe (ionizációs kamrába vagy szikraszámológóba) a vizsgálat céljára elhelyezett réteget. A hasadási detektor megválasztását a vizsgált réteg α -aktivitása határozta meg. Kis α -aktivitású izotópok esetén (^{232}Th , ^{238}U és ^{235}U) ionizációs kamrát, nagy α -aktivitásúak esetén pedig (Pu és Am izotópok) szikraszámológót használtunk.

5. Ionizációs kamra segítségével végzett mérések

A 4. ábrán ábrázoltuk annak a kísérleti berendezésnek blokk-sémáját, amelynél a hasadási termékek detektálása céljára a mérések során ionizációs kamrát használtunk. A kamrából (1) a hasadási termékek által keltett impulzusok előerősítőn (2), erősítőn (3) és diszkriminátoron (4) át időanalizátorba (5) és impulzus-számológóba (6) jutottak.

A deuteronnyaláb hatására a trícium-targeton keletkezett áramimpulzust erősítőn, diszkriminátoron és késleltető egységen (7) át az analízátor startbemenetére adtuk. Mivel a neutronimpulzusok közötti szünetekben várható hasadási termékek

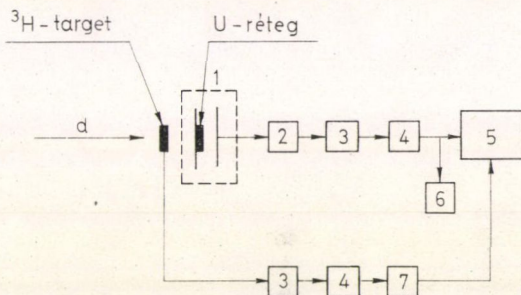
száma igen kicsi volt (az adott körülmények között a legjobb esetben is mindössze néhány darab óránként), különös gondot kellett fordítanunk arra, hogy a háttér-szintet a lehető legkisebbre csökkentsük. E célból a diszkriminátor küszöbértékét úgy választottuk meg, hogy neutronnyaláb nélkül több órás mérési üzemeltetés esetén ne kapjunk egyetlen hasadási terméket imitáló impulzust se. Ilyen impulzusokat kaphatnánk pl. a réteg természetes α -részecskéi keltette impulzusok egymásra-rakódásának eredményeként.

A méréseinknél használt ^{235}U réteg (pontosabban az e rétegben járulékosan benne levő ^{234}U) α -sugárzásának intenzitása kb. 10^3 α /mg.sec volt. Ezért a kamrába a vizsgálat céljára elhelyezett kb. 100 mg ^{235}U α -sugárzásának intenzitása mellett, figyelembe véve a kamra adott felbontóképességét, annak valószínűsége, hogy 1 sec alatt két α -részecske impulzusa egymásra rakódjék, kb. 10^{-2} volt. A kamrából kimenő jelek olyan diszkriminációs küszöbön haladtak át, amely 6—7-szer volt nagyobb az egy α -részecske által keltett impulzus nagyságánál (ez a küszöbérték a legkisebb energiájú, kb. 30 MeV-es hasadási termék impulzusának felel meg [61]). Ilyen módon elértük, hogy a kamrából az analizátorba menő ág gyakorlatilag háttérmentesé vált. A ^{238}U és ^{232}Th rétegek esetén, amelyek az előbbinél lényegesen kisebb α -aktivitású izotópok, az α -részecskék impulzusainak egymásra rakódása mérési feltételeink mellett elhanyagolhatóan kis valószínűséggel bekövetkező eseménynek számított.

Az itt tárgyalt méréseknél használt hasadási termékek detektálására szolgáló ionizációs kamra egyszerű, sík elektródákkal ellátott kamra volt, amelynek segítségével korábban hármass hasadási jelenségeket tanulmányoztunk [62].

A kamrában az elektródok közti távolság 1,8 cm, a feszültségkülönbség 2000 V volt. A kamrát Ar (1500 Hgmm) és CO_2 (30 Hgmm) keverékével töltöttük meg. A rétegtartó alumínium lemezt közvetlenül a nagyfeszültségű elektródra helyeztük. Az adott térerősség és gázösszetétel mellett a hasadási termékek és α -részecskék által keltett impulzusok gyors felfutásúak (kb. 1 μsec -ak) voltak [63].

A hasadó anyagot a rétegtartóra ecseteléses és ráégetéses eljárással vittük fel. A rétegek átmérője 10 cm, vastagságuk 1,2—1,5 mg/cm² volt. Az ionizációs kamrát a neutronforrás közvetlen közelébe helyeztük el, így a trícium-target és az urán-, illetve tóriumréteg közti távolság kb. 1 cm volt.



4. ábra. Ionizációs kamra segítségével történő méréseknél alkalmazott kísérleti berendezés sematikus ábrája.

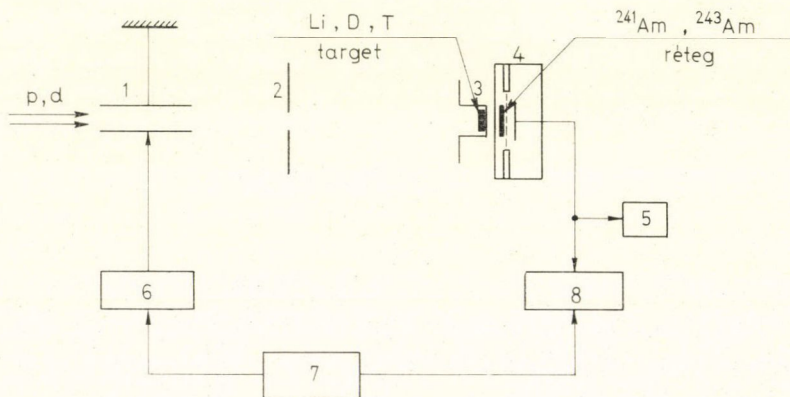
6. Szikraszámoló segítségével végzett mérések

A nagy α -aktivitású rétegek vizsgálatánál (Pu és Am izotópok) az α -részecskék impulzusainak egymásrarakódásából adódó háttér jelentőssé válik. Ezért ilyen esetekben a hasadási termékek detektálására sokszálas szikraszámológát használtunk.

A szikraszámoló működési mechanizmusának alapvető sajátossága a gáz-

kisülés (szikraátívelés) lokális jellege. A kisülés ui. a gáztéren áthaladó részecske nyomán alakul ki [64, 65]. Ezért a szikra kialakulása szempontjából nem a teljes ionizáció, hanem az ionizációnak a részecske nyoma mentén kialakult fajlagos (lokális) sűrűsége a lényeges. Ennek következtében a sokszoros egymásrarakódás valószínűsége igen kicsi. Ahhoz, hogy az α -részecskéket a hasadási termékektől jól diszkriminálhassuk arra kell törekednünk, hogy a szikraszámológépnél a hasadási termékeket illető, meglehetősen nagy detektálási effektivitását megőrizve maximuman csökkentsük az egyes α -részecskékre vonatkozó detektálási hatásfokot. A gázösszetétel és a számlálóra adott feszültségkülönbség kellő megválasztása mellett a hasadási termékeket nagyon intenzív α -részecske áram (10^9 α -részecske/sec) mint háttér mellett is kielégítően jó (30%-ig terjedő) hatásfokkal tudjuk detektálni. A számláló háttére ilyen esetben nem nagyobb 1—2 impulzus/óra-nál [66]. A szikraszámológépnél fő eleme egy 0,1 mm átmérőjű wolfram szálból készült, fémgyűrűre tekercselt háló mint anód és egy jól felpolírozott, krómozott felületű, rézlapból készült sík katód volt. Az elektródok közti távolság 3 mm, a háló szálai közti távolság pedig 4 mm volt. A réteget az anódtól 4 mm távolságra helyeztük. Mindezek az elemek vákuumkamrában foglaltak helyet. A kamrát az üzemi gázzal való megtöltés előtt 10^{-2} Hgmm vákuumra szívtuk le, majd N_2 (10 Hgmm) és He (750 Hgmm) gázok keverékével töltöttük meg.

Az elektrosztatikus generátornál szikraszámológéppel mint hasadási detektorral végzett vizsgálatok céljára szolgáló kísérleti berendezés sematikus rajzát az 5. ábrán



5. ábra. Szikraszámológépnél történő méréseknél alkalmazott kísérleti berendezés sematikus ábrája.

láthatjuk. A proton- vagy deutériumnyaláb párhuzamos síklapok közt (1) áthaladva kollimátor (2) után ${}^7\text{Li}$, D, vagy T targetre esett, amelyeket Faraday-féle henger (3) fenekére helyeztünk. Ez utóbbi a nyaláb áramának mérésére szolgált. A szikraszámológépet szorosan a Faraday-hengerhez tettük [a neutronforrások (Li, D, vagy T) és a kamrába besugárzásra elhelyezett rétegek közti távolság kb. 1 cm volt].

A szikraszámológép felhasználása a hasadási termékek detektálására egyszerűbb elektronika alkalmazását tette lehetővé, mint amelyet az ionizációs kamra segítségével végzett méréseknél alkalmaztunk. A hasadási termékek által keltett impulzu-

sokat a szikraszámlálóból további erősítés nélkül adhattuk rá az impulzusszámlálóra (5) és az időanalizátorra (8). Ez esetben nem volt szükség diszkriminátorra se, mivel a jeldiszkriminálás a szikraszámláló előbb ismertetett működési elvének megfelelően magában a számlálóban megy végbe.

A proton- vagy deuteronnalábót a nyalábbal párhuzamosan futó, sík eltérítő lemezpárra (1) adott 4 kV-ig terjedő amplitúdójú, derékszög alakú feszültség-impulzusok segítségével moduláltuk. A derékszög alakú nagyfeszültségű impulzusokat speciális jelerősítővel (6) állítottuk elő, amely adógenerátorról (7) kapott meghatározott frekvenciájú impulzusokat. Ennek a generátornak impulzusai szolgálták egyidejűleg az időanalizátor startjeléül is.

Az adógenerátor impulzusainak szélességét és frekvenciáját a vizsgált spontán hasadó izomér élettartama határozta meg, s széles határok közt lehetett változtatni. A 14 msec felezési idejű ^{242}Am spontán hasadó izomér esetében pl. az impulzusok szélessége 20 msec, az impulzusok közti szünetek hossza pedig 40 msec volt. Ugyanakkor az 1,1 msec felezési idejű ^{244}Am izomérre vezető reakció vizsgálatánál az impulzusok szélessége 2 msec, a szünetek hossza 4 msec volt.

A pulzált neutronnyalábbal végzett méréseknél a háttér fő forrását a terem faláról és a számlálót körülvevő anyagokról visszaverődött neutronok képezték. Ezek a szórt neutronok, főleg a kis energiatartományba esőek, a töltött részecskék impulzusának befejeződése után még meglehetősen hosszú (néhány msec-ig tartó) ideig élnek. Különösen figyelemre méltó ezeknek a neutronoknak a hatása olyan izotópok esetén, amelyek hasadási hatáskeresztmetszete nagy a kis energiájú neutronokra (^{235}U , ^{239}Pu stb.). Ezért a hasadási detektort védelméül 1 mm vastag kadmiumlemezzel és 1 cm vastag bórfallal vettük körül. Ezzel a védelemmel a szórt neutronoktól származó háttérrel a termikus neutronokra kis hasadási hatáskeresztmetszetű izotópok (^{241}Am , természetes urán) esetében gyakorlatilag sikerült kiküszöbölni, a nagy hasadási hatáskeresztmetszetű izotópok (^{235}U , ^{239}Pu) esetében azonban ez a háttér a prompt hasadások hasadási termékei hozamának 10^{-4} -szerejét tette ki.

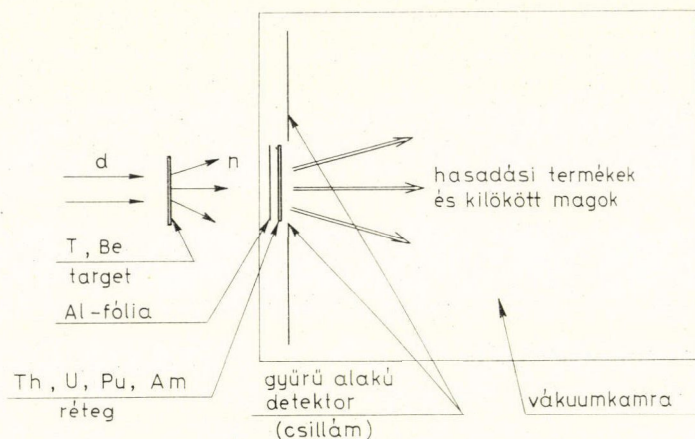
7. Repülési idő módszer segítségével végzett mérések

Az utóbbi években sok új spontán hasadó izomért fedeztek fel. Ezek többségének élettartama a nanoszekundumos időtartományba esik. Az ilyen izomerek tulajdonságainak vizsgálata a fentebb leírt módszerrel, amikor is a bombázó neutronok nyalábját pulzáltatjuk, meglehetősen nehéz feladat. Bonyolult elektronikát kell alkalmazni, a modulációnál nsec nagyságrendű fel- és lefutású impulzusokat kell előállítani, nagy problémát jelent a környezetről visszaverődő neutronok okozta háttér. A nanoszekundumos tartományban már a besugárzott réteg közelében levő különböző anyagokról visszaszórt gyors neutronoktól is származhatnak a neutronimpulzust követő olyan hasadási termékek, amelyeket a spontán hasadó izomerek hasadási termékeitől nem tudunk megkülönböztetni.

Az előbb felsorolt nehézségek miatt az ilyen kis élettartamú spontán hasadó izomerek tulajdonságainak vizsgálatát sok esetben kényelmesebb más típusú módszerrel — a repülési idő módszerrel végezni [67]. Sikeresen alkalmazták ezt a módszert a nehézionokkal [67, 68, 69], protonokkal és deuterionokkal [4], valamint α -részecskékkel [14] létrehozott, kis élettartamú izomerekre vezető reakciók tanulmányozása során. Ezt a módszert választottuk mi is, amikor olyan (n, n') és $(n, 2n)$ reakciók

hatáskeresztmetszeteit mértük, amelyeknél $1 \mu\text{sec}$ -nál kisebb felezési idejű spontán hasadó izomérek keletkeznek.

A kísérleti berendezést sematikusan a 6. ábra ábrázolja. A neutronnyaláb a vizsgált rétegre esett, amelyet gyűrű alakú dielektrikum-detektor vett körül (detektorként csillámlemez használtunk). A réteg és a detektor közé 6 cm átmérőjű, 0,5 mm vastag, közepén 1 cm átmérőjű lyukkal ellátott alumínium diafragmát helyeztünk. Ez a diafragma határozta meg a besugárzott réteg hatásos felületét. A detektor belső átmérője 1,2 cm, külső átmérője 6 cm volt. Ily módon a prompt hasa-



6. ábra. Repülési idő módszer segítségével történő méréseknél alkalmazott kísérleti berendezés sematikus ábrája.

dások hasadási termékei nem juthattak a csillámlemezre. Hasadási termékek csak olyan esetekben regisztrálódtak, amikor a neutronok által a rétegből kilökött magok a rétegtől 1 mm-nél nagyobb távolságban spontán hasadtak.

A hasadási termékek nyomot hagynak a csillámlemezben. A nyom szögének és koordinátájának megmérése után meghatározható az a távolság, amelyet a kilökött mag a bomlásig befutott. Mivel a kilökött mag sebessége ismert (ezt a reakció kinematikájából lehet kiszámítani), a repülési távolság meghatározása a hasadó mag élettartamának becslését teszi lehetővé. (A pontos számolásnál figyelembe kell venni a réteg önárnyékolási effektusát is.)

Ez a módszer megengedi, hogy a réteget folyamatos nyalábbal sugározzuk be (a prompt hasadások hasadási termékei nem regisztrálódnak). Ez esetben háttérként nem kell számolni a szórt neutronoktól származó hasadások hasadási termékeivel, ezért olyan izotópokat is vizsgálhatunk, amelyek termikus neutronokra nagy hasadási hatáskeresztmetszettel rendelkeznek (pl. az U és Pu páratlan tömegszámú izotópjai). Ez a módszer mentesít attól a háttértől is, amelyet a hasadó anyag spontán hasadásakor keletkező hasadási termékek jelentenek, ezért segítségével a kis felezési idővel spontán hasadó izotópok (pl. a Cm és Pu páros tömegszámú izotópjai) is vizsgálhatók. Ugyanakkor a neutronokkal spontán hasadó izomérek nyerésére irányuló kísérleteknél különös gondot kell fordítanunk a réteg felületének tisztaságára, mivel a kilökött mag impulzusa kicsi, s minden felületi szennyezettség erősen csökkenti

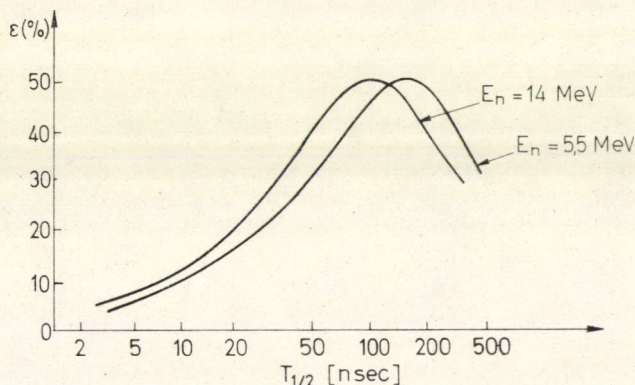
a reakcióhozamot. Ezenkívül a hasadási termékek regisztrálására igen kis urán- és tóriumtartalmú dielektrikum-detektorokat kell használnunk, mivel ezeket a detektorokat gyakorlatilag ugyanazzal a neutronárammal sugározzuk be, mint a vizsgált réteget.

Hasonló meggondolással nagy figyelmet kellett fordítanunk a vákuumkamra tisztaságára is, mivel a legcsekélyebb mennyiségű hasadóanyag-szennyezettség is erősen megzavarhatja a mérési eredményeket. Ezért a kamrát minden besugárzás előtt gondosan kitisztítottuk. Ezenkívül, mivel a kamra alumínium falai is tartalmaznak, ha nagyon kis mennyiségben is, uránt és tóriumot, a kamra belső felületét vékony műanyag fóliával (lavszán) fedtük be. Ez az anyag gyakorlatilag mentes hasadóanyag-szennyezettségtől.

Különös veszélyt jelentettek a besugárzásra a kamrába helyezett réteg anyagának azok a kis szemcséi, amelyek a kamra vákuumra történő leszívásakor a levegő áramlása következtében a réteg felületéről leszakadhattak, s a csillámlemezre, vagy a kamra falára tapadhattak. Ezért nagyon fontos követelmény volt, hogy a vizsgált réteg anyaga szilárdan tapadjon egymáshoz és a rétegtartóhoz.

Mindezen feltételek teljesítése után a háttérszintet termikus neutronokkal történő besugárzással ellenőriztük. Ebben az esetben a meglökött magnak átadott impulzus elhanyagolhatóan kicsi, a magok mind a rétegben maradnak. A réteget a kísérlet során alkalmazott integrális neutronáramnak megfelelő mennyiségű neutronnal sugároztuk be. Az a tény, hogy a csillámlemezen a besugárzás után nem találtunk nyomokat, a réteg jó minőségét és a csillámlemez, valamint a kamra tisztaságát tanúsította.

A 14,7 MeV energiájú neutronok áramát alumínium fólia felaktiválásával [$^{27}\text{Al}(n, \alpha)^{24}\text{Na}$ reakció] határoztuk meg. A fólia ugyanolyan méretű volt, mint a neutronokkal besugárzott réteg. Kisebb energiájú neutronok esetén a neutron



7. ábra. A detektálási hatások függése a kilökött mag élettartamától.

áramot a prompt hasadások hasadási termékeinek a kamra hátsó falára erősített egy másik dielektrikum-detektorra eső számából határoztuk meg.

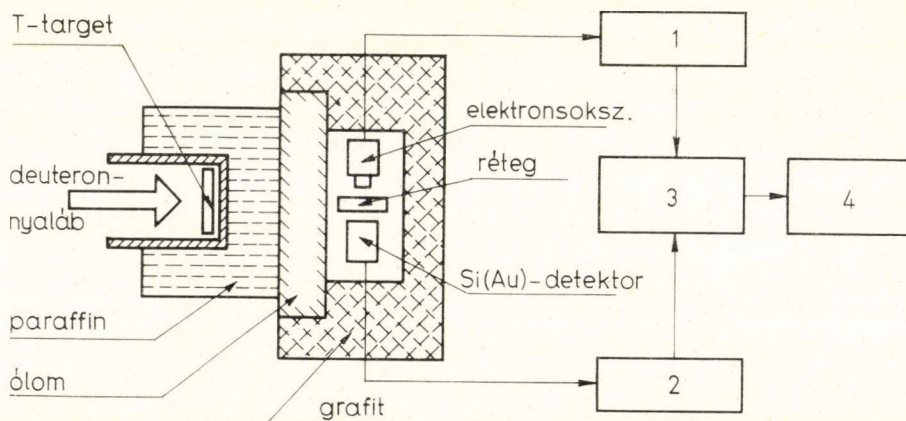
A neutronokkal történő besugárzás után a csillámlemezt tömény fluorsavban 2–3 óráig áztattuk, majd mikroszkóppal átvizsgáltuk. A csillámlemezen talált nyomok számából, a rétegen átmenő neutronáramból, valamint a besugárzott

réteg számolt, effektív vastagságából meghatároztuk az izomér állapotba jutott magok keletkezésére vezető reakció hatáskeresztmetszetét. Számításba vettük itt a hasadási termékekre vonatkozó detektálási hatásfokot, amely függ a reakcióban keletkezett izomér élettartamától. Ezt a függést a kilökött mag $v=2,2 \cdot 10^7$ cm/sec ($E_n=14$ MeV) és $v=1,4 \cdot 10^7$ cm/sec ($E_n=5,5$ MeV) sebességei esetére a 7. ábrán ábrázoltuk. Látható az ábrából, hogy a hatásfok (ϵ) maximális értékét (kb. 50%) 100–150 nsec felezési időknél érte el, s $\lesssim 5\%$ -ra csökkent a $\lesssim 5$ nsec és $\gtrsim 1$ μ sec felezési időknél, mivel ez esetekben a kilökött mag vagy már a réteg felületénél elbomlik, vagy nagyon messzire repül a detektortól amíg elbomlik.

8. Mérések késleltetett koincidenca módszer segítségével

A fentebb ismertetett két mérési módszer egyike sem alkalmas a vizsgálatok céljára olyan esetekben, amikor kis energiájú neutronokkal (főleg termikus energiájúakkal) létrehozott reakciók során keletkező, kis felezési idejű spontán hasadó izomereket vizsgálunk. Intenzív lassúneutron-nyalábot rendszerint gyors neutronok lelassításával állítunk elő, a lelassítási idő pedig (μ sec nagyságrend) korlátozza a neutron-impulzusok minimumának hosszát. A kis energiájú neutronok a meglökött magnak nagyon kis impulzust adnak át, ezért ilyen esetekben a repülési idő módszer sem alkalmas a spontán hasadó izomerek tulajdonságainak vizsgálatára.

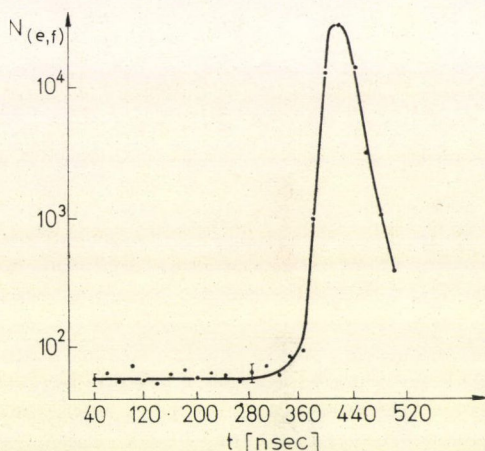
A nagyon kis (10–100 nsec nagyságrendű) élettartamú izomér állapotok vizsgálata céljára felhasználhatjuk a késleltetett koincidenca módszert. Mivel a spontán hasadó izomér keletkezését γ -kvantumok kibocsátása előzi meg, az izomér bomlásakor (hasadásakor) keletkező hasadási termékek késve jelennek meg ezekhez a γ -kvantumokhoz képest. A késés nagyságát az izomér állapot élettartama határozza meg. Ugyanekkor a prompt hasadás hasadási termékei a hasadási γ -kvantumokkal egyidejűleg jelennek meg. A hasadási termékekben kialakult „közönséges” izomér állapotok nem zavarják az ilyen méréseket, mivel ez esetben a γ -kvantumok impulzusait megkésleltetjük a hasadási termékek impulzusaihoz képest. Ilyen módon hasadási termékeknek γ -kvantumokkal létrejött késleltetett koincideneciája spontán



8. ábra. A konverziós elektronok és a hasadási termékek közötti késleltetett koincidenca mérésénél alkalmazott kísérleti berendezés sematikus ábrája.

hasadó izomér keletkezésére mutat. Mivel nehéz magokban a 150 keV alatti energiájú átmenetek gyakorlatilag teljesen konvertálódnak, sok esetben kényelmesebb a koincidenciát a konverziós elektronok és a hasadási termékek közt mérni.

A konverziós elektronok és a hasadási termékek koincidenciájának mérésére szolgáló kísérleti berendezés sematikus rajzát a 8. ábra mutatja [38, 70]. A vizsgált réteget, amely a hasadási termék detektora és a konverziós elektronok detektora közt foglal helyet, lassú neutronokkal sugároztuk be. A hasadási termékeket szilícium félvezető detektor detektálta, az elektronokat elektronsokszorozóra erősített, 80 mikron vastag plasztik-szintillátor. A térszög növelése végett a réteget közvetlenül a szcintillátorra helyeztük, ezt pedig a szilícium félvezető detektortól 1 mm-re. Ennek következtében a szcintillátor detektálási hatásfoka 4π térszögben kirepülő elektronokra számítva 30%, a hasadási detektoré 2π térszögbe 40%. A szcintillátor vastagságát a neutronok által a detektorban és a környező anyagokban keltett γ -sugárzásból adódó háttér csökkentése céljából választottuk kicsinek. Az elektronsokszorozóból az impulzusokat gyors-diszkriminátorra (1) vittük, amely a konverziós elektronok közül meghatározott energia-intervallumba esőket (kb. 30–150 keV) választott ki. A diszkriminátorból a késleltetett impulzusok idő-amplitúdó konverter (3) bemenetére jutottak. A konverter start-bemenetére a félvezető detektorból kijövő és felerősített (2) jeleket vittük. A konverter kimenő jeleit 128 csatornás amplitúdó analízátorba (4) juttattuk. A $^{239}\text{Pu} + n$ reakcióban keletkező ilyen spektrumot mutat be a 9. ábra. Itt a csúcs a pillanatszerűen bekövetkező koincidenciáknak felel meg, amelyek a hasadási termékekből kijövő konverziós elektronoktól származnak. E csúcs félszélessége (20 nsec) határozta meg a spontán hasadó izomérek mérhető felezési idejének alsó határát. A módszer érzékenységét korlátozza a hasadásnál keletkező konverziós elektronoktól és a radiációs neutronbefogásakor keletkező elektronoktól származó háttérszint.



9. ábra. A konverziós elektronok és a hasadási termékek közötti koincidenciák számának függése a késleltetési időtől a ^{239}Pu izotóp termikus neutronokkal történő besugárzásakor.

IV.

Neutronok radiációs befogásával spontán hasadó izomerek keletkezésére vezető reakciók vizsgálata

A legegyszerűbb magreakciók a neutronok radiációs befogásával létrejött reakciók, így ezek analízisére szolgáltatja a leghatározottabb eredményeket. Ebben a fejezetben a ^{242}Am és ^{244}Am spontán hasadó izomerek keletkezésére vezető reakciók gerjesztési függvényeinek mérését írjuk le, amely reakciókat széles energiatartományba eső, különböző energiájú neutronok radiációs befogásával állítottunk elő. Beszámolunk továbbá a ^{233}U , ^{235}U és ^{239}Pu magok termikus neutronokkal létrehozott (n, γ) reakcióinak vizsgálatáról. E vizsgálatok célja a spontán hasadó izomerek keletkezésére vezető reakciók hatáskeresztmetszeteinek meghatározása volt.

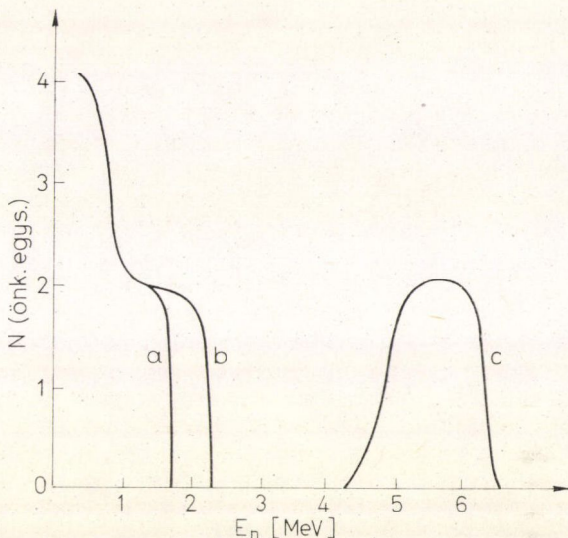
1. A $^{241}\text{Am}(n, \gamma)^{242i}\text{Am}$ és $^{243}\text{Am}(n, \gamma)^{244i}\text{Am}$ reakciók gerjesztési függvényeinek mérése.

A $^{241}\text{Am}(n, \gamma)^{242i}\text{Am}$ és $^{243}\text{Am}(n, \gamma)^{244i}\text{Am}$ reakciók gerjesztési függvényeit a bukaresti Atomfizikai Intézet ciklotronjánál már korábban megmérték [6, 8]. Megállapították a reakciók küszöbjellegét, korrelációt találtak a spontán hasadó izomerek keletkezési hatáskeresztmetszete és a hasadási hatáskeresztmetszet között. Ugyanakkor a 4 MeV-nél nagyobb energiájú neutronokra kapott eredményeik a $^7\text{Li}(p, n)^7\text{Be}$ reakcióból járulékosan kapott nagy mennyiségű és nehezen ellenőrizhető spektrummal rendelkező kis energiájú neutronok miatt határozatlanokká váltak. Ezenkívül különbséget mutattak ki a ^{242i}Am és ^{244i}Am izomerek keletkezésére vezető reakciók gerjesztési függvényeiben, amely a (d, p) reakciókban kapott hasonló vizsgálatoknál nem jelentkezett [19].

Munkánk során különös gondot fordítottunk a felsorolt határozatlanságok okainak felderítésére, eredményeink egyértelműsítésére. Az izomerek keletkezési hatáskeresztmetszete és a prompt hasadási hatáskeresztmetszet viszonyszámának meghatározásánál a mérések pontosságának növelése végett a kétféle folyamatban keletkező hasadási termékeket azonos mérési feltételek mellett, ugyanazzal a hasadási detektorral detektáltuk. A 3 MeV-nél nagyobb energiájú neutronokkal végzett mérésekhez a neutronokat olyan reakciókból állítottuk elő, amelyek nem szolgáltatnak járulékosan kis energiájú neutronokat. Ilyenek a $^3\text{H}(p, n)^3\text{He}$, a $^2\text{H}(d, n)^3\text{He}$ és a $^3\text{H}(d, n)^4\text{He}$ reakciók. A proton- és deuteronnyalábot az EAI Neutronfizikai Laboratóriumának elektrosztatikus generátora szolgáltatta. A deutérium- és tríciumtarget kb. 1 MeV deutérium-energiavesztésnek megfelelő vastagságú volt. Az ilyen targetből $D+d$ reakcióban keletkező neutronok spektrumát 3,5 MeV energiájú deutériumok esetében a 10. ábrán láthatjuk. Ezt a spektrumot a reakció ismert hatáskeresztmetszetéből és a neutronoknak az adott geometriai feltételek által meghatározott térszögre vett szögeloszlásából számoltuk ki.

A 2,3 MeV-ig terjedő energiájú neutronokat, ugyanúgy mint a [6] és [8] munkában, mi is a $^7\text{Li}(p, n)^7\text{Be}$ reakcióból kaptuk. Ehhez vastag lítium-targetet használtunk. Az e targetből kapott neutronok spektrumát a protonok különböző energiájára az előbbihez hasonló módon számoltuk. A 10. ábra ilyen spektrumokat is ábrázol. Ez esetben a prompt és a késleltetett hasadások hasadási termékeinek mért hozama széles (a reakció küszöbenergiájától a protonok energiája által meghatározott maximális energiáig terjedő) energiatartományba eső neutronokra vonatkozott.

A hasadási termékeknek keskenyebb energiaintervallumra vonatkozó hozama nyilvánvalóan a két szomszédos energiánál kapott hozamok különbsége. A protonok energiáját 0,25 MeV intervallumokkal 2,75 MeV-től 4 MeV-ig változtattuk, ami a neutronok 0,8 MeV-től 2 MeV-ig terjedő energiaintervallumának felelt meg.



10. ábra. A ${}^7\text{Li} + p$ ($E_p = 3,5$ MeV; a. görbe), ${}^7\text{Li} + p$ ($E_p = 4$ MeV; b. görbe) és $D + d$ ($E_d = 3,5$ MeV; c. görbe) reakciókból kapott neutronok spektruma.

A hasadási termékeket szikraszámlálóval detektáltuk, amelynek belsejében a besugárzott ${}^{241}\text{Am}$, illetve a ${}^{243}\text{Am}$ réteg foglalt helyet. Ezek vastagsága $0,4 \text{ mg/cm}^2$, teljes súlyuk 5 mg volt. A rétegeket impulzusüzemben sugároztuk be a fentebb felsorolt reakciók valamelyikéből nyert neutronokkal. A töltött részecskék modulációjának módját, valamint a kísérleti berendezést előbb — a III. fejezet 6. pontjában — írtuk le. A kísérletek során a neutroncsomagok ideje alatt kapott prompt hasadási termékek számát, és a neutronimpulzusok közötti szünetekben kapott késleltetett hasadások hasadási termékeinek számát egyidejűleg mértük. A prompt hasadások hasadási termékeit impulzusszámlálóval, a késleltetett hasadásokét pedig 8 csatornás időanalizátorral regisztráltuk.

A spontán hasadó izomereket azok bomlási felezési idejének ismeretében (14 msec a ${}^{242i}\text{Am}$ és 1,1 msec a ${}^{244i}\text{Am}$ esetén [19]) tudtuk azonosítani. Az (n, n') és $(n, 2n)$ reakciókban járulékosan keletkező ${}^{241i}\text{Am}$ és a ${}^{240i}\text{Am}$ spontán hasadó izomerek bomlási felezési idői lényegesen kisebbek a ${}^{242i}\text{Am}$ felezési idejénél ($1,5 \mu\text{sec}$ a ${}^{241i}\text{Am}$ [5] és $0,9 \text{ msec}$ a ${}^{240i}\text{Am}$ [12] esetén). Ezért az (n, n') és $(n, 2n)$ reakciókból származó adalék hozam ez esetben nem hamisította meg az (n, γ) reakciók hozamának mérési eredményeit. Az (n, n') reakcióban keletkezett ${}^{243i}\text{Am}$ spontán hasadó izomér bomlási felezési ideje is kicsi a ${}^{244i}\text{Am}$ bomlási felezési idejéhez képest ($T_{1/2} = 6,3 \mu\text{sec}$ [4]), s ez szintén nem hamisítja meg az (n, γ) reakcióból származó ${}^{244i}\text{Am}$ izomér hozamának mérési eredményét. Az $(n, 2n)$ reakcióból származó ${}^{242i}\text{Am}$ spontán hasadó izomér azonban ($T_{1/2} = 14 \text{ msec}$), amey kb. 10 MeV felett az energia növe-

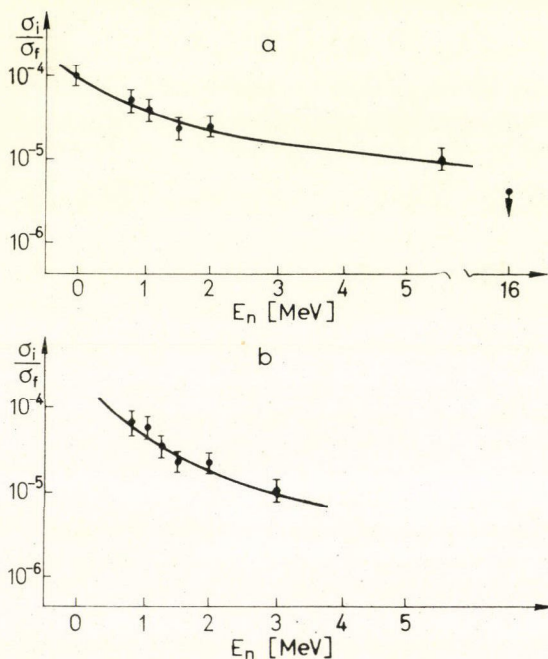
kedésével egyre nagyobb számban keletkezik, megakadályozta a $^{243}\text{Am}(n, \gamma)^{244}\text{Am}$ reakció ilyen nagy energiájú neutronokkal történő tanulmányozását.

A ^{242}Am és ^{244}Am spontán hasadó izomerek kis hozama miatt nagy problémát jelentett a háttér. Ennek fő forrása a rétegben járulékosan jelen levő kúrium, és a rétegek nagyon nagy α -aktivitása volt (pl. a kísérleteink során használt ^{241}Am réteg α -aktivitása $6 \cdot 10^3$ α -részecske/sec volt). A szórt neutronoktól származó háttérrel gyakorlatilag kiküszöböltük azáltal, hogy a szikraszámlálót kadmium lemezzel és bőr réteggel vettük körül, valamint azzal, hogy a késleltetett hasadások mérését 1 msec-vel a neutronimpulzusok befejeződése után kezdtük. Ily módon a háttérrel kb. 2 impulzus/óra-ra sikerült csökkenteni. Ezt a mérési idő alatt időnként ellenőriztük.

A $^{241}\text{Am}(n, \gamma)^{242}\text{Am}$ reakció vizsgálata során a 8 csatornás időanalizátor csatornáinak szélességét 5 msec-nek, a $^{243}\text{Am}(n, \gamma)^{244}\text{Am}$ reakciónál 0,5 msec-nek választottuk. A réteg besugárzása után a kapott mérési eredményeket a számláló holtidejének és a háttérnek figyelembevételével korrigáltuk. Ilyen módon meghatároztuk a késleltetett és a prompt hasadások hasadási termékeinek viszony-számát. Ez a viszonyszám a vastag lítiumtargetből $^7\text{Li}(p, n)^7\text{Be}$ reakcióval kapott neutronok esetén nagy energiatarományba eső neutronokra vonatkozott (l. a 10. ábrán az *a.* és *b.* görbéket). Az így kapott hozam-viszonyszámokat átszámítottuk kis (0,25 MeV) energia-intervallumokba eső neutronokra. Az átszámításnál a lítium-

targetre eső két szomszédos energiájú protonok esetén kapott hasadási termékek hozamainak különbségét vettük. Figyelembe vettük a neutronspektrum alakját és a ^{241}Am és ^{243}Am izotópok hasadási hatáskeresztmetszeteinek a neutronok energiájától való függését [71, 72].

A késleltetett és prompt hasadások hasadási termékeinek kísérletileg meghatározott viszony-számát az izomérnek a neutron-csomagok időtartama alatt bekövetkező bomlási veszteségével korrigálva megkaptuk a kétféle folyamat hatáskeresztmetszeteinek viszonyszámát (σ_i/σ_f). Ezeknek a viszonyszámoknak a neutronok energiájától való függését a 11. ábrán tüntettük fel. A $^{241}\text{Am} + n$ reakció esetében feltüntettük a hatáskeresztmetszetek viszony-számának termikus neutronokkal mért értékét is ($1 \cdot 10^{-4}$), amelyet korábban ugyanezzel a mérési módszerrel és réteggel B. Dalhsuren és munkatársai [7] mértek meg.



11. ábra. A spontán hasadó izomér keletkezési és a hasadási hatáskeresztmetszet (σ_i/σ_f) viszonyszámának a neutronok energiájától (E_n) való függése; *a.* a $^{241}\text{Am} + n$ és *b.* a $^{243}\text{Am} + n$ reakciók esetén.

A 11. ábrából látható, hogy a spontán hasadó izomerek keletkezési hatáskeresztmetszetének és a prompt hasadási hatáskeresztmetszetnek viszonzyszámai a $^{241}\text{Am} + n$ és $^{243}\text{Am} + n$ reakciókban nagyságrenden belül megegyeznek egymással, s monoton csökkennek a neutronok energiájának növekedésével. 16 MeV energiájú neutronokkal a ^{242i}Am spontán hasadó izomért már nem tudtuk kimutatni, itt a hatáskeresztmetszetek viszonzyszámaira csupán felső határértéket adtunk meg. A ^{244i}Am izomér-hozamot ilyen energiájú neutronok esetében a ^{242i}Am izomér-háttér miatt nem lehetett kimutatni, mivel ez az izomér ennél az energiánál nagy valószínűséggel keletkezik a $^{243}\text{Am}(n, 2n)$ reakcióban.

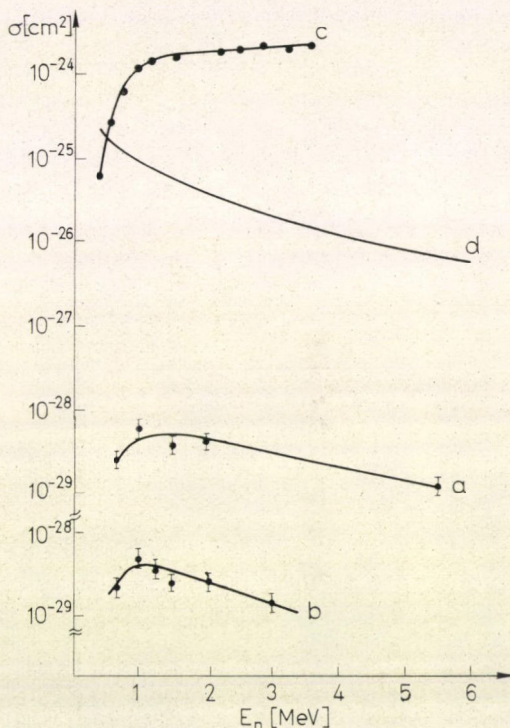
A ^{241}Am és ^{243}Am hasadási hatáskeresztmetszeteinek ismeretében a késleltetett és prompt hasadási hatáskeresztmetszetek mért viszonzyszámából megkaphatjuk a ^{242i}Am és a ^{244i}Am spontán hasadó izomerek keletkezésére vezető reakciók gerjesztési függvényeit. Ezeket a gerjesztési függvényeket a 12. ábra tünteti fel.

A $^{241}\text{Am}(n, \gamma) ^{242i}\text{Am}$ és

$^{243}\text{Am}(n, \gamma) ^{244i}\text{Am}$

reakciók gerjesztési függvényeit érdemes összehasonlítani az olyan reakciók gerjesztési függvényeivel, amelyek során az előálló ^{242}Am , ill. ^{244}Am magok alapállapotba jutnak, illetve hasadnak. A ^{241}Am és ^{243}Am izotópok esetén azonban csak a hasadásra vezető reakciók gerjesztési függvényeit mérték ki. A ^{242}Am és a ^{244}Am alapállapotú izotópok keletkezésére vezető reakciók hatáskeresztmetszete csak néhány neutronenergia (termikus, 0,3 MeV-es és kb. 1 MeV-es) esetére ismeretes [73, 74]. Feltételezhető, hogy a gerjesztési függvény ezekre a magokra ugyanolyan alakú, mint amelyet a Pu, U és Th izotópokra mértek. Ezért a 12. ábrán a $^{238}\text{U}(n, \gamma)$ reakció gerjesztési függvényét tüntettük fel. Ugyancsak feltüntettük itt a $^{241}\text{Am}(n, f)$ reakció gerjesztési függvényét is.

A 12. ábrából látható, hogy az alap- és izomér állapotokra vezető reakciók gerjesztési függvényei csak 1,5 MeV feletti energiájú neutronok esetén hasonlóak egymáshoz. 1,5 MeV alatt a neutronok energiájának csökkenésével a reakciók hatáskeresztmetszete az izomerek esetén az alapállapotra vezető reakciókéval ellentétben nem növekszik, hanem csökken, ugyanolyan küszöbjeleget mutatva, mint a $^{241}\text{Am}(n, f)$ reakció hatáskeresztmetszete. A ^{242i}Am és ^{244i}Am izomerek kelet-



12. ábra. Reakciók gerjesztési függvényei:
a) $^{241}\text{Am}(n, \gamma) ^{242i}\text{Am}$; b) $^{243}\text{Am}(n, \gamma) ^{244i}\text{Am}$;
c) $^{241}\text{Am}(n, f)$; d) $^{238}\text{U}(n, \gamma) ^{239}\text{U}$ reakciók esetén.

kezésére vezető reakciók gerjesztési függvényének alakját a küszöb közelében részletesebben megvizsgálták a fentebb említett [6] és [8] munkákban.

A 12. ábrából látható az is, hogy a ^{242}Am és a ^{244}Am spontán hasadó izomerek keletkezésére vezető reakciók gerjesztési függvényei hasonló lefutásúak, s a hatáskeresztmetszetek értékei közel esnek egymáshoz. Amint fentebb már említettük, hasonló gerjesztési függvényeket kaptak a (d, p) reakciókban is [19]. A spontán hasadó izomerek keletkezésére vezető reakciók hatáskeresztmetszetei 1,5 MeV feletti energiájú neutronok esetén a neutronok energiájának növekedésével — hasonlóan a magok alapállapotára vezető reakciók hatáskeresztmetszeteihez — csökkennek.

A 3. táblázatban összefoglaltuk azokat az eredményeket, amelyeket radiációs neutronbefogás esetén a ^{242}Am és ^{244}Am spontán hasadó izomerek keletkezési hatáskeresztmetszeteire kaptunk. Feltüntettük itt a két mag alapállapotára vezető keletkezési, és hasadási hatáskeresztmetszeteit is.

3. TÁBLÁZAT

A ^{242}Am és ^{244}Am spontán hasadó izomerek keletkezési hatáskeresztmetszetei (n, γ) reakciókban

Izomér	E_n	σ_i [μbarn]	σ_f [barn]	σ_g [barn]	σ_i/σ_f	σ_i/σ_g
^{242}Am	0,025 eV	300	3,1	580	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-7}$
	0,4 MeV	3,5	0,065	0,79	$0,55 \cdot 10^{-4}$	$4,5 \cdot 10^{-5}$
	1,0 MeV	45	1,27	0,24	$0,35 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
^{244}Am	0,025 eV	100	0,07	—	—	—
	1,0 MeV	48	0,96	—	$0,5 \cdot 10^{-4}$	—

A 3. táblázat és a 11. ábra alapján bizonyos következtetéseket vonhatunk le a σ_i/σ_f és σ_i/σ_g (izomér-viszonyszám) viszonzyszámok energiafüggésére vonatkozóan.

1. Az izomér keletkezési és a hasadási hatáskeresztmetszet viszonzyszám viszonylag gyengén függ az energiától, és értéke 10^{-4} — 10^{-5} nagyságrendbe esik.

2. Az izomér-viszonyszám igen élesen változik (400-szorosára nő), amikor a neutronok energiája termikusról 1 MeV-re változik, az energia további növekedésével azonban nem változik tovább, s értéke közel olyan nagyságú, mint amelyet a töltött részecskékkel létrehozott reakciókban kaptak ($4 \cdot 10^{-4}$) [23].

2. A mért gerjesztési függvények kiértékelése a kétpúpú barrier modell alapján.

Vizsgáljuk meg most, hogyan értelmezhető a radiációs neutronbefogásnál spontán hasadó izomér keletkezésére vezető reakciók gerjesztési függvényeinek küszöb alakú menete. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy ezt az értelmezést nehéz lenne az izomér állapotokra vonatkozó korábbi elképzelések alapján végezni.

A radiációs befogás hatáskeresztmetszete ebben az esetben a következő alakba írható:

$$\sigma_{n,\gamma} = \sigma_c \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_\gamma + \Gamma_n + \Gamma_f}, \quad (31)$$

ahol σ_c , Γ_γ , Γ_n és Γ_f a (15) formulában is szereplő értékeknek megfelelő értékek. Amint arra már a II. fejezet 3. pontjában rámutattunk, az $E_n \gtrsim 0,5$ MeV energiák-

nál $\Gamma_\gamma \ll (\Gamma_n + \Gamma_f)$, és viszonylag gyengén függ a neutronok energiájától. Ezért a $\sigma_{n,\gamma}$ energiafüggését lényegében a Γ_n és Γ_f értékek határozzák meg. Ezek általában nőnek az energia növekedésével, így a $\sigma_{n,\gamma}$ hatáskeresztmetszet ugyanekkor csökken [75].

A Γ_n és Γ_f növekedését a mag statisztikus modellje keretében lehet értelmezni. E mennyiségek értékét az adott folyamat számára nyitott csatornák N száma (az elérhető fázistér fogat nagysága) és a compound mag ϱ nívósűrűsége határozza meg. A Bohr—Wheeler-formulával megegyezésben [45], a (12) és (21) formulákkal analóg módon írható:

$$\Gamma = \frac{N}{2\pi\varrho}. \quad (32)$$

A nívósűrűség függése a Fermi-gáz modellből következően a következő alakú [76]:

$$\varrho(\varepsilon) = \text{konst} \cdot \varepsilon^{-2} \cdot e^{2\sqrt{a\varepsilon}}, \quad (33)$$

ahol a a nívósűrűség paramétere, ε a gerjesztési energia.

A mag teljes energiája (az alapállapot energiájától számítva) $E^* = E_b + \varepsilon$, ahol E_b a deformáció potenciális energiája. Ha E^* nagyobb az E_f hasadási barriernél, akkor a hasadási csatornák számát az alábbi formulából számoljuk:

$$N_f(E^* - E_f) = \int_0^{E^* - E_f} \varrho_f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (34)$$

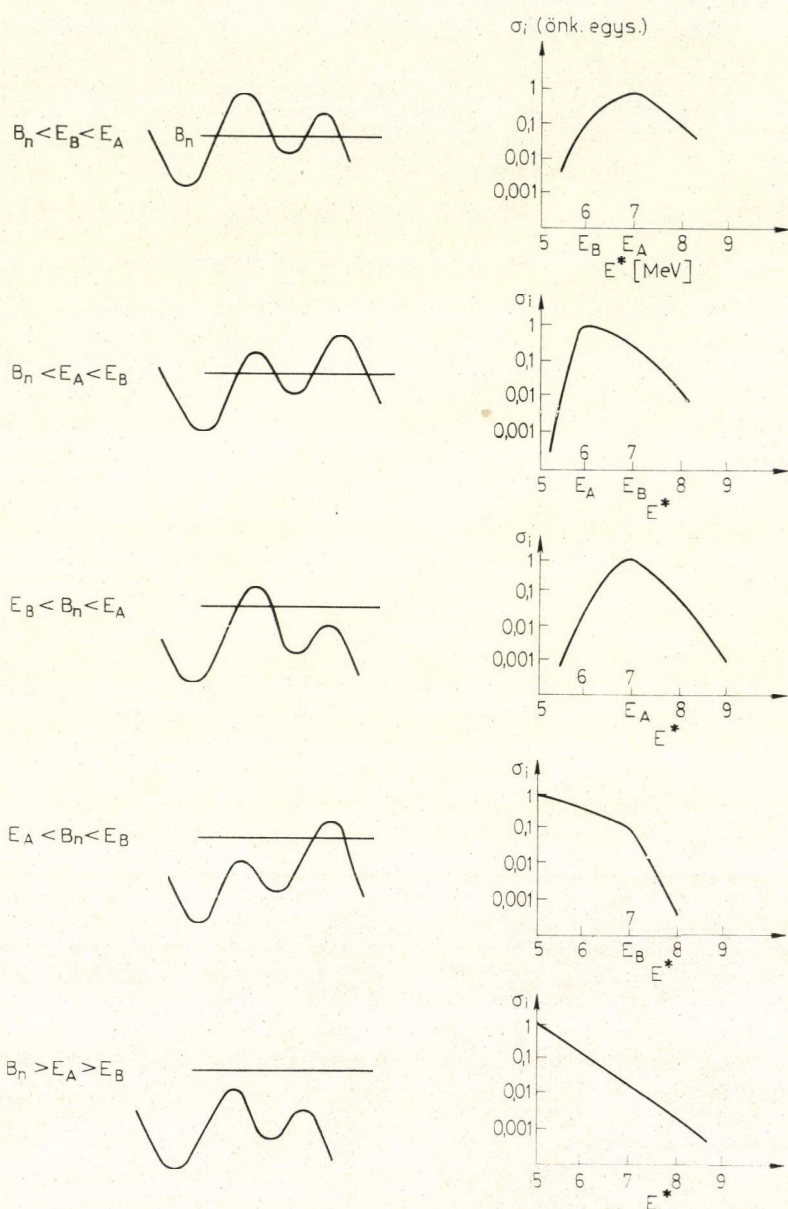
ahol ϱ_f a barrier csúcsának megfelelő deformációjú magban adott spinnel és adott paritással rendelkező nívók sűrűsége. Pontosabb formulának számításba kell vennie az E_f és ϱ_f spintől való függését is.

A (33) és (34) összefüggésből következik, hogy ε növekedésével a nyitott csatornák száma gyorsabban nő ϱ növekedésénél. Ilyen módon végeredményben érthetővé válik a radiációs befogás hatáskeresztmetszetének a neutronok energiája növekedésével járó csökkenése.

A neutronok radiációs befogása során ^{242}Am és ^{244}Am spontán hasadó izomerek keletkezésére vezető reakciók gerjesztési függvényének kísérletileg talált alakját értelmezni lehet a kétpúpú barrier modell alapján. Feltételezzük itt, hogy az izomér állapot keletkezésének mechanizmusa — ahogy azt már a II. fejezetben is tekintettük — kétlépcsős folyamat; először nagy deformáció jön létre, majd γ -kvan tumok bocsátódnak ki. A reakció ilyen mechanizmusa esetén a radiációs neutronbefogással izomér keletkezésére vezető reakció hatáskeresztmetszetét a II. fejezetben bevezetett (22) kifejezés határozza meg, vagyis:

$$\sigma_i = \sigma_c \frac{\vec{\Gamma}_1}{\Gamma_\gamma + \Gamma_n + \vec{\Gamma}_1} \cdot \frac{\Gamma_{\gamma_2}}{\Gamma_\gamma + \vec{\Gamma}_2 + \vec{\Gamma}_2}.$$

Az izomér keletkezésére vezető reakció gerjesztési függvényének menetét a belső és külső barrieren át történő radiáció nélküli átmenetekre vonatkozó parciális szélességek ($\vec{\Gamma}_1$, $\vec{\Gamma}_2$, $\vec{\Gamma}_2$) energiától való függése határozza meg (Γ_γ gyengén függ az energiától, ugyanakkor Γ_n monoton növekszik az energiával). Ezeknek a parciális szélességeknek az energiafüggését a megfelelő barrier paraméterei határozzák



13. ábra. Spontán hasadó izomérek keletkezésére vezető (n, γ) reakciók számolt gerjesztési függvényei.

meg (amikor a gerjesztési energia eléri a barrier csúcsát, az exponenciális növekedés lassabb növekedésbe megy át). Ezért a gerjesztési függvények lényegesen különbözőek a belső és külső barrierok különböző magasságai (E_A , ill. E_B) esetén. A 13. ábrán a (22) formula szerint számolt gerjesztési függvényeket ábrázoltuk, amelyeket a neutron kötési energiájához (B_n) képest a belső és külső barrier különböző magasságai mellett számoltunk. Itt a radiáció nélküli átmenetek parciális szélességeire a következő kifejezéseket használtuk:

$$\bar{\Gamma}_1 = \frac{\sum N_1}{2\pi\varrho_1(E^*)}, \quad (35)$$

$$\bar{\Gamma}_2 = \frac{\sum N_2}{2\pi\varrho_2(E^* - E_i)}, \quad (36)$$

$$\bar{F}_2 = \frac{\sum N_1}{2\pi\varrho_2(E^* - E_i)}. \quad (37)$$

A nívósűrűségekre a Fermi-gáz modell alapján kapott kifejezést használtuk [l. a (33) formulát]. Az effektív csatornaszámot (ΣN) a barrier feletti energiák esetén a (34) kifejezésből határoztuk meg. A barrier alatti energiák esetén ezt a kifejezést a barrieren való áthatolás valószínűségével cseréltük fel:

$$P = e^{-\frac{2\pi(E^* - B)}{\hbar\omega}}, \quad (38)$$

ahol B a barrier magassága, $\hbar\omega$ a barrier görbületére jellemző paraméter. A számításoknál feltételeztük, hogy $\hbar\omega_1 = \hbar\omega_2 = 0,6$ MeV, $E_i = 3,0$ MeV, $a = 28,6$ MeV⁻¹, $\Gamma_\gamma = 0,03$ eV, ami megfelel a neutron kötési energiájával egyenlő nagyságú gerjesztési energiánál kapott értéknek. A többi mennyiség nem befolyásolta lényegesen a számolt görbék alakját, azok csak a hatáskeresztmetszetek abszolút értékét határozták meg.

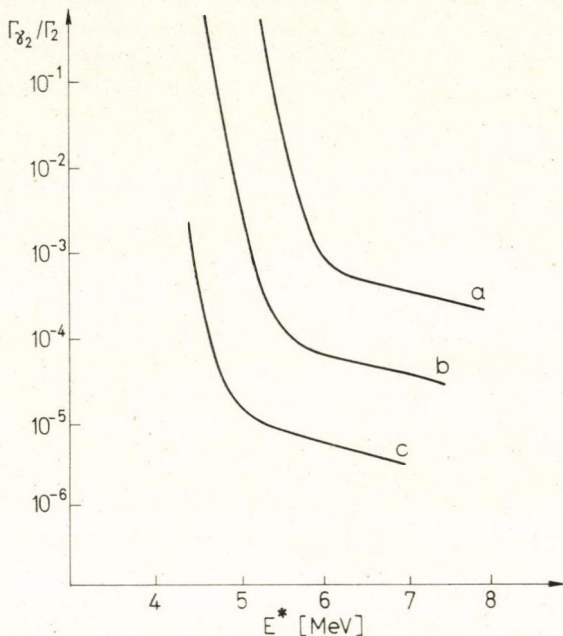
A 13. ábrából látható, hogy a spontán hasadó izomérek keletkezésére vezető reakciók gerjesztési függvényeit leíró görbék éles törést mutatnak (az emelkedést csökkenés váltja fel) olyan gerjesztési energiáknál, amely közel esik a belső barrier magasságához. Kevésbé éles ez a törés a külső barrier magasságának közelébe eső energiánál.

Ha a számolt gerjesztési függvényeket összehasonlítjuk a méréseink során kapott (12. ábra) és a [6, 8] munkákban kapott kísérleti görbékkel azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a belső barrier magassága kb. 1 MeV-nel nagyobb a neutron kötési energiájánál. A reakció hatáskeresztmetszetének meghatározásakor fellépő kísérleti hibák nem teszik lehetővé, hogy a külső barrierrel kapcsolatos törést is kimutathassuk, ezért ilyen módon a külső barrier magasságát nem tudjuk meghatározni.

A külső barrier magasságára vonatkozóan más módon kaphatunk felvilágosítást. Ezt az izomér keletkezési hatáskeresztmetszet és a hasadási hatáskeresztmetszet viszonyszámának energiafüggéséből kaphatjuk meg. A II. fejezetben megmutattuk, hogy

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_f} = \frac{\Gamma_{\gamma_2}}{\bar{\Gamma}_2}.$$

A $\Gamma_{\gamma_2}/\vec{\Gamma}_2$ viszonyszám energiafüggését ugyanazon formulák és paraméterek felhasználásával számítottuk ki, mint amilyeneket a σ_i fentebb leírt számításainál használtunk. Ez a viszonyszám már nem érzékeny a belső barrier magasságára, mivel a belső barrieren való átmenet ez esetben mind az izomér keletkezését, mind a hasadást megelőzően végbemegy. Ezért a σ_i/σ_f viszonyzámnak a gerjesztési energiától való számolt függése, amelyet a 14. ábrán tüntettünk fel, alkalmas arra, hogy abból a külső barrier magasságára vonatkozó felvilágosítást kaphassunk.



14. ábra. A számolt $\Gamma_{\gamma_2}/\vec{\Gamma}_2$ viszonyszámok függése a compound mag gerjesztési energiájától (E^*) a második barrier különböző magassága (E_B) esetén:
a) $E_B = 6,0$ MeV; b) $E_B = 5,5$ MeV; c) $E_B = 5,0$ MeV.

A (26) és (28) kifejezésekből látható, hogy a radiációs szélesség viszonylag keveset változik a gerjesztési energia növekedésével (a tört exponenciális tagjai egységnyi rendűek), ugyanakkor a hasadási szélesség gyorsan nő, amíg a gerjesztési energia el nem éri a külső barrier csúcsát. Ezután a növekedés erősen lecsökken [az E^* gerjesztési energiának a barrier csúcsáig tartó növekedésével az N_2 nyitott csatornák száma exponenciálisan növekszik (l. a (13) és (14) kifejezéseket), ugyanakkor $\varrho_2 \sim e\sqrt{E^*}$; a barrier felett viszont N_2 és ϱ_2 exponenciális tagjai egyformán növekszenek (l. a (34) formulát)]. Ebből következően a $\Gamma_{\gamma_2}/\vec{\Gamma}_2$ viszonyzámnak a (26), (28) formulák alapján számolt gerjesztési energiától való függése a második barrier magasságának különböző értékeire (14. ábra) törést mutat olyan gerjesztési energiánál, amely közel esik a második barrier energiájához. Ha az a , $\hbar\omega$ és Γ_{γ_2} paramétereknek adott gerjesztési energia mellett más értékeket adunk, a számolt

görbék alakja gyakorlatilag ugyanolyan marad, csupán a Γ_2/Γ_2 viszonyszámok abszolút értékei változnak meg. E görbék töréspontjának helyéből tehát meghatározható a második barrier magassága.

A 11. ábrából látható, hogy a σ_i/σ_f mért viszonyszámok keveset változnak a neutronoknak a kísérletek során használt egész energiatartományában (0—5,5 MeV a ^{242}Am és 0,8—3,0 MeV a ^{244}Am esetében). Ebből szemmel láthatóan arra lehet következtetni, hogy a második barrier magassága egyik mag esetén sem múlja felül a kísérleteink során bevitt legkisebb gerjesztési energiákat (5,55 MeV a ^{242}Am és 6,0 MeV a ^{244}Am esetén). A σ_i/σ_f mért értékeknek a $\Gamma_2/\tilde{\Gamma}_2$ számolt értékekkel való összehasonlításával végeredményben arra a következtetésre jutottunk, hogy a második barrier magassága mindkét mag esetén 5,5 MeV közelébe eső érték.

A fenti becslésekből következik, hogy a második barrier magassága a második potenciálvölgy fenekéhez képest (az izomér nivó energiájához képest) kb. 2,5 MeV. A második barrier ilyen kis magassága $\hbar\omega=0,6$ MeV paraméternél megfelel 10^{-9} sec nagyságrendű hasadási felezési időnek [l. a (29) formulát]. Ahhoz, hogy a ^{242}Am és a ^{244}Am izomérek észlelt élettartamát, amely 6—7 nagyságrenddel nagyobb, értelmezni lehessen, fel kell tételezni, hogy vagy a második barrier anómálishan széles (a $\hbar\omega$ paraméter értéke 0,36—0,38 MeV), vagy az izomér állapotnak megfelelő spinű hasadási csatorna legalább 1 MeV-vel a második barrier csúcsa felett helyezkedik el.

A belső barrierre vonatkozó $\hbar\omega_A$ paraméter értéket megkaphatjuk az e barrier alatti gerjesztési energiáknál vett gerjesztési függvényből. A hatáskeresztmetszetek meghatározásánál fellépő nagy hibák és a kis energiatartomány miatt azonban, amelyben a mérések történnek, ez nem valósítható meg. A mért gerjesztési függvényekből következik, hogy a ^{242}Am és ^{244}Am magokban a belső barrierek magasabbak a külsőknél és hogy ennek megfelelően ez határozza meg a hasadási barrieret. Ezért a hasadási hatáskeresztmetszet energiafüggéséből, amelyet lényegesen pontosabban lehet mérni, határozhatjuk meg a belső barrierre vonatkozó $\hbar\omega$ értéket. Ez mindkét magra kb. 0,6 MeV-nek adódott.

A kétpúpú barrier paramétereire vonatkozó adatokat, amelyeket a $^{241}\text{Am}(n, \gamma)^{242}\text{Am}$ és a $^{243}\text{Am}(n, \gamma)^{244}\text{Am}$ reakciók gerjesztési függvényeinek kiértékelésével kaptunk, a 4. táblázatban foglaltuk össze.

A [77] munkában utalás történt arra vonatkozóan, hogy a neutronok radiációs befogásakor spontán hasadó izomérek keletkezésére vezető reakciók gerjesztési függvényeinek két maximuma kell legyen, amelyek a mag dipólrezgéseivel kapcsolatban alakulnak ki. A két maximum közötti távolság a mag izomér állapotában kialakult deformációjától függ. A ^{242}Am esetén az egyik maximumnak 1—2 MeV energiánál kell lennie, a másikkak 7—10 MeV-nél. A 12. ábrából látható, hogy a kis

4. TÁBLÁZAT

A kétpúpú barrier paramétereinek az (n, γ) reakciók kiértékelése során kapott értékei

Mag	B_n [MeV]	E_A [MeV]	E_B [MeV]	$\hbar\omega_A$ [MeV]	$\hbar\omega_B$ [MeV]
^{242}Am	5,60	6,4	5,5	0,6	0,4
^{244}Am	5,22	6,3	5,3	0,6	0,4

energiáknál találtunk maximumot, a nagy energiák tartományában azonban a mérési hibák és a kísérleti pontok kis száma miatt nem tehetünk végleges kijelentést.

3. Spontán hasadó izomerek nyerésére irányuló kísérletek termikus neutronok radiációs befogásával létrehozott reakciók útján.

Az előző kísérletek, mint láttuk, azt bizonyították, hogy a ^{242}Am és a ^{244}Am izomerek esetében az izomér keletkezési folyamata és a hasadási folyamat közt korreláció áll fenn. Amennyiben ez a korreláció más spontán hasadó izomerekre is fennáll, úgy sok esetben várható, hogy a termikus neutronok radiációs befogásával spontán hasadó izomér keletkezésére vezető reakciók nagy hatáskeresztmetszettel valósulnak meg. Mint ismeretes, a páratlan neutronszámú magok (mint pl. a ^{233}U , ^{235}U , ^{239}Pu) termikus neutronok hatására nagyon nagy (több száz barn) hatáskeresztmetszettel hasadnak. Feltételezhetjük tehát, hogy az izomér keletkezési hatáskeresztmetszete az ilyen magoknál meglehetősen nagy (néhányszor tíz milli-barnig terjedő) értékű.

A kis élettartamú izomerek esetén (ami pedig az előbb említett magok besugárzásakor is várható) a vizsgálatok céljára a III. fejezetben ismertetett késleltetett koincidenencia módszert használtuk. Ezzel a módszerrel megnéztük, hogy a ^{233}U , ^{235}U és ^{239}Pu magok termikus neutronokkal történő besugárzásakor keletkezik-e, ill. ha igen, milyen hatáskeresztmetszettel spontán hasadó izomér. Neutronforrásul NG—200 típusú neutrongenerátort használtunk. A 14,7 MeV energiájú neutronokat paraffintömbök segítségével termalizáltuk. A mérőberendezést 10 cm vastag ólomfal védte a neutronok termalizálása során fellépő γ -sugárzástól, ami háttérként jelentkezett volna.

A bombázó deuteronok áramának változtatásával a neutronintenzitást úgy választottuk meg, hogy a valódi és a véletlen koincidenenciák viszonyszáma optimális értéket (kb. 1-et) érjen el. Azt vártuk, hogy a konverziós elektronok és a hasadási termékek közt létrejött késleltetett koincidenenciák száma, amely a spontán hasadó izomerek keletkezésének felel meg, a prompt hasadások számának 10^{-4} -szerese lesz. A háttér forrásul a gerjesztett magokból és a hasadási termékekből kilépő konverziós elektronok és a prompt hasadási termékek közt létrejött véletlen koincidenenciák szolgáltak.

A ^{233}U és ^{239}Pu targetek besugárzásakor nem észleltünk 20—1000 nsec tartományban olyan késleltetett koincidenenciákat, amelyek ilyen felezési idejű spontán hasadó izomér keletkezésére utaltak volna. A σ_i/σ_f viszonyszámnak a mérési adatokból becsült felső határértéke ez esetekben $(2-3) \cdot 10^{-4}$. A ^{235}U réteg besugárzása arra az észrevételre vezetett, hogy ott kb. 100 nsec felezési idejű ^{236}U spontán hasadó izomér keletkezett. A késleltetett koincidenenciák és a prompt hasadások számából $\sigma_i/\sigma_f \approx 5 \cdot 10^{-5}$ értéket kaptunk. Ennek a módszernek a továbbfejlesztése és pontosabb adatok szerzése céljából az elektronokat mágneses spektroszkópiai módszerrel kell szétválasztani, mivel egy, vagy csak néhány konverziós vonal kiválasztása lényegesen csökkenti a háttérrel, s megnöveli a mérések érzékenységét.

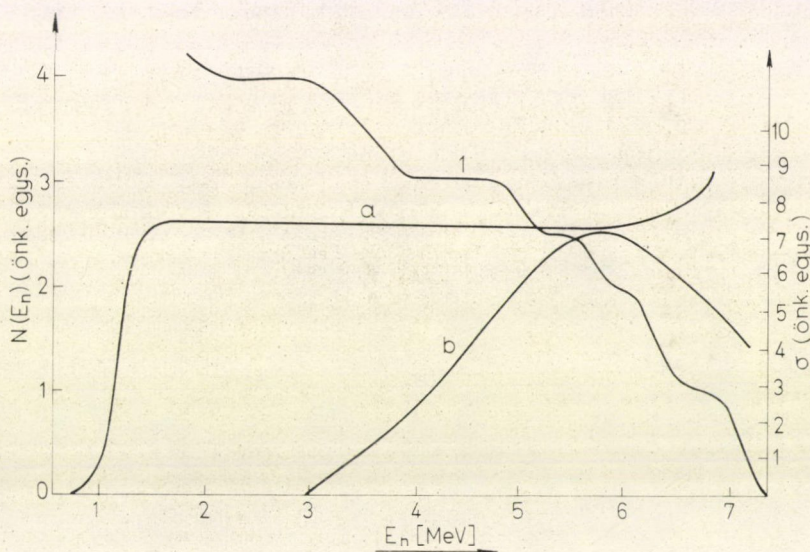
V.

Spontán hasadó izotópok nyerése rugalmatlan neutronsóróval

Ha a neutronok energiája nagyobb az izotóp nívó energiájánál (kb. 3 MeV-nél), akkor az (n, γ) reakción kívül (n, n') reakcióval is kaphatunk spontán hasadó izotópokat. Ebben a fejezetben olyan reakciók hatáskeresztmetszeteinek mérését írjuk le, amelyek során széles energiatartományba eső (a küszöbenergiától 14,7 MeV-ig terjedő) neutronok rugalmatlan szórásával spontán hasadó izotópok keletkeznek. A kapott eredményeket a kétpúpú barrier modell alapján értékeltük ki.

1. Hatáskeresztmetszetek mérése széles energiaspektrummal rendelkező neutronnyalábok felhasználásával

A spontán hasadó izotópok hasadási termékei hozamának növelése végett neutronforrásként a ${}^9\text{Be}(d, n)$ reakciót használtuk fel, amelyet nagy neutronhozam jellemez (1. a 2. táblázatot). A 15. ábrán az e reakció során 3 MeV energiájú deu-



15. ábra. Vastag berillium-targetnek 3,0 MeV energiájú deuteronokkal történő besugárzásakor keletkező neutronok számolt spektruma (1); hasadásra vezető reakció számolt gerjesztési függvénye (a), és spontán hasadó izotóp keletkezésére vezető reakció számolt gerjesztési függvénye (b) a ${}^{243}\text{Am} + n$ reakció esetén.

teronokkal a deuteronnyalábhöz képest 0° szög alatt kapott neutronok spektrumát ábrázoltuk. Ezt a spektrumot az adott kísérleti elrendezés geometriája, a neutronok ismert keletkezési hatáskeresztmetszete és szögeloszlása [78] alapján számoltuk.

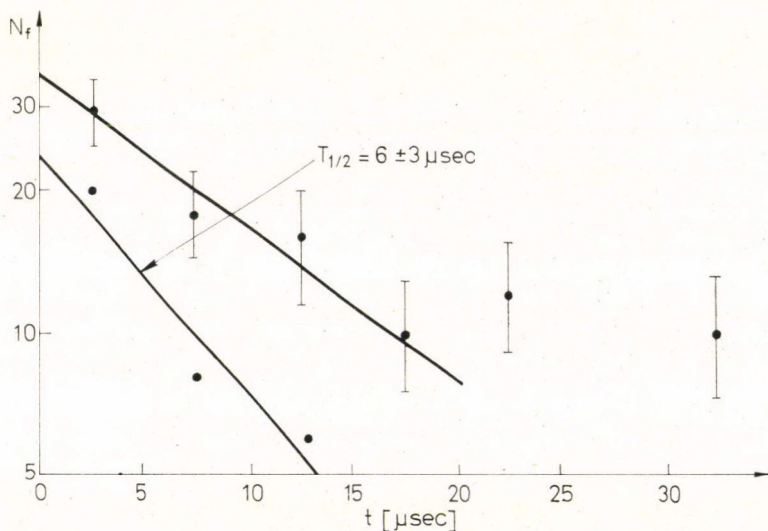
A 15. ábrán feltüntettük a hasadásra, valamint a spontán hasadó izotóp keletkezésére vezető (n, n') reakciók számolt gerjesztési függvényeit is (a számolás módját később ismertetjük). Látható, hogy gyakorlatilag az (n, n') reakció teljes gerjesztési függvénye a használt neutronspektrumon belül helyezkedik el.

A méréseket az EAI Neutronfizikai Laboratóriumának EG—5 típusú elektrostatikus generátoránál végeztük. A deuteronok maximális árama kb. 20 μA volt.

Az ismertett neutronnyalábbal meghatároztuk a ^{238}U ($T_{1/2}=200$ nsec), ^{242}Pu (28 nsec) és a ^{243}Am (6,5 μsec) spontán hasadó izomerek keletkezési hatáskeresztmetszeteit. A kis élettartamú izomerek (^{238}U , ^{242}Pu) esetében a III. fejezetben leírt repülési idő módszert alkalmaztuk, s a méréseket folyamatos neutronáram mellett végeztük. Besugárzás után meghatároztuk a spontán hasadó izomerek hasadási termékei által a dielektrikum-detektorban keltett nyomok számát. A hasadási termékek regisztrációs hatásfokának (7. ábra), a rétegen áthaladó neutronáramnak, és a réteg effektív vastagságának ismeretében meghatározhattuk a spontán hasadó izomerek keletkezésére vezető (n, n') reakciók hatáskeresztmetszeteit. A kísérletek során használt rétegek vastagsága természetesen nagyobb volt a meglökött magnak a rétegben megtehető maximális úthosszánál. A hatásos rétegvastagságot a töltött részecskék anyagon való áthaladásának elmélete alapján számoltuk [79]. 5 MeV energiájú neutronok esetén ez a rétegvastagság kb. 5 $\mu\text{g}/\text{cm}^2$. Számításaink helyességét a $^{65}\text{Cu}(n, 2n)^{64}\text{Cu}$ és a $^{181}\text{Ta}(n, 2n)^{180i}\text{Ta}$ reakciókban kilökött magok hozamának mérésével ellenőriztük; ez a hozam a hibahatáron belül (20%) megegyezett a számolt hozamértékkel.

A rétegen áthaladó neutronáramot a vizsgált rétegtől 3 cm-re elhelyezett dielektrikum-detektor által regisztrált prompt hasadási termékek hozamából határoztuk meg. A 15. ábrából látható, hogy a prompt hasadási hatáskeresztmetszet gyakorlatilag a neutronok teljes energiatartományában konstans.

A ^{243}Am spontán hasadó izomér esetében a besugárzást neutroncsomagokkal végeztük, a hasadási termékeket pedig szikraszámlálóval detektáltuk. A kísérleti módszer és a kísérleti adatok kiértékelése hasonló volt a III. és IV. fejezetben leírtakhoz, ahol az (n, γ) reakciók vizsgálatát tárgyaltuk. A hasadási termékek időbeli eloszlását a ^{243}Am réteg besugárzása esetére a 16. ábrán tüntettük fel. A 6,5 μsec -es



16. ábra. A hasadási termékek időbeli eloszlása a $^{243}\text{Am}(n, n')^{243i}\text{Am}$ reakció esetén.

felezési idő bizonyítja, hogy ez esetben valóban (n, n') reakció során ^{243}Am spontán hasadó izomér keletkezett.

A reakciók ilyen módon kapott hatáskeresztmetszet-értékei a neutronspektrumra vett átlagértékek:

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\int_{E_1}^{E_2} \sigma_i(E) \cdot N(E) dE}{\int_{E_1}^{E_2} N(E) dE}. \quad (39)$$

Ha az (n, n') reakció csakis kompond magon keresztül jöhet létre (más lehetőségére még később kitérünk), úgy a spontán hasadó izomér keletkezési hatáskeresztmetszetének energiatfüggése a következő alakú [60]:

$$\sigma_i \sim \left(1 + \frac{\Delta E_2}{T}\right) e^{-\frac{\Delta E_2}{T}} - \left(1 + \frac{\Delta E_1}{T}\right) e^{-\frac{\Delta E_1}{T}}, \quad (40)$$

ahol ΔE_1 az izomér keletkezési küszöbenergiától (3 MeV) számított gerjesztési energia, ΔE_2 az (n, n') reakció küszöbenergiától (5,5 MeV) számított gerjesztési energia, T a mag hőmérséklete. Ez a formula a spontán hasadó izomérek keletkezésére vonatkozó, fentebb, a II. fejezetben leírt kétlépcsős mechanizmusán alapszik. A (40) formula felhasználásával a neutronspektrum alakjának ismeretében a reakció kísérletileg kapott átlagos hatáskeresztmetszetéből megkaphatjuk a gerjesztési függvény maximumához tartozó hatáskeresztmetszetet. Ezeket az izomér keletkezési hatáskeresztmetszet-értékeket (σ_i), valamint a hasadási hatáskeresztmetszetek (σ_f) és az e magok alapállapotban történő keletkezési hatáskeresztmetszetek (σ_g) értékeit az 5. táblázatban foglaltuk össze. A hasadási hatáskeresztmetszetek ismeretese, az alapállapotra vezető (n, n') reakciók hatáskeresztmetszeteit pedig az alábbi formulával számoltuk ki [80, 81]:

$$\sigma_g = \sigma_c \frac{\Gamma_n}{\Gamma_n + \Gamma_f} \left[\left(1 + \frac{\Delta E_2}{T}\right) e^{-\frac{\Delta E_2}{T}} - e^{-\frac{\Delta E_1}{T}} \right], \quad (41)$$

ahol σ_c a kompond mag keletkezési hatáskeresztmetszete, Γ_n és Γ_f a parciális neutron és hasadási szélesség; a többi jelölés azonos a (40) formulában szereplő jelöléssel.

A táblázatból látható, hogy a spontán hasadó izomérek (n, n') reakciókban kapott σ_i hatáskeresztmetszeteinek mérési hibái meglehetősen nagyok (30–40%). Ennek oka a mérések során kapott események kis száma (a besugárzás után a csillám-

5. TÁBLÁZAT

Az (n, n') reakciók hatáskeresztmetszet-értékei

Izomér	$T_{1/2}$ [sec]	σ_i (10^{-28} cm ²)	σ_g (10^{-24} cm ²)	σ_f (10^{-24} cm ²)	$\frac{\sigma_i}{\sigma_f} \cdot (10^{-4})$	$\frac{\sigma_i}{\sigma_g} \cdot (10^{-4})$
^{238}U	$2 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \pm 0,5$	0,8	0,7	$2 \pm 0,7$	$1,8 \pm 0,6$
^{242}Pu	$2,8 \cdot 10^{-8}$	$0,9 \pm 0,3$	0,94	1,2	$0,76 \pm 0,3$	$0,95 \pm 0,3$
^{243}Am	$6,5 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \pm 0,6$	0,74	1,4	$1,1 \pm 0,4$	$2,1 \pm 0,8$

lemezen talált, hasadási termékektől származó nyomok száma mindössze kb. 10, vagy néhányszor 10 volt). Ahhoz, hogy a kis effektív rétegvastagság (kb. $5 \mu\text{g}/\text{cm}^2$) és a reakciók kis hatáskeresztmetszete mellett a mérések pontosságát növelhessük, a besugárzási időt (15–20 óra) kellett volna lényegesen megnövelni. Ezt azonban technikai nehézségek miatt nem tehetjük meg.

2. A mért hatáskeresztmetszetek értékelése a kétpúpú barrier modell alapján

A kompond magon át végbemenő (n, n') reakció során kialakult spontán hasadó izomér keletkezési hatáskeresztmetszete a kétpúpú barrier modell alapján a következő formába írható:

$$\sigma_i = \sigma_c \frac{\vec{\Gamma}_1}{\Gamma_{\gamma_1} + \Gamma_{n_1} + \vec{\Gamma}_1} \cdot \frac{\Gamma_{n_2}}{\Gamma_{\gamma_2} + \Gamma_{n_2} + \vec{\Gamma}_2 + \vec{\Gamma}_2}, \quad (42)$$

ahol Γ_{n_2} a mag parciális neutronszelessége a második potenciálvölgyben. A többi jelölés azonos a (22) formulában szereplő jelölésekkel. A radiáció nélküli átmene-tekre vonatkozó parciális szélességek ($\vec{\Gamma}_1$, $\vec{\Gamma}_2$, $\vec{\Gamma}_2$) a külső és belső barrierék magasságának függvényei. Következésképp e szélességek energiafüggésének mérési eredményeiből megkaphatjuk a kétpúpú barrier néhány paraméterét. Mi azonban az (n, n') reakciók gerjesztési függvényeit nem mértük, csupán széles energia-intervallumra átlagolt, vagy a gerjesztési függvények maximumához tartozó hatáskeresztmetszet-értékeket határoztunk meg. Ezért mi a barrier paramétereire vonatkozó adatokat az izomér keletkezési hatáskeresztmetszetek abszolút értékeiből, vagy ami esetünkben még inkább elérhető és meghatározottabb is, az izomér keletkezési hatáskeresztmetszetnek és a hasadási, ill. a mag alapállapotba való keletkezési hatáskeresztmetszetnek viszonyszámaiból kaphatjuk meg.

Az előzőekből tudjuk (III. fejezet), hogy

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_f} = \frac{\Gamma_{n_2}}{\vec{\Gamma}_2}. \quad (43)$$

A kísérletileg kapott σ_i/σ_f viszonyszámból és a számolt Γ_{n_2} értékből meghatározható a külső barrier magasságával kapcsolatos $\vec{\Gamma}_2$ érték. A neutron-szélesség abszolút értéke azonban nem olyan határozott érték, mint pl. a radiációs szélességé. A neutron-szélesség gyorsan nő az energia növekedésével, függ a nívószélesség paraméterétől, az energianívók közötti réstől stb. Meghatározottabb, és a kísérletekből jobban ismert a neutron és hasadási szélességek Γ_n/Γ_f viszonyszáma [82]. A tóriumnál nehezebb magok és kis gerjesztési energiák esetére az alábbi empirikus összefüggés érvényes [83]:

$$\frac{\Gamma_n}{\Gamma_f} = \frac{A^{2/3} \cdot T}{10} \cdot e^{\frac{B_n - B_f + A}{T}}, \quad (44)$$

ahol B_n és B_f a neutron kötési energiája, ill. a hasadási barrier, A a hasadási barrieren levő és a potenciálvölgyben levő energianívók közti rés. A $\vec{\Gamma}_2$ értéket a második potenciálvölgyben levő nívókra vonatkozó hasadási szélességként foghatjuk fel. Ezért a $\Gamma_{n_2}/\vec{\Gamma}_2$ viszonyszámot szintén meghatározza a (44) kifejezés, s a kísérletileg kapott $\Gamma_{n_2}/\vec{\Gamma}_2$ viszonyszámból a második barrier magasságára vonatkozó információ-

hoz juthatunk. Könnyebben számolható kifejezést kapunk, ha a $\Gamma_{n_2}/\vec{\Gamma}_2$ és Γ_n/Γ_f viszonyszámok hányadosát képezzük:

$$\frac{\Gamma_{n_2}/\vec{\Gamma}_2}{\Gamma_n/\Gamma_f} = e^{\frac{E_B - E_i - E_f}{T}}, \quad (45)$$

ahol $E_B - E_i$ a második barrier magassága a második völgy aljához, pontosabban az izomér állapot energiájához képest. Az ismert Γ_n/Γ_f értékek szisztematikájából T értéke 0,4 MeV-nek adódik [84]. A külső barrier energiáira ilyen módon kapott értékeket a 6. táblázat tartalmazza (az izomérnívó energiáját 3 MeV-nek vettük).

A belső barrier magasságára vonatkozó adatokat kaphatunk a mag izomér és alapállapotú hatáskeresztmetszeteinek viszonyszámából:

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_g} = \frac{\Gamma_{n_2}}{\Gamma_{n_1}} \cdot \frac{\vec{\Gamma}_1}{\Gamma_{\gamma_2} + \Gamma_{n_2} + \vec{\Gamma}_2 + \vec{\Gamma}_2}. \quad (46)$$

Feltételezve, hogy Γ_{γ_2} és $\Gamma_{n_2} \ll \vec{\Gamma}_2$ és $\vec{\Gamma}_2$, valamint a parciális szélességeket a nívó-sűrűséggel és a nyitott csatornák számával kifejezve, ezt a kifejezést a következő alakba is írhatjuk:

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_g} = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{N_A}{N_A + N_B}, \quad (47)$$

6. TÁBLÁZAT

Az (n, n') reakciók analizálásával a barrier paramétereire kapott értékek

Mag	$\frac{\sigma_i}{\sigma_f} (10^{-4})$	Γ_n/Γ_f	$E_B - E_i$ [MeV]	E_B [MeV]	E_A [MeV]	$\hbar\omega_B$ [MeV]
^{239}U	2	6	2,5	5,5	6,2	—
^{243}Pu	0,76	1,8	2,3	5,3	6,3	0,5
^{244}Am	1,1	1,4	2,6	5,6	6,3	0,4

ahol N_2 és N_1 a nívók száma a második, ill. az első potenciálvölgyben, N_A és N_B a nyitott csatornák száma a belső, ill. a külső barrieren. Az N_2/N_1 viszonyszám megfelel a második és első völgyben levő nívósűrűség viszonyszámának, s 3 MeV-es izomérnívó-energia esetén egyenlő 10^{-3} -nal. Az 5. táblázatból látható, hogy a σ_i/σ_g

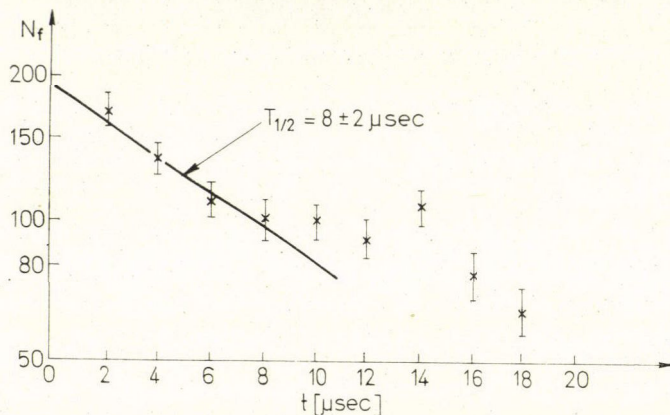
viszonyszámok értéke $(1-2) \cdot 10^{-4}$. Ebből következik, hogy $\frac{N_A}{N_A + N_B} = 0,1-0,2$,

azaz a nyitott csatornák száma a belső barrieren 5–10-szer kevesebb a külsőn levőnél. Ez azt jelentheti, hogy a belső barrier 0,7–1,0 MeV-vel magasabb a külsőnél.

A külső barrier görbületére jellemző $\hbar\omega_B$ paraméter értékét megkaphatjuk az e barriernek a 6. táblázatban feltüntetett magasságából és az izomér állapot ismert élettartamából [l. a (29) formulát]. Az ilyen módon kapott $\hbar\omega_B$ értékeket a táblázat ugyancsak tartalmazza.

3. 14,7 MeV energiájú neutronok rugalmatlan szórásával spontán hasadó izomerek keletkezésére vezető reakciók hatáskeresztmetszeteinek mérése

Az 1—7 MeV energiatartományba eső neutronok rugalmatlan szórásával spontán hasadó izomerek keletkezésére vezető reakciók tanulmányozásán kívül ilyen vizsgálatokat 14,7 MeV-es neutronokkal is végeztünk. Míg a kis energiájú neutronok esetében a reakció lényegében kompond mag kialakulása után megy végbe, addig 14,7 MeV energiájú neutronok esetén nagy szerepet kezdenek játszani a direkt kölcsönhatás folyamatai.



17. ábra. A hasadási termékek időbeli eloszlása a $^{239}\text{Pu}(n, n')^{239\text{m}}\text{Pu}$ reakció esetén.

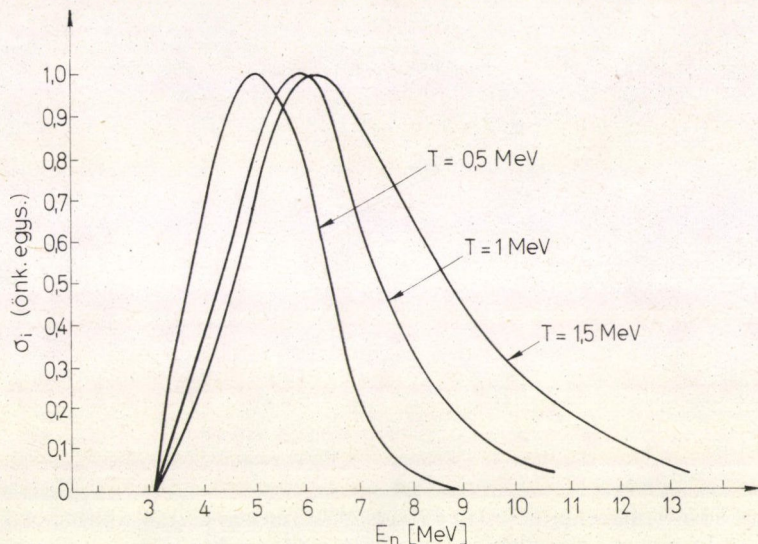
A méréseket NG—200 típusú neutrongenerátornál végeztük. Neutronforrástul $^3\text{H}+d$ reakciót használtunk. A neutronnyaláb modulációját ionnyaláb-eltérítő lemezpár segítségével végeztük, amelyre feszültség-impulzusokat adtunk. A hasadási termékeket szikraszámológéppel detektáltuk, amelynek belsejébe helyeztük el a vizsgálat céljára szánt réteget (^{239}Pu és ^{243}Am). A ^{239}Pu réteg besugárzásakor a neutroncsomagok közötti intervallumokban találtunk spontán hasadástól származó hasadási termékeket, amelyek időbeli eloszlása $8 \pm 2 \mu\text{sec}$ felezési időnek felelt meg (17. ábra). Ez azt bizonyította, hogy rugalmatlan neutronsórásal létrejövő reakcióval ^{239}Pu spontán hasadó izomért kaptunk (ennek felezési ideje 8,5 μsec). A reakció hatáskeresztmetszete $170 \pm 40 \mu\text{barn}$ volt.

A ^{243}Am besugárzásakor a viszonylag nagy háttérszint, valamint az $(n, 2n)$ reakcióban keletkező $^{242\text{m}}\text{Am}$ izomér hozama ($T_{1/2} = 14 \text{ msec}$) miatt nem sikerült $^{243\text{m}}\text{Am}$ izomérrel kapcsolatos hasadási termékek észlelése ($T_{1/2} = 6,5 \mu\text{sec}$). Az (n, n') reakció hatáskeresztmetszete felső határértékül 50 μbarn adódott.

A 18. ábrán a $^{239}\text{Pu}(n, n')^{239\text{m}}\text{Pu}$ reakció (40) formulával számolt gerjesztési függvényét ábrázoltuk különböző hőmérsékletértékek esetére. A számításoknál feltételeztük, hogy az izomérnívó energiája 3 MeV, a reakció hatáskeresztmetszete pedig a maximumban a ^{238}U és ^{243}Am izomérekre mért értékek alapján $2 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$.

A 18. ábrából látható, hogy az $E_n = 14,7 \text{ MeV}$ -nél kísérletileg kapott hatáskeresztmetszet-érték lényegesen nagyobb, mint a bármilyen T paraméterrel számolt megfelelő érték. Nyilvánvaló, hogy az izomér állapot ez esetben a berepülő neutron-

nak a maggal való direkt kölcsönhatása következtében jött létre. Ismeretes, hogy az ilyen folyamat eredményeként elsősorban a kollektív állapotok, pl. a vibrációs nívók gerjesztése lép fel (az ilyen nívók gerjesztésének hatáskeresztmetszete kb. 10^{-25} cm^2). Lehetséges, hogy ez állapotok lebomlásakor izomér állapotra vezető átmenetek jönnek létre.



18. ábra. A $^{239}\text{Pu}(n, n')^{239\text{m}}\text{Pu}$ reakció számolt gerjesztési függvényei különböző T paraméter-értékek esetére.

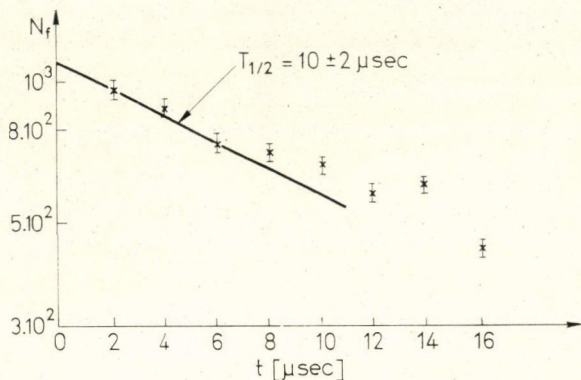
Az észlelt effektust nem okozhatták a neutronspektrumban jelen levő kis energiájú neutronok. Ilyen neutronok a spektrumban becslés szerint kis mennyiségben ($<10\%$) voltak jelen, s ezek energiája egyébként sem elég az izomér állapot gerjesztéséhez ($E_n < 3 \text{ MeV}$).

VI.

$(n, 2n)$ reakciók során keletkező spontán hasadó izomérek keletkezési hatáskeresztmetszetének mérése

A $^3\text{H}(d, n)^4\text{He}$ reakcióból kapott 14,7 MeV energiájú neutronokkal történő besugárzásakor a spontán hasadó izomér állapotok nagy valószínűséggel $(n, 2n)$ reakcióval jönnek létre. Ilyen reakciók hatáskeresztmetszetét mértük meg a ^{232}Th , ^{233}U , ^{235}U , ^{238}U , ^{237}Np , ^{239}Pu , ^{240}Pu , ^{242}Pu és ^{243}Am rétegek besugárzásakor. A méréseket repülési idő módszerrel (kis élettartamú izomérek) és modulált neutronnyaláb módszer ($T_{1/2} > 1 \mu\text{sec}$) segítségével végeztük. A neutronnyalábot, attól függően, hogy milyen élettartamú izomér állapotot vizsgáltunk, különféle módon moduláltuk. Amikor az ionforrásra adott feszültséget moduláltuk, az ionimpulzusok szélessége 0,6 msec, az impulzusok közötti szüneteké 12 msec volt. Ennek

megfelelően a kimutatható izomér felezési ideje hozzávetőlegesen 0,5—15 msec időintervallumba esett. Mechanikus módon történő ionnyaláb-szaggatás esetén az impulzus-szélesség kb. 2 msec, az impulzusok közötti szünetek szélessége pedig kb. 60 msec volt. Ez esetben a mérhető felezési idő 2—100 msec intervallumba esett. Az eltérítő lemezpár segítségével végzett moduláció esetén a mérhető felezési idők tartománya kb. 1—100 μ sec volt.



19. ábra. A hasadási termékek időbeli eloszlása a $^{240}\text{Pu}(n, 2n)^{239}\text{Pu}$ reakció esetén.

A hasadási termékeket a ^{232}Th , ^{235}U és ^{238}U rétegek esetén ionizációs kamrával, a többi izotóp esetén sokszálas szikraszámológóval detektáltuk. A rétegen áthaladó neutronáramot a prompt hasadási termékek hozamából, máskor a $^{27}\text{Al}(n, \alpha)^{24}\text{Na}$ reakcióban felaktivált alumíniumfólia aktivációs analíziséből közvetve határoztuk meg. (A reakció hatáskeresztmetszete 14,7 MeV-es neutronok esetén 115 mbarn.)

Meghatároztuk a neutron-impulzusok közti szünetekben detektált hasadási termékek időbeli eloszlását. Példaként a 19. ábrán a $^{240}\text{Pu}(n, 2n)^{239}\text{Pu}$ reakcióból kapott hasadási termékek időspektrumát ábrázoltuk. A nagy háttér a ^{240}Pu izotóp spontán hasadásából adódott.

A spontán hasadó izomérek bomlásával kapcsolatos hasadási termékek mért hozama lehetővé teszi az izomér állapotok keletkezésére vezető reakciók hatáskeresztmetszetének meghatározását. Ezeket a hatáskeresztmetszet-értékeket, valamint az azokban az esetekben kapott felső határértékeket, amikor nem tudtuk kimutatni spontán hasadó izomérek keletkezését, a 7. táblázatban foglaltuk össze. A táblázatban feltüntettük a σ_i/σ_f és σ_i/σ_g viszonyszámok értékét is. A σ_g értékeket a $^{235}\text{U}(n, 2n)^{234}\text{U}$, $^{232}\text{Th}(n, 2n)^{231}\text{Th}$ és $^{238}\text{U}(n, 2n)^{237}\text{U}$ reakciók esetén ismerjük; a többi $(n, 2n)$ reakció esetére a statisztikus magmodell alapján számoltuk ki. A σ_g kiszámítására szolgáló formula figyelembe veszi a gerjesztett magból második és harmadik neutron kipárolgásának valószínűségét is:

$$\sigma_g = \sigma_c \left(\frac{\Gamma_n}{\Gamma_n + \Gamma_f} \right)_1 \cdot \left(\frac{\Gamma_n}{\Gamma_n + \Gamma_f} \right)_2 \left\{ \left[1 + \frac{\Delta E_2}{T} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta E_2}{T} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta E_2}{T} \right)^3 \right] e^{-\frac{\Delta E_2}{T}} - \left[1 + \frac{\Delta E_1}{T} \right] e^{-\frac{\Delta E_1}{T}} \right\}, \quad (48)$$

ahol $\left(\frac{\Gamma_n}{\Gamma_n + \Gamma_f}\right)_1$ és $\left(\frac{\Gamma_n}{\Gamma_n + \Gamma_f}\right)_2$ a kompond magra, ill. az egy neutron kipárolgása után visszamaradó magra vonatkozó értékek, ΔE_1 és ΔE_2 az $(n, 2n)$, ill. az $(n, 3n)$ reakció küszöbértéke fölötti gerjesztési energia. A számolásoknál $\sigma_c = 2,4$ barn és $T = 1,0$ MeV értékeket vettünk. A hasadási hatáskeresztmetszetek (σ_f) értékei az összes vizsgált magra ismeretesek.

A $^{243}\text{Am}(n, 2n)^{242}\text{Am}$ reakció hatáskeresztmetszetét korábban már megmérték [11]. Az általunk e reakció hatáskeresztmetszetére kapott érték jól egyezik a [11] munkában kapott értékkel.

7. TÁBLÁZAT

Az $(n, 2n)$ reakciók hatáskeresztmetszet-értékei

Izomér	$T_{1/2}$ [sec]	σ_i (10^{-28} cm ²)	σ_g (10^{-24} cm ²)	$\frac{\sigma_i}{\sigma_f}$ (10^{-4})	$\frac{\sigma_i}{\sigma_g}$ (10^{-4})
^{242}Am	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \pm 0,5$	0,36	$0,8 \pm 0,3$	$3,1 \pm 1,4$
^{241}Pu	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \pm 0,25$	0,52	$0,70 \pm 0,2$	$1,9 \pm 0,5$
^{239}Pu	$8 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \pm 0,5$	0,3	$0,85 \pm 0,2$	$6,7 \pm 1,6$
^{238}Pu	$\cong 5 \cdot 10^{-9}$	$\cong 0,06$	0,2	$\cong 0,03$	$\cong 0,3$
^{236}Np	$(1-100) \cdot 10^{-6}$	$\cong 0,3$	0,39	$\cong 0,12$	$\cong 0,77$
^{237}U	$\cong 5 \cdot 10^{-9}$	$\cong 0,13$	0,78	$\cong 0,1$	$\cong 0,17$
^{234}U	$\cong 5 \cdot 10^{-9}$	$\cong 0,09$	0,65	$\cong 0,05$	$\cong 0,15$
^{232}U	$\cong 5 \cdot 10^{-9}$	$\cong 0,4$	0,37	$\cong 0,1$	$\cong 1,1$
^{231}Th	$\cong 5 \cdot 10^{-9}$	$\cong 0,09$	1,56	$\cong 0,26$	$\cong 0,06$

A 7. táblázatból látható, hogy spontán hasadó izomérek bomlásával kapcsolatos hasadási termékeket találtunk az Am és Pu izotópok esetében, s nem találtunk a Np, U és Th izotópok esetében. Ez utóbbinak többféle oka lehet:

1. Ezeknek a magoknak nincs spontán hasadó izomér állapotuk;
2. Az izomér állapotok bomlási felezési ideje kisebb 5 nsec-nál;
3. A spontán hasadó izomér állapotok keletkezési hatáskeresztmetszete kicsi;
4. Az izomér állapotok fő bomlástípusa γ -kisugárzás (vagy más), s nem a spontán hasadás.

A spontán hasadó izomérek észlelt tulajdonságait jól értelmező kétpúpú barrier modellből következik, hogy az U és Np izotópoknak is kell legyen spontán hasadó, vagy azzal ekvivalens izomér állapota. A hasadási barrier bonyolult alakjáért felelős héjkorrekció a tömegszámnak viszonylag sima függvénye. Ezért nincs ok arra, hogy az izomér állapotok hirtelen eltűnjenek, annál is inkább, mivel a ^{236}U és ^{238}U spontán hasadó izomérek ismeretesek (ezeket az izoméreket a vizsgált izotópok $(n, 2n)$ reakcióiból nem várhattuk).

Az elmondottak alapján tehát úgy tűnik, hogy az általunk vizsgált, s negatív eredményre vezető reakciókban valószínűleg azért nem sikerült kimutatni spontán hasadó izomérektől származó hasadási termékeket, mert az előbb felsorolt okok közül a 2—4. pontban foglaltak valamelyike áll fenn (kivételt képezhet ez alól a Th mag). Az ilyen sajátosságokat az U és Np spontán hasadó izomérek esetében azzal lehet magyarázni, hogy ezekben a magokban az izomérnívók energiája a szokásosnál nagyobb, s a belső barrier magassága, amely az alapállapotra vezető γ -átmeneteket megakadályozza kisebb, mint a Pu és Am magoknál.

A [9] munka szerzői (n, γ) reakciók vizsgálata során meglehetősen nagy ($4,7 \cdot 10^{-4}$) σ_i/σ_f hatáskeresztmetszet-viszonyszámmal találtak 34 nsec felezési idővel spontán hasadó ^{234}U izomért. Méréseink ennek az izomérnek a létezését sem erősítették meg, noha az általunk kapott $\sigma_i/\sigma_f < 5 \cdot 10^{-6}$, lényegesen kisebb a [9] munkában közölt értéknél. Nem sikerült kimutatnunk a 6,5 nsec felezési idővel spontán hasadó ^{238}Pu izomért sem, amelyet Burnett és munkatársai [15] ^{238}U ($\alpha, 2n$) reakcióból kaptak. Ez esetben azonban az általunk felső határértékként kapott σ_i/σ_f viszonzszám közel olyan nagyságú, mint a [15] munkában közölt érték. Ez utóbbi esetben tehát nem beszélhetünk kifejezett ellentmondásról.

A 7. táblázatban összefoglalt σ_i/σ_f és σ_i/σ_g viszonzszámok analizálásával meghatározható a kétpúpú barrier több paramétere. Az analizálásnál a (43) és (46) formulákat használtuk fel, amelyek a σ_i/σ_f és σ_i/σ_g viszonzszámok Γ_n , Γ_n , $\vec{\Gamma}_2$, $\vec{\Gamma}_1$ és $\vec{\Gamma}_2$ parciális szélességektől való függését fejezik ki. Az ($n, 2n$) reakciók esetén azonban az V. fejezetben leírt (n, n') reakciókkal szemben számolni kell azzal, hogy az ($n, 2n$) reakció esetén a hasadás bekövetkezhet úgy egy neutron kipárolgása előtt, mint egy vagy két neutron kipárolgása után. Ezért a magoknak a 14,7 MeV energiájú neutronok esetén mért hasadási hatáskeresztmetszete valójában a reakció mindhárom fokozata hasadási hatáskeresztmetszetének összege. Ugyanakkor a (43) kifejezésben az a hasadási hatáskeresztmetszet szerepel, amelynek mérésénél a reakciók úgy mehetnek végbe, hogy azok során a mag alapállapotba vagy izomér állapotba kerül, vagy elhasad. A számolásoknál előbb a mért hasadási hatáskeresztmetszetből ez utóbbi hatáskeresztmetszetet kell meghatároznunk, amit megtehetünk, ha minden fokozatban ismerjük a hasadás valószínűségét (ezeket a valószínűség-értékeket a megfelelő magokra vonatkozó Γ_n/Γ_f viszonzszámokból határozhatjuk meg). A σ_i/σ_f viszonzszámok ilyen módon korrigált értékeit (σ_i/σ_f), valamint az így kapott viszonzszámok és a σ_i/σ_g viszonzszámok analizálásából a belső és külső barrierok magasságára kapott értékeket a 8. táblázatban foglaltuk össze. Ez a táblázat tartalmazza a $\hbar\omega_B$ paraméter értékeit is, amelyeket az izomér állapotok élet-tartamából és a külső barriernek az izomér nivóhoz viszonyított magasságából határoztunk meg.

8. TÁBLÁZAT

Az ($n, 2n$) reakciók analizálásából a barrier paramétereire kapott értékek

Mag	$\frac{\sigma_i}{\sigma_f} (10^{-4})$	$\frac{\sigma_i}{\sigma_f'} (10^{-4})$	Γ_n/Γ_f	$E_B - E_i$ [MeV]	E_B [MeV]	E_A [MeV]	$\hbar\omega_B$ [MeV]
^{240}Pu	0,85	1,7	0,6	2,4	5,4	5,8	0,6
^{242}Pu	0,7	1,3	1,15	2,0	5,0	5,7	0,45
^{243}Am	0,8	2,3	1,0	2,3	5,3	5,8	0,4

Összefoglalás

Befejezésül tekintsük át a neutronoknak magokkal történő kölcsönhatásakor a spontán hasadó izomérek keletkezésére vezető reakciók vizsgálata során tapasztalt főbb törvényszerűségeket.

A neutronok radiációs befogásával létrejött reakciók vizsgálata azt mutatta, hogy az izomér keletkezési folyamata és a hasadási folyamat közt korreláció áll fenn.

A $^{241}\text{Am}+n$ és $^{243}\text{Am}+n$ reakciók esetében mindkét folyamatot küszöbérték felé tartó lefutású gerjesztési függvény jellemzi. Az izomér keletkezési hatáskeresztmetszete és a hasadási hatáskeresztmetszet viszonyyszáma minimális energiájú neutronok esetén kb. 10^{-4} , s lassan csökken a neutronok energiájának növekedésével.

A 3–7 MeV energiatartományba eső neutronokkal létrehozott (n, n') reakciók, valamint a 14,7 MeV energiájúakkal létrehozott ($n, 2n$) reakciók esetén a kapott izomér-viszonyyszámok értéke $(2-4) \cdot 10^{-4}$, közel olyan nagyságú, mint a töltött részecskékkel létrehozott reakciók során kapott értékek. A 14,7 MeV energiájú neutronokkal létrehozott, spontán hasadó izomér keletkezésére vezető (n, n') reakciót anomálishan nagy hatáskeresztmetszet jellemez. Ebből arra lehet következtetni, hogy ez esetben az izomér állapot keletkezésénél nagy szerepe van a direkt kölcsönhatásoknak.

A spontán hasadó izomérek keletkezésére vezető reakciók észlelt törvényszerűségei jól értelmezhetők a kétpúpú barrier modell alapján. A vizsgált reakcióknak a kétpúpú barrier modell alapján történő analizálásával megkaphatjuk a hasadási barrier fő paramétereit. Azt tapasztaltuk, hogy az összes általunk vizsgált mag (U, Pu és Am izotópok) esetében a második barrier magassága 0,5–1,0 MeV-vel kisebb az első barrier magasságánál, de szélessége nagyobb az első barrierénél (a $\hbar\omega$ paraméter kb. 0,4 MeV, míg az első barrieré kb. 0,6 MeV).

Szerző köszönetét fejezi ki G. N. Flerov akadémikusnak, az EAI Magreakciók Laboratóriuma igazgatójának és háláját Nagy Lászlónak, a KFKI Magfizikai Laboratóriuma közben tragikus hirtelenséggel elhunyt főosztályvezetőjének, akik lehetőséget adtak, és segítséget nyújtottak az itt közölt munka elvégzéséhez. Köszönet illeti Ju. P. Gangrszkijt, a fizikai és matematikai tudományok kandidátusát, tudományos vezetőt, a munkák során nyújtott sokoldalú technikai és tudományos segítségért; B. N. Markovot, J. F. Hariszovot, A. G. Belovot és B. Dalhszurent (EAI), valamint Vinnay Istvánt és Lajtai Albertet (KFKI) a munkákban való közreműködésért; V. P. Pereligint és Sz. P. Tretyakovát a dielektrikum-detektorok nyomkiértékelésében nyújtott segítségért; Sz. M. Polikanovot, a fizikai és matematikai tudományok doktorát a munkák során tanúsított érdeklődésért és hasznos útmutatásokért; a KFKI és az EAI Igazgatóságát a kooperációs munkák végrehajtásának engedélyezéséért.

IRODALOM

1. G. N. Flerov, K. A. Petrzhak, Phys. Rev. 58, 89, 1940.
2. С. М. Поликанов, В. А. Друин, В. А. Карнаухов, В. Л. Михеев, А. А. Плеве, Н. К. Скобелев, В. Г. Субботин, Г. М. Тер-Акопьян, В. А. Фомицев, ЖЭТФ 42, 1464, 1962.
3. E. K. Hyde, G. T. Seaborg, Encyclopedia of Phys. 42, 205–308. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1957.
4. S. M. Polikanov, G. Sletten, Nucl. Phys. A151, 656, 1970.
5. N. L. Lark, G. Sletten, J. Pedersen, S. Bjørnholm, Nucl. Phys. A139, 481, 1969.
6. G. N. Flerov, A. A. Pleve, S. M. Polikanov, S. P. Tretyakova, I. Boca, M. Sezon, I. Vilcov, N. Vilcov, Nucl. Phys. A102, 443, 1967.
7. B. Dalhsuren, G. N. Flerov, Yu. P. Gangrsky, Yu. A. Lasarev, B. N. Markov, Nguyen Cong Khanh, Nucl. Phys. A148, 492, 1970.
8. I. Boca, N. Martalogu, M. Sezon, I. Vilcov, N. Vilcov, G. N. Flerov, A. A. Pleve, S. M. Polikanov, S. P. Tretyakova, Nucl. Phys. A134, 541, 1969.
9. A. J. Elwyn, A. T. G. Ferguson, Nucl. Phys. A148, 337, 1970.
10. Ю. П. Гангровский, К. А. Гаврилов, Б. Н. Марков, Нгуен Конг Кхань, С. М. Поликанов, Яд. Физ. 10, 65, 1969.

11. G. N. Flerov, A. A. Pleve, S. M. Polikanov, S. P. Tretyakova, N. Martalogu, D. Poenaru, M. Sezon, I. Vilcov, N. Vilcov, Nucl. Phys. A97, 444, 1967.
12. S. Bjørnholm, I. Borggreen, L. Westgaard, V. A. Karnaukhov, Nucl. Phys. A95, 513, 1967.
13. R. Vandenbosch, K. L. Wolf, Second IAEA Symp. on Physics and Chemistry of Fission, Vienna, 1969, p. 439.
14. V. Metag, R. Repnow, P. von Brentano, J. D. Fox, Second IAEA Symp. on Physics and Chemistry of Fission, Vienna, 1969, p. 449.
15. S. C. Burnett, H. C. Britt, B. H. Erkkila, W. E. Stein, Phys. Letters 31B, 523, 1970.
16. P. A. Russo, R. Vandenbosch, M. Mehta, J. R. Tesmer, K. L. Wolf, Preprint, 1970.
17. Ю. П. Гангский, Б. Н. Марков, Ю. М. Ципенюк, Яд. Физ. 11, 54, 1970.
18. Yu. P. Gangrsky, B. N. Markov, Yu. M. Tsipenyuk, Phys. Letters 32B, 182, 1970.
19. С. Бьёрнхольм, И. Борггрен, Ю. П. Гангский, Г. Слеммиен, Яд. Физ. 8, 459, 1968.
20. R. Repnow, V. Metag, J. D. Fox, P. von Bretano, Nucl. Phys. A147, 183, 1970.
21. K. L. Wolf, R. Vandenbosch, P. A. Russo, M. K. Mehta, C. R. Rudy, Phys. Rev. C1, 2096, 1970.
22. R. B. Leachman, B. H. Erkkila, Bull. Am. Phys. Soc. 10, 1204, 1965.
23. Г. Н. Флеров, Ю. П. Гангский, Б. Н. Марков, С. М. Поликанов, Х. Юнгклауссен, Яд. Физ. 6, 17, 1967.
24. M. Urin, D. Zaretski, Proc. Congress Int. de Physique Nucleaire 11, 382a, 1964.
25. M. Urin, D. Zaretski, Nucl. Phys. 75, 101, 1966.
26. А. Л. Малов, С. М. Поликанов, В. Г. Соловьев, Препринт ОИЯИ, Е-2555, Дубна, 1965.
27. В. П. Перельгин, Диссертация ОИЯИ, Дубна, 1965.
28. Г. Н. Флеров, В. А. Друин, Препринт ОИЯИ, Р-2539, Дубна, 1966.
29. V. M. Strutinsky, Nucl. Phys. A95, 420, 1967.
30. Х. Юнгклауссен, Яд. Физ. 6, 83, 1968.
31. A. Fubini, J. Blons, A. Michaudon, D. Paya, Phys. Rev. Letters 20, 1373, 1968.
32. E. Migneco, J. P. Theobald, Nucl. Phys. A112, 603, 1968.
33. А. В. Изнатов, Н. С. Работнов, Г. Н. Смиренин, А. С. Солдатов, Ю. М. Ципенюк, ЖЭТФ 61, 1284, 1971.
34. L. Nagy, T. Nagy, I. Vinnay, KFKI Közl. 17, 165, 1969.
35. Ю. П. Гангский, Т. Надь, И. Виннаи, И. Ковач, Ат. Эн. 31, 156, 1971; Препринт ОИЯИ, Дубна, Р3-5528, 1970.
36. Ю. П. Гангский, Б. Далхсурен, Б. Н. Марков, Т. Надь, А. Лайтаи, И. Виннаи, Л. Йеки, Д. Клуге, Препринт ОИЯИ, Дубна Р15-6147, 1971.
37. Т. Надь, А. Г. Белов, Ю. П. Гангский, Б. Н. Марков, И. В. Сизов, И. Ф. Харисов, Acta Phys. Hungaricae 30, 293, 1971; Препринт ОИЯИ, Дубна, Р7-5162, 1970; Доклад на XXI Ежегодном Совещании по Ядерной Спектроскопии и Структуре Атомного Ядра, Москва, 1971.
38. Ю. П. Гангский, Б. Н. Марков, Т. Надь, И. Ф. Харисов, Доклад на Всесоюзном Совещании по нейтронной физике, Киев, 1971.
39. G. T. Seaborg, Phys. Rev. 88, 1429, 1952.
40. S. Frankel, N. Metropolis, Phys. Rev. 72, 914, 1947.
41. J. R. Nix, G. E. Walker, Preprint LA-DC-10, 144, 1969.
42. Дж. А. Уилер, в сб. „Успехи физики деления ядер“, Атомиздат, Москва, 1965.
43. D. L. Hill, J. A. Wheeler, Phys. Rev. 89, 1102, 1953.
44. A. Bohr, Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy 2, 151, 1955.
45. N. Bohr, J. A. Wheeler, Phys. Rev. 56, 426, 1939.
46. J. A. Wheeler, PUAE 2, 155, P/593, 1956.
47. M. Lindner, A. Turkevich, Phys. Rev. 119, 1632, 1960.
48. В. П. Шамов, Докл. АН СССР 103, 543, 1955.
49. R. Vandenbosch, J. R. Huizenga, Paper P/688, Proc. Intern. Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, 2-nd Conf., Geneva, 1958.
50. V. F. Apalin, Yu. N. Grizjuk, I. E. Kritikov, V. I. Lebedev, L. A. Mikaeljan, Physics and Chemistry in Fission, Vienna, 1, 590, 1965.
51. S. Bjørnholm, V. M. Strutinsky, Nucl. Phys. A136, 1, 1969.
52. V. M. Strutinsky, H. C. Pauli, Second IAEA Symp. on Physics and Chemistry of Fission, Vienna, p. 155, 1969.
53. E. Lynn, Int. Symp. on Nuclear Structure, IAEA, Vienna, p. 463, 1968.
54. H. Weigmann, Zeitschrift für Physik 214, 7, 1968.
55. D. Paya, I. Blons, A. Fubini, A. Michaudon, Int. Symp. on Nuclear Structure, IAEA, Vienna, p. 483, 1968.

56. R. W. Lamphere, Physics and Chemistry of Fission, Vol. 1, IAEA, Vienna, p. 63, 1965.
57. S. G. Nilsson, Nucl. Phys. A131, 1, 1969.
58. V. V. Pashkevich, Int. Symp. on Nuclear Structure, IAEA, Vienna, 1968.
59. Ю. А. Музычка, В. В. Пашкевич, В. М. Струтинский, Препринт ОИЯИ, Дубна, Р7-3733, 1967.
60. S. Jägar, Nucl. Phys. A137, 241, 1969.
61. T. Nagy, L. Nagy, I. Pavlicsek, KFKI Közl. 12, 439, 1964.
62. Л. Надь, Т. Надь, И. Виннаи, Яд. Физ. 8, 443, 1968.
63. T. Nagy, L. Nagy, S. Dési, Nucl. Instr. and Methods 8, 327, 1960.
64. В. Ф. Герасимов, ПТЭ, №6, 78, 1966.
65. C. D. Bowman, R. W. Hill, Nucl. Instr. and Methods 24, 213, 1963.
66. Ю. П. Гангрский, Б. Далхсунен, Ю. А. Лазарев, Б. Н. Марков, Нгуен Конг Кхань, ПТЭ, № 2, 63, 1970.
67. Ю. П. Гангрский, Б. Н. Марков, С. М. Поликанов, Х. Юнгклауссен, Письма в ЖЭТФ IV, 429, 1966.
68. Г. Н. Флеров, Ю. П. Гангрский, Б. Н. Марков, Нгуен Конг Кхань, Д. Д. Пулатов, Н. Х. Шадиева, Препринт ОИЯИ, Дубна, Р7-5018, 1970.
69. Ю. П. Гангрский, Б. Н. Марков, С. М. Поликанов, И. Ф. Харисов, Х. Юнгклауссен, Изв. АН СССР 32, 1644, 1968.
70. А. Г. Белов, Ю. П. Гангрский, Б. Далхсунен, А. М. Кучер, Яд. Физ. 14, 685, 1971.
71. Э. Ф. Фомушкин, Е. К. Гутникова, Яд. Физ. 10, 917, 1969.
72. D. K. Butler, R. K. Sjoblom, Phys. Rev. 124, 1129, 1961.
73. А. Г. Довбенко, В. И. Иванов, В. Е. Колесов, В. А. Толстиков, Бюллетень Центра по Ядерным Данным 6, 42, 1969.
74. Н. И. Иванова, А. Н. Кобзев, Н. Г. Крылов, А. А. Лбов, Н. П. Мартынов, А. Е. Триканов, А. И. Шеламков, Ат. Эн. 30, 369, 1971.
75. D. T. Hughes, R. B. Schwartz, Neutron Cross Sections, BNL, 325, 1958.
76. H. A. Bethe, Rev. Mod. Phys. 9, 69, 1937.
77. А. М. Балдин, С. Ф. Семенко, Б. А. Тулунов, Яд. Физ. 8, 326, 1968.
78. R. H. Siemssen, M. Cosack, R. Felst, Nucl. Phys. 69, 209, 1965.
79. J. Lindhard, M. Scharff, H. E. Schiott, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 33, № 14, 1963.
80. R. Vandenbosch, T. D. Thomas, S. E. Vandenbosch, R. A. Glass, G. T. Seaborg, Phys. Rev. 111, 1358, 1958.
81. J. D. Jackson, Can. J. Phys. 34, 767, 1956.
82. Э. Хауд, И. Перлман, Г. Сиборг, Ядерные свойства тяжелых элементов, вып. 5, Деление ядер, стр. 215, Москва, Атомиздат, 1969.
83. Y. Fujimoto, Y. Yamaguchi, Prog. Theor. Phys. 5, 76, 1950.
84. H. C. Britt, S. C. Burnett, B. H. Erkkila, J. E. Lynn, W. E. Stein, Phys. Rev. C4, 1444, 1971.

A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

RELATIVISZTIKUS HULLÁMEGYENLETEK CSOPORTELMÉLETI TÁRGYALÁSA*

VALENTINE BARGMANN és WIGNER JENŐ

Bevezetés¹

Valamely kvantummechanikai rendszer lehetséges állapotait leíró ψ hullámfüggvények egy V lineáris vektorteret alkotnak, mely általában végtelendimenziós és amelyen értelmezve van egy (φ, ψ) pozitív definit belső szorzat, tetszőleges φ, ψ hullámfüggvények mellett (a hullámfüggvények tehát Hilbert-teret alkotnak). A belső szorzat képzése rendszerint azt jelenti, hogy az egész konfigurációs vagy impulzus-térre integrálunk, zérusnál nagyobb spinű részecskék esetében azonkívül összegezni kell a spin-indexekre.

Ha a szóban forgó hullámfüggvények szabad részecskére vonatkoznak és relativisztikus hullámeqyenleteknek tesznek eleget, azon hullámfüggvények között, amelyek ugyanazt az állapotot írják le különböző Lorentz-rendszerekben, megfelelés áll fenn. Az itt szereplő transzformációk az összes *inhomogén* Lorentz-transzformáció csoportját alkotják (beleértve a tér és az idő kezdőpontjának eltolásait). Legyen ψ_I és ψ_L ugyanannak az állapotnak a hullámfüggvénye az I' , ill. L Lorentz-rendszerben. Ekkor $\psi_{I'} = U(L)\psi_L$, ahol $U(L)$ lineáris unitér operátor, mely az L -et L' -vel összekötő L Lorentz-transzformációtól függ. Alkalmas normálást választva, $U(L)$ egy ± 1 tényező erejéig meghatározza. [Ami a részleteket illeti, a² lábjegyzetben idézett dolgozatra utalunk; erre a következőkben az (L) megjelöléssel hivatkozunk.] Azonfelül az U operátorok az inhomogén Lorentz-csoport egy- vagy kétértékű ábrázolását képezik, vagyis az L_1, L_2 Lorentz-transzformációkat egymás után alkalmazva kapjuk:

$$U(L_2 L_1) = \pm U(L_2) U(L_1). \quad (1)$$

Minthogy rendszerünk leírása szempontjából valamennyi Lorentz-féle vonatkoztatási rendszer ekvivalens, ebből következik, hogy ψ -vel együtt $U(L)\psi$ ugyancsak lehetséges állapot az eredeti L Lorentz-rendszerből tekintve. A V vektortér eszerint minden egyes ψ -vel együtt tartalmazza annak összes $U(L)\psi$ transzformáltját, ahol L tetszőleges Lorentz-transzformáció.

Az U operátorok a rendszer hullámeqyenletét is helyettesíthetik. Tárgyalásunkban a „Heisenberg”-képbeli hullámfüggvényeket használjuk, úgyhogy az adott ψ a rendszert minden időben reprezentálja, azonfelül adott L Lorentz-rendszerben, a 0 időpontban „Schrödinger”-hullámfüggvénynek választható. A t_0 időbeli

* Megjelent: Proceedings of the National Academy of Sciences **34**, 211—223, 1948.

¹ A szerzők ezen dolgozat minden lényeges eredményét egymástól függetlenül kapták meg. Úgy döntöttek azonban, hogy eredményeiket együtt publikálják.

² Wigner, E. P., *Ann. Math.*, **40**, 149—204 (1939).

ψ_{t_0} Schrödinger-függvény meghatározása céljából abba az I' rendszerbe kell transzformálnunk, amelyre nézve $t' = t - t_0$, míg az összes többi koordináta változatlan marad. Ekkor $\psi_{t_0} = U(L)\psi$, ahol az L transzformáció I -ből I' -be transzformál.

A Lorentz-csoport összes unitér ábrázolásának [azaz (1) valamennyi megoldásának] osztályozása ennél fogva az összes lehetséges relativisztikus hullámegyenlet osztályozását jelenti. Ilyen osztályozás található az (L) dolgozatban. Az $U(L)$ és $\tilde{U}(L) = VU(L)V^{-1}$ ábrázolások, ahol V rögzített unitér operátor, ekvivalensek. Ha a rendszer leírható a ψ hullámfüggvényekkel, a

$$\tilde{\psi}_I = V\psi_I \quad (2)$$

hullámfüggvények segítségével való leírás az előbbivel izomorf, ami két hullámfüggvény lineáris szuperpozíciójának és skaláris szorzatának képzését, valamint az egyik Lorentz-rendszerből a másikba való áttérést illeti. Valóban, ha $\psi_I = U(L)\psi$, akkor $\tilde{\psi}_I = V\psi_I = \tilde{U}(L)\tilde{\psi}_I$. Így tehát ekvivalens hullámegyenletek osztályait kapjuk. Végül elegendő, ha az irreducibilis ábrázolásokat határozzuk meg, minthogy azokból az összes többi felépíthető.

Két leírás, melyek (2) szerint ekvivalensek, látszatra teljesen különböző lehet. A legjobban ismert példa az elektromágneses tér leírása a térerősségek, ill. a négyes vektorpotenciál segítségével. Az sem állítható, hogyha fennáll az ekvivalencia (2) szerint, ez minden fizikai vonatkozásra kiterjedő ekvivalenciát von maga után. Így két ekvivalens leírás egészen különböző kifejezéseket szolgáltathat a konfigurációs térbeli töltéssűrűség vagy energiasűrűség számára (vö. Fierz³), minthogy (2) a hullámfüggvényeknek csupán globális, nem pedig lokális ekvivalenciáját vonja maga után. Hangsúlyoznunk kell azonban, hogyha az ekvivalens rendszerek közül valamilyen módon kiválasztunk egyet, vagy nem-ekvivalens rendszerek valamilyen speciális szuperpozícióját képezzük, ez a lehetséges kölcsönhatásokra, a sűrűségek pozitív voltára stb. vonatkozóan explicit vagy implicit feltevést jelent. Analízisünk szükségképpen szabad részecskékre korlátozódik s a lehetséges kölcsönhatásokat illetően semmilyen kijelentésre nem vezet.

A jelen tárgyalásnak nem képezi alapját semmilyen, a hullámegyenletek szerkezetére vonatkozó feltevés, kivéve azt, hogy Lorentz-invariánsoknak kell lenniök. Speciálisan szükségtelen feltételeznünk a konfigurációs térbeli differenciálegyenleteket. Az (L) dolgozatban elvégzett analízisnek azonban az az eredménye, hogy minden irreducibilis hullámegyenlet ekvivalens [a (2)-nek megfelelő értelemben] egy differenciálegyenlet-rendszerrel. A jelen dolgozat nézőpontjának témánk más tárgyalásaihoz való viszonyát illetően lásd a ¹¹ lábjegyzetben idézett munkát.

A jelen cikkben az (L) munka minden egyes ábrázolásához megadunk egy-egy differenciálegyenletet, melynek megoldásai a szóban forgó ábrázolás szerint transzformálódnak. Meglehetősen részletességgel tárgyaljuk azonkívül az infinitezimális operátorokat, melyek az (L)-ben meghatározott irreducibilis ábrázolásokat generálják; ezeket az ábrázolásokat — s így a kovariáns differenciálegyenleteket is — bizonyos, az infinitezimális operátorokból szerkesztett invariánsok segítségével fogjuk jellemezni. Ez azért érdekes, mert az infinitezimális operátorok szoros kapcsolatban állnak a rendszer dinamikai változóival. L. Gårding⁴ nemrég megmutatta,

³ Fierz, M., *Helv. Phys. Acta*, **XII**, 3—37 (1939).

⁴ Gårding, L., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **33**, 331—332 (1947).

hogy végtelen dimenziós esetben is meglehetősen szabadon dolgozhatunk infinitezimális transzformációkkal. Tárgyalásából speciálisan azonnal következik (bár cikke az állítást explicite nem tartalmazza), hogy a jól ismert felcserélési szabályok érvényesek maradnak.

1. A Lorentz-csoport infinitezimális operátorai

A metrikus tenzorról feltesszük, hogy következő alakú: $g_{44}=1, g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1, g_{kl}=0$ ($k \neq l$) és $g^{kl}=g_{kl}$. Az a, b négyesvektorok skalárszorzatát az $\{a, b\} = a^k b_k$ módon fogjuk jelölni. Mind a c fénysebességet, mind pedig \hbar -t, a 2π -vel osztott Planck-állandót 1-gyel tesszük egyenlővé.

A p_k és M_{kl} infinitezimális operátorok. Az x^k -irányú translációt p_k generálja, az $(x^k - x^l)$ síkbeli elforgatást pedig $M_{kl} = -M_{lk}$ ($k, l=1, \dots, 4$). Ezek az operátorok hermitikusak, és a véges Lorentz-transzformációt reprezentáló U unitér operátorok ezekből exponenciálisan képezve kaphatók; így $U = \exp(-i\alpha p_k)$ az x_k -irányú, α nagyságú eltolásnak felel meg. A p_k -k nyilvánvalóan a rendszer négyesimpulzusát adják meg; M_{23}, M_{31}, M_{12} pedig a teljes impulzusmomentum három komponense. Fennállnak a következő felcserélési szabályok ($[A, B] = AB - BA$):

$$[M_{kl}, M_{mn}] = i(g_{lm}M_{kn} - g_{km}M_{ln} + g_{kn}M_{lm} - g_{ln}M_{km}), \quad (3a)$$

$$[p_k, p_l] = 0, \quad [M_{kl}, p_m] = i(g_{lm}p_k - g_{km}p_l). \quad (3b)$$

Definiáljuk most a következő négy operátort:

$$(w^1, w^2, w^3, w^4) = (v_{234}, v_{314}, v_{124}, v_{321}), \quad (4a)$$

$$v_{klm} = p_k M_{lm} + p_l M_{mk} + p_m M_{kl} = M_{lm}p_k + M_{mk}p_l + M_{kl}p_m. \quad (4b)$$

Megjegyezzük, hogy w_k „pszeudovektor”, azaz csak az 1 determinánsú Lorentz-transzformációk esetében viselkedik vektorként. A (3) szabályok folytán fennáll:

$$[M_{kl}, w_m] = i(g_{lm}w_k - g_{km}w_l), \quad [p_k, w_l] = 0. \quad (5)$$

A (3) és (5) egyenletekből következik, hogy a

$$P = p^k p_k; \quad W = \left(\frac{1}{6}\right) v^{klm} v_{klm} = -w^k w_k \quad (6)$$

operátorok az M_{kl}, p_k infinitezimális operátorok mindegyikével felcserélhetők. Ennélfogva értékük a Lorentz-csoport minden egyes irreducibilis ábrázolása esetében konstans (vagyis: az egységoperátornak többszörösei). A jól ismert érvelést, melynek segítségével ezt a véges dimenziós ábrázolások esetében megállapítják, át lehet vinni a végtelen dimenziós esetre. (Vö. V. Bargmann, az ⁵ lábjegyzetben idézett munka, 602. old.)

⁵ Gelfand, L., és Neumark, M., *J. Phys. (USSR)* X, 93—94 (1946); Harish-Chandra, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A, 189, 372—401 (1947); és Bargmann, V., *Ann. Math.*, 48, 568—640 (1947) meghatározták a homogén Lorentz-csoport ábrázolásait. Ezek egyszersmind az inhomogén Lorentz-csoportnak is ábrázolásai. A kvantummechanikai értelmezésben azonban a megfelelő részecskék valamennyi állapota eltolásinvariáns és — speciálisan — független az időtől. Igen kevésbé valószínű, hogy ezeknek az ábrázolásoknak közvetlen fizikai jelentésük legyen. Azonkívül a harmadik dolgozatban megtalálható azon ábrázolások meghatározása, amelyeknek impulzusvektorai térszerűek. Ezekkel nem foglalkozunk a jelen dolgozatban, mivel valószínű, hogy ezeknek sem adható egyszerű fizikai értelmezés.

A W operátor a

$$W = \frac{1}{2} M_{kl} M^{kl} p_m p^m - M_{km} M^{lm} p^k p_l \quad (7)$$

alakban is felírható. (Ezt a mennyiséget először W. Pauli vezette be; vö. Lubánski.⁶) A $w^k p_k$ skalárszorzat eltűnik.

2. Az (L) munka eredményeinek összefoglalása

a) Egy-egy irreducibilis ábrázolás esetében a ψ állapotok mint a p impulzusvektor és egy véges vagy végtelen értékű ξ segédváltozó $\psi(p, \xi)$ függvényei fejezhetők ki. A p impulzusok vagy mind zérusok, vagy a $p^k p_k = P$ sokaságon változnak, ahol P konstans érték. Mi a $p \neq 0$, $P > 0$ vagy $P = 0$ esetekre szorítkozunk, mivel kevésbé valószínű, hogy a fennmaradó eseteknek közvetlen fizikai jelentése volna.⁵

b) Minden egyes $y^k = \lambda_l^k x^l + a^k$ (vektoralakban: $y = Ax + a$) inhomogén Lorentz-transzformációnak megfelel egy-egy $U(L)$ unitér operátor, melyet

$$U(L)\psi(p, \xi) = e^{-i(a, p)} Q(p, A)\psi(A^{-1}p, \xi) \quad (8)$$

definiál; itt $Q(p, A)$ unitér operátor, mely függhet p -től, de csak a ξ változóra hat. A (φ, ψ) belső szorzatot a $p^k p_k = P$ sokaságra való integrálással és a ξ változóra való összegezéssel vagy integrálással kapjuk.

c) A homogén Lorentz-transzformációk azon alcsoportját, amely változatlanul hagy egy p_0 rögzített impulzusvektort, „kis csoport”-nak nevezzük. (A különböző p_0 vektorok által definiált kis csoportok izomorfak.) A $Q(p_0, A)$ unitér operátorok (ahol $Ap_0 = p_0$) a kis csoport irreducibilis ábrázolását képezik s meghatározzák az inhomogén Lorentz-csoport $U(L)$ irreducibilis ábrázolását.

Az M_{kl} operátorok minden esetben az $M_{kl} + S_{kl}$ alakúak, ahol

$$M_{kl} = i \left(p_k \frac{\partial}{\partial p^l} - p_l \frac{\partial}{\partial p^k} \right) = i (p_k g_{lj} - p_l g_{kj}) \frac{\partial}{\partial p_j} \quad (9)$$

a p változókra hat és a pályaimpulzusmomentumnak felel meg, S_{kl} pedig a ξ változókra hat és a spinmomentumnak felel meg. Mind M_{kl} , mind pedig S_{kl} a (3a) felcserélési szabályokat elégíti ki. Minthogy M_{kl} nem ad hozzájárulást v_{klm} -hez [vö. (4b)], fennáll:

$$v_{klm} = p_k S_{lm} + p_l S_{mk} + p_m S_{kl}, \quad [S_{kl}, p_m] = 0; \quad (10)$$

vagy ha bevezetjük az $\vec{S}, \vec{S}', \vec{p}, \vec{w}$ háromdimenziós vektoroperátorokat:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= (S_{23}, S_{31}, S_{12}), \quad \vec{S}' = (S_{14}, S_{24}, S_{34}), \quad \vec{p} = (p^1, p^2, p^3), \\ \vec{w} &= (w^1, w^2, w^3), \quad w^4 = \vec{p} \cdot \vec{S}; \quad \vec{w} = p^4 \vec{S} - (\vec{p} \times \vec{S}). \end{aligned} \quad (10a)$$

Nyilvánvaló, hogy M_{kl} -et a W operátor (7) kifejezésében is helyettesíthetjük S_{kl} -l.

Rögzített p_0 impulzusvektor mellett a w_k operátorok a kis csoportnak az in-finitezimális operátorai. Minthogy $w^k p_k = 0$, közülük csupán három lineárisan független.

⁶ Lubánski, J. K., *Physica*, IX, 310—324 (1942).

3. Az irreducibilis ábrázolások osztályozása

Most rátérünk a fő eredmények rövid összefoglalására, beleértve az ábrázolásoknak a p és w operátorok segítségével való jellemzését. A részletesebb tárgyalást a következő szakaszokban adjuk meg.

Az (L) dolgozatban (7., 8. §§) talált osztályok a következők:

I. P_s . Véges tömegű, s spinű részecskék

Itt $P = m^2 > 0$. A részecske nyugalmi rendszerében az impulzusvektor egyetlen el nem tűnő komponense $p^4 = \pm m$, így tehát (10a) folytán $W = m^2 S^2$. A $P^{-1}W$ operátor a spinmomentum négyzetét adja meg, és értéke adott irreducibilis ábrázolás esetében $s(s+1)$ ($s=0, \frac{1}{2}, 1, \dots$). Adott impulzusvektorhoz $2s+1$ független állapot tartozik. Az $U(L)$ ábrázolás egy- vagy kétértékű attól függően, hogy s egész vagy feles. A legkisebb s értékek ($s=0, \frac{1}{2}, 1$) rendre a Klein—Gordon-, a Dirac-, ill. a Proca-egyenletnek felelnek meg.

II. 0_s . Zérus nyugalmi tömegű, diszkrét spinű részecskék

Ezeket az ábrázolásokat tekinthetjük a P_s ábrázolások határeseteknek, ha $m \rightarrow 0$. Ekkor mind P , mind W zérussal egyenlő, és nem elégségesek ahhoz, hogy ezeket az ábrázolásokat jellemezzék. Adott impulzusvektor mellett két független állapot létezik, ha $s \neq 0$ (a két különböző polarizációs állapotnak megfelelően), és ha $s=0$, csak egy állapot van. A jobbra és balra cirkulárisan poláros állapotokat a $w_k = sp_k$, ill. a $w_k = -sp_k$ operátoregyenlet írja le, úgyhogy a 0_s ábrázolást $P=0$, $w_k w_l = s^2 p_k p_l$ jellemzi. A legkisebb s értékek ($s=0, \frac{1}{2}, 1$) rendre a skaláris hullám-egyenletnek, a neutrínó-egyenletnek, ill. a Maxwell-egyenleteknek felelnek meg.

III. $0(\Xi)$ és $0'(\Xi)$. Zérus nyugalmi tömegű és folytonos spinű részecskék

Itt $P=0$, $W=\Xi^2$, ahol Ξ pozitív valós szám. Adott impulzusvektor mellett végtelen sok különböző polarizációs állapot létezik, melyek egy folytonos változó segítségével írhatók le. Az $0(\Xi)$ ábrázolás egyértékű, míg $0'(\Xi)$ kétértékű.

Ezen ábrázolások explicit megszerkesztése céljából mindegyik esetben kiválasztunk egyet a hullámegyenletek ekvivalens rendszerei közül, definiálunk egy (φ, ψ) Lorentz-invariáns belső szorzatot, és bebizonyítjuk a fent megadott operátor-összefüggéseket. Az impulzustérben fogunk dolgozni; ez különösen egyszerű, mivel az impulzusokat — ellentétben a koordinátákkal — a Lorentz-csoport meghatározza; azok az infinitesimális eltolások.

4. A P_s osztály

a) $s=0$. Itt a ξ változó csupán egy értéket vesz fel és így elhagyható. Következésképpen $Q(p, A)=1$ (vö. a ⁸ lábjegyzetben idézett dolgozattal), és a kis csoport

⁸ A relativisztikus hullámegyenleteket tárgyaló irodalom igen kiterjedt. A ¹¹ dolgozatban idézett cikkek mellett csupán de Broglie, L. *Théorie générale des particules à spin* (Paris, 1943) című könyvét említjük meg, és a következő dolgozatokat, amelyek a téma rendszeres tárgyalását adják: Pauli, W., *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 203—232 (1941); Bhabha, H. J., *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 203—209 (1945); Kramers, H. A., Belinfante, F. J. és Lubánski, J. K., *Physica*, VIII, 597—627 (1941). Ebben a dolgozatban a szerzők (14)-nek v valamennyi értékére képezett összegét posztulálják; ekkor (14a)-t mint független egyenletet kell megkövetelnünk (az $N=1$ eset kivételével). A ¹¹ dolgozat ezen egyenleteket a Kramers, Belinfante és Lubánski által megadott alakban használja.

számára a triviális egydimenziós ábrázolást kapjuk. Így tehát $S_{kl}=0$ és $w_k=0$. A hullámenyenlet egyszerűen $p^k p_k = m^2$; a (φ, ψ) belső szorzatot a hullámfüggvény (ψ, ψ) normája segítségével definiáljuk:

$$(\psi, \psi) = \int |\psi(p)|^2 d\Omega, \quad \text{ahol} \quad d\Omega = |p_4|^{-1} dp^1 dp^2 dp^3; \quad (11)$$

az integrált a $p^k p_k = P = m^2$ hiperboloid mindkét köpenyére kell kiterjeszteni. A (11) kifejezés Lorentz-invariáns, minthogy $d\Omega$ invariáns térfogatelem az impulzustérben. A konfigurációs térbeli hullámfüggvény

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{-i\{p, x\}} \psi(p) d\Omega, \quad (12)$$

ahol x rövid jelölésként x^1, x^2, x^3, x^4 helyett áll. Jól ismert, hogy (ψ, ψ) -t nem lehet egyszerűen kifejezni a konfigurációs térben, mivel a Klein—Gordon-egyenlet esetében a sűrűség indefinit, és a konfigurációs térbeli sűrűség integrálja csak akkor egyezik meg (11)-gyel, ha $p_4 < 0$ esetén $\psi(p) = 0$.

b) $s = \frac{1}{2}N$, ahol $N=1, 2, 3, \dots$. A magasabb spinű részecskék esetében az először Dirac⁷ által levezetett egyenleteket használjuk, lényegében a 8. dolgozatban megadott alakban. A ξ változó szerepében N négyértékű változót fogunk használni; ezen ξ_1, \dots, ξ_N változókból a $\psi(p; \xi_1, \dots, \xi_N)$ hullámfüggvény szimmetrikus. Defináljuk a ξ_v változók mindegyike esetében a γ_v^k négydimenziós mátrixokat, melyek a Dirac-féle elektronelméletben használatos mátrixokhoz hasonló tulajdonságúak:

$$\gamma_v^k \gamma_v^l + \gamma_v^l \gamma_v^k = 2g^{kl} 1 \quad (k, l=1, 2, 3, 4). \quad (13)$$

A különböző v alsó indexekkel ellátott γ -k kommutálnak. A $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ mátrixok antihermitikusak, γ^4 hermitikus. A hullámenyenletek ekkor a következő alakúak:

$$\gamma_v^k p_k \psi = m \psi \quad (v=1, 2, \dots, N). \quad (14)$$

Ezen egyenletek bármelyikéből jól ismert módon következtethetünk

$$g^{kl} p_k p_l \psi = p^k p_k \psi = m^2 \psi \quad (14a)$$

fennállására. Az eltolás infinitezimális operátorai a p -k, a négydimenziós elforgatásokéi pedig az $M_{kl} = M_{kl} + S_{kl}$ operátorok, ahol M_{kl} -et (9) adja meg, és

$$S_{kl} = \frac{1}{2} i \sum_v \gamma_{vk} \gamma_{vl} \quad (k \neq l); \quad (15)$$

a

$$\gamma_{vk} = g_{kl} \gamma_v^l \quad (15a)$$

mátrixokra ugyanazon (13) relációk teljesülnek, mint a γ_v^k -kra.

Az invariáns skalárszorzat:

$$(\psi, \psi) = \int \left| \sum_{\xi} \psi^* \gamma_1^4 \gamma_2^4 \dots \gamma_N^4 \psi \right| d\Omega. \quad (16)$$

Valóban, (16) invariáns mind az M_0 , mind az S operátorokkal szemben. Az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy

$$((1 + i\varepsilon S_{kl})\psi, (1 + i\varepsilon S_{kl})\psi) = (\psi, \psi)$$

⁷ Dirac, P. A. M., *Proc. Roy. Soc., A*, **155**, 447—459 (1936).

fennáll, az ε^2 nagyságrendű tagokig terjedő pontossággal. Ez a képlet a következő észrevétel alapján igazolható: ha k és l mindketten térszerűek, S_{kl} hermitikus és a γ^4 mátrixok szorzatával felcserélhető. Ha a k vagy az l index értéke 4, S_{kl} antihermitikus, a γ^4 mátrixok szorzatával pedig antikommutál. Ennek alapján következik, hogy (16) invariáns a valódi Lorentz-transzformációkkal szemben. Meg lehet mutatni azt is, hogy (16) a tükrözésekkel stb. szemben is invariáns.

Az abszolút érték jelére (16)-ban szükség van ahhoz, hogy ez a kifejezés pozitív definit legyen. A (16) kifejezésnek most új alakot adunk, felhasználva a

$$(p_4)^v \gamma_v^4 \dots \gamma_2^4 \gamma_1^4 = m^v \psi + A_v \psi \quad (17)$$

azonosságokat; itt A_v antihermitikus mátrix, mely a γ^k -k közül csak az első v számút tartalmazza (azonkívül a p -ket). A (17) összefüggést a legcélszerűbben indukcióval igazolhatjuk: $p_4 \gamma_{v+1}^4$ -et (17)-re alkalmazva, (14) segítségével kapjuk:

$$\begin{aligned} (p_4)^{v+1} \gamma_{v+1}^4 \gamma_v^4 \dots \gamma_2^4 \gamma_1^4 \psi &= m^v p_4 \gamma_{v+1}^4 \psi + p_4 \gamma_{v+1}^4 A_v \psi = \\ &= m^{v+1} \psi + (-m^v p_k \gamma_{v+1}^k + p_4 \gamma_{v+1}^4 A_v) \psi \quad (k=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (17a)$$

A legutolsó zárójelben álló kifejezés egyenlő A_{v+1} -gyel, antihermitikus és a γ -k közül az első $v+1$ számút tartalmazza, úgyhogy (17) fennállását indukció segítségével igazoltuk. Helyettesítsünk a (17) képletbe $v=N$ -et; ψ -vel szorozva és a ζ -kra összegezve kapjuk:

$$p_4^N \sum_{\zeta} \psi^* \gamma_1^4 \gamma_2^4 \dots \gamma_N^4 \psi = m^N \sum_{\zeta} |\psi|^2 + \sum_{\zeta} \psi^* A_N \psi. \quad (17b)$$

Mivel A_N antihermitikus, az utolsó tag imaginárius. Minthogy (17b) másik két tagja valós, meg kell egyezniök egymással. Ennek folytán (16) így is írható:

$$(\psi, \psi) = \int |m/p_4|^N \sum_{\zeta} |\psi|^2 d\Omega. \quad (18)$$

A (18) képlet lehetővé teszi, hogy a skalárszorzatot más alakban,

$$(\psi, \psi) = \int |p_4|^{-N-1} \sum_{\zeta} |\psi|^2 dp_1 dp_2 dp_3$$

segítségével definiáljuk; ez (18)-tól vagy (16)-tól az m^{-v} pozitív konstansban különbözik. Talán érdemes itt megjegyezni, hogy az abszolút érték jele (16)-ban, és a $d\Omega$ invariáns térfogatelem (11) definíciójában [valamint (18a)-ban] páratlan N esetén elhagyható. Ez lehetővé teszi, hogy (12) segítségével egyszerű pozitív definit skalárszorzatot definiáljunk a koordinátatérben. Ha speciálisan $N=1$, (16) [vagy (18a)] egyenlő $|\psi|^2$ -nek a közönséges térre képezett integráljával. Ha N páros (azaz ha az s spin egész), a koordinátatérben nem definiálható egyszerű pozitív definit skaláris szorzat.

Megmutattuk tehát: (14) megoldásai Lorentz-invariáns rendszert képeznek, melyben definiálható a (16) vagy (18a) pozitív definit skalárszorzat. Most meghatározzuk azt a 2. §-beli ábrázolást, amelyhez a megoldások tartoznak, azonfelül a P és W invariánsokat is kiszámítjuk.

Abból a célból, hogy a kis csoportot definiálhassuk, válasszuk ki a $0, 0, 0, m$ komponensekkel jellemzett p_0 impulzusvektort. A kis csoport ekkor a közönséges tér forgáscsoportja. Ha feltesszük, hogy γ^4 átlós mátrix, melynek főátlójában az 1, 1, 1,

— 1 elemek állnak, úgy a (14) egyenlet azt mutatja, hogy ψ -nek csak azok a komponensei különbözhetnek zérustól, amelyek γ_v első két sorának felelnek meg. Ilyen komponens 2^N van; ψ fennmaradó komponenseinek (ezek száma $4^N - 2^N$) el kell tűnniök. De még ez a 2^N komponens sem mind független: ψ -nek a ζ változóban mutatott szimmetriája folytán ψ mindazon komponensei egyenlők egymással, amelyekben a γ -k első sorának megfelelő ζ indexek száma egyenlő az adott κ -val, a többi $N - \kappa$ index pedig a második sornak felel meg. Minthogy κ minden értéket felvehet 0 és N között, ilyen komponens $N + 1$ van. A $p_4 = -m$ esetben hasonló a gondolatmenet, azzal az eltéréssel, hogy ekkor a γ -k két utolsó sora játssza azt a szerepet, amelyet a $p_4 = m$ esetben az első két sor játszott.

Abból a célból, hogy meghatározzuk ennek az $N + 1 = 2s + 1$ független komponensnek a kis csoport elemeivel szemben mutatott transzformációs tulajdonságait, megjegyezzük, hogy a térszerű M operátorok, ha azokat a tiszta időszerű

$p = p_0$ impulzusvektorral jellemzett ψ -re alkalmazzuk, zérust adnak. Így tehát csak az S_{kl} operátoroknak a ψ -re való hatását kell meghatároznunk. Az $\frac{1}{2}i\gamma_1\gamma_2$ mátrix speciálisan kommutál γ^4 -gyel, de nem azonos vele; feltehetjük tehát, hogy átlós alakú és a főátlójában az $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ elemek állnak. Ilyen $\frac{1}{2}i\gamma_1\gamma_2$ mátrixok összegét alkalmazva ψ azon komponensére, amelyben κ számú ζ_v az első, $N - \kappa$ számú pedig a második sornak felel meg, ez a szóban forgó komponens $\frac{1}{2}\kappa - \frac{1}{2}(N - \kappa) = \kappa - s$ -sel szorozza meg. Míg κ zérustól $N = 2s$ -ig fut, az M_{12} operátor sajátértéke $M_{12}\psi = S_{12}\psi$ folytán a $-s, -s + 1, \dots, s - 1, s$ értékeket futja be. A kis csoport kérdéses ábrázolása ennél fogva a D^s ábrázolás, amint azt posztuláltuk.

A (10a) egyenlet értelmében $W = m^2(S_{23}^2 + S_{31}^2 + S_{12}^2)$, vagy mivel S_{23}, S_{31}, S_{12} a $D^{(s)}$ ábrázolás infinitezimális operátorai, $W = m^2s(s + 1)$ is írható; ezt az eredményt⁹ már a 3. §-ban megadtuk. A (14a) egyenlet értelmében $P = m^2$.

5. Az 0_s osztály

a) $s = 0$. Az előző szakasz (a) pontjában megadott tárgyalás szó szerint alkalmazható erre az esetre, csak m helyére 0-t kell helyettesíteni és a (11) integrál a fénykúpra terjesztendő ki.

b) A hullámegyenleteket oly módon kapjuk meg, hogy (14) alatt m helyére 0-t írunk. Az infinitezimális operátorokat most is (9) és (15) adja meg. A skalárszorzatot (18a) segítségével kell definiálnunk, minthogy (16) minden ψ -re eltűnik. E skaláris szorzat invarianciája következik abból, hogy (18a) invariáns a tömeg véges értéke mellett; a hullámfüggvény ugyanis — a $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ pontot kivéve — folytonos m -ben.

A véges és a zérus tömeg között a lényeges különbség abban áll, hogy az utóbbi esetben nemcsak az infinitezimális operátorok invariánsak a $\Gamma_v = i\gamma_v^1\gamma_v^2\gamma_v^3\gamma_v^4$ operátorok mindegyikével szemben, hanem a hullámegyenlet is. Így tehát ha $m = 0$, a (14) segítségével definiált lineáris sokaság a Γ_v -k meghatározott értékeihez tartozó invariáns sokaságokra bontható fel. A következőkben speciálisan azon sokasággal kívánunk foglalkozni, amelyre (14) mellett fennáll

$$\Gamma_v\psi = \psi \quad (v = 1, 2, \dots, N), \quad (19a)$$

⁹ Ez az egyenlet elegánsabban is lezármaztatható, anélkül, hogy a koordináta-rendszert specializálnánk. A rövidség érdekében mellőzzük ezt a levezetést.

s azon másik sokasággal, amelyre

$$\Gamma_v \psi = -\psi \quad (v=1, 2, \dots, N) \quad (19b)$$

teljesül. Mindkét sokaság invariáns a valódi Lorentz-transzformációkkal szemben; tükrözéskor azonban egymásba mennek át. Fizikailag ez a két sokaság a jobbra, ill. balra cirkulárisan poláros állapotoknak felel meg.¹⁰

Válasszunk ismét egy speciális p_0 impulzusvektort, azért, hogy a kis csoportot definiálhassuk. A p_0 vektor kovariáns komponensei legyenek 0,0,1,1. A (14) hullám-egyenlet ekkor, γ_v^3 -mal való szorzás után, a

$$\gamma_v^3 \gamma_v^4 \psi = \psi \quad (v=1, 2, \dots, N) \quad (20)$$

alakban írható fel. Célszerű feltenni, hogy a $\gamma^3 \gamma^4$ mátrixok átlós alakúak s a fő-átlóban álló elemek: 1, 1, -1, -1. A (20) egyenlet ekkor azt fejezi ki, hogy a szóban forgó p_0 mellett ψ csak akkor különbözik zérustól, ha a ζ -k mindegyike a γ -k első két sorának megfelelő értékeket vesz fel. Minthogy a Γ -k kommutálnak a $\gamma^4 \gamma^3$ mátrixokkal, de nem azonosak velük, feltehetjük róluk, hogy átlós alakúak, a fő-átlóban az 1, -1, 1, -1 elemekkel. Eszerint a (20), (19a) egyenletekkel definiált sokaságban ($p=p_0$ mellett) ψ minden komponense eltűnik, kivéve ha a ζ -k mindegyike a γ -k első sorának megfelelő értéket vesz fel; adott p mellett a (20), (19a) sokaság egydimenziós. Ugyanez vonatkozik a (20), (19b) által definiált sokaságra; annyi a különbség, hogy ebben az esetben $\psi(p_0; \zeta_1, \dots, \zeta_N)$ csak akkor különbözik zérustól, ha valamennyi ζ a γ -k második sorának megfelelő értéket veszi fel. Adott impulzus mellett ψ -nek csak két független komponense van.

A kis csoport infinitezimális operátorai, melyek p_0 -t változtatlanul hagyják, a következők: M_{12} , $M_{13}-M_{14}$, $M_{23}-M_{24}$. A megfelelő M operátorok, ha azokat

a $p=p_0$ -hoz tartozó ψ -re alkalmazzuk, most is zérust adnak eredményül. A fenti operátorok közül a másodiknak megfelelő S [vö. (15), (15a)] az $\frac{1}{2}i(\gamma_v^1 \gamma_v^3 + \gamma_v^1 \gamma_v^4)$ alakú mátrixok összege. Ha ezt a mi ψ -nkre alkalmazzuk, zérust kapunk eredményül; ezt oly módon láthatjuk be, hogy a $\gamma_v^1 \gamma_v^3$ mátrixszal (20)-ra hatunk. Ugyanez vonatkozik az $M_{23}-M_{24}$ operátorra is. Másrésztől, ha $\frac{1}{2}i\gamma_v^1 \gamma_v^2$ -t a (20), (19a) egyenleteket kielégítő ψ -re alkalmazzuk, a kapott eredmény $\frac{1}{2}\psi$, ha pedig a (20), (19b) egyenleteknek tesz eleget ψ , eredményül $-\frac{1}{2}\psi$ -t kapunk. Ezt a legkönnyebben úgy láthatjuk be, hogy $\frac{1}{2}i\gamma_v^1 \gamma_v^2$ -t alkalmazzuk (20)-ra és felhasználjuk (19)-et. Ennek folytán a szóban forgó két sokaság esetében $M_{12}\psi = \pm \frac{1}{2}N\psi = \pm s\psi$; ezek valóban az inhomogén Lorentz-csoport O_s ábrázolásához tartoznak.

A P invariáns értéke zérus. A fentiekben voltaképpen a w -knek a $p=p_0$ -lal jellemzett ψ -re való hatását is meghatároztuk; fennáll: $w^3\psi = M_{12}\psi = \pm s\psi$, $w^1\psi = (M_{42}+M_{23})\psi = 0$, $w^2\psi = (M_{31}+M_{14})\psi = 0$, $-w^4\psi = M_{12}\psi = \pm s\psi$. Ebből következik, hogy a $W = -(w^4)^2 + (w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2$ második invariáns értéke ugyancsak zérus a O_s sokaságok esetében; azokat tehát nem jellemezhetjük P és W segítségével. Jellemezhetők azonban e sokaságok a $P=0$, valamint a

$$w_k = sp_k, \quad \text{ill.} \quad w_k = -sp_k \quad (21)$$

egyenletekkel; a $+$ jel a (19a), a $-$ jel a (19b) feltétel esetében érvényes. Mindkét

¹⁰ de Wet, J. S., *Phys. Rev.*, **58**, 236—242 (1940), különösen a 242. old.

egyenlet invariáns a valódi Lorentz-transzformációkkal szemben. Ha a tükrözéseket is tekintetbe kívánjuk venni, ezt a két egyenletet kombinálva írhatjuk: $w_k w_l = s^2 p_k p_l$.

6. Az $0(\Xi)$ osztály

Itt a ξ segédváltozó térszerű négyesvektor, melynek hossza l , s amely ortogonális p -re. A $\psi(p, \xi)$ skaláris függvényt a

$$g^{kl} p_k p_l \psi = 0, \quad g^{kl} p_k \xi_l \psi = 0, \quad g^{kl} \xi_k \xi_l \psi = -\psi, \quad (22)$$

$$p_k \partial \psi / \partial \xi_k = -i \Xi \psi \quad (22a)$$

egyenletek határozzák meg, ahol Ξ pozitív valós konstans.¹¹ A (22a) egyenlet folyományaképpen tetszőleges valós q szám mellett fennáll:

$$\psi(p, \xi + qp) = e^{-iq\Xi} \psi(p, \xi). \quad (23)$$

A p_k -k az eltolások infinitezimális operátorai, az infinitezimális forgásoperátorokat pedig a (9) alatt megadott M , valamint

$$S_{kl} = i \left(\xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_l} - \xi_l \frac{\partial}{\partial \xi_k} \right) = i (\xi_k g_{lj} - \xi_l g_{kj}) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad (24)$$

összege állítja elő.

Az invariáns skalárszorzat meghatározása céljából minden, a fénykúpon fekvő p vektorhoz bevezetünk két valós, egységnyi hosszúságú térszerű vektort, $u^{(1)}(p)$ -t és $u^{(2)}(p)$ -t, melyek ortogonálisak p -re, valamint egymásra:

$$\{u^{(r)}(p), p\} = 0, \quad \{u^{(r)}(p), u^{(s)}(p)\} = -\delta_{rs} \quad (r, s = 1, 2). \quad (25)$$

Ekkor ξ felírható mint $p, u^{(1)}(p), u^{(2)}(p)$ lineárkombinációja:

$$\xi = \alpha p + \beta_1 u^{(1)}(p) + \beta_2 u^{(2)}(p); \quad (26)$$

itt α és a β -k valósak. A $\{\xi, \xi\} = -1$ feltételből következik, hogy $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$; eszerint $\beta_1 + i\beta_2 = e^{i\tau}$, ahol τ alkalmas valós szög. Így tehát $\psi(p, \xi)$ a p, α, τ változók függvénye:

$$\psi(p, \xi) = \varphi(p, \alpha, \tau). \quad (27)$$

Az $u^{(r)}(p)$ vektorok természetesen többféleképpen választhatók. Legyen $v^{(r)}(p)$ egy másik vektorrendszer, mely eleget tesz (25)-nek. Ezek szintén kifejezhetők a

$$v^{(r)}(p) = \alpha_r p + \sum_s \lambda_{sr} u^{(s)}(p) \quad (r, s = 1, 2)$$

alakban. Tekintettel (25)-re, a λ_{sr} mátrix ortogonális. A $v^{(r)}$ -ekkel kifejezve ξ így írható: $\xi = \alpha' p + \sum_r \beta'_r v^{(r)}(p)$, ahol $\beta'_r = \sum_s \lambda_{sr} \beta_s$. Speciálisan

$$\beta'_1 + i\beta'_2 = e^{i\tau'}, \quad \tau' = \pm(\tau + \lambda); \quad (28)$$

λ a λ_{sr} együttthatóktól függ. A (23) egyenlet folytán $|\varphi(p, \alpha, \tau)| = |\varphi(p, 0, \tau)|$; ψ normáját a

$$(\psi, \psi) = \int |\varphi(p, 0, \tau)|^2 d\Omega d\tau \quad (29)$$

¹¹ Wigner, E. P., *Z. Physik*, **124**, 665—684 (1948).

képlettel definiáljuk. Ez a kifejezés független az $u^{(r)}$ -ek választásától. Valóban, legyen $\varphi(p, \alpha, \tau) = \varphi'(p, \alpha', \tau')$, ahol a vesszős változók egy másik $v^{(r)}$ vektorrendszerre vonatkoznak. Ekkor $|\varphi(p, 0, \tau)| = |\varphi'(p, \alpha', \tau')| = |\varphi(p, 0, \tau')|$, és $|d\tau'/d\tau| = 1$. A (29) integrál Lorentz-invarianciájának igazolása céljából a következőképpen járunk el. Ha valamely homogén Lorentz-transzformáció p -t $\Lambda^{-1}p$ -be ξ -t $\Lambda^{-1}\xi$ -be viszi át, akkor speciálisan az új rendszerbeli $u^{(r)}(p)$ -ket az eredeti $u^{(r)}(p)$ -k transzformáltjainak választhatjuk; ekkor (26) alatt az α, β_1, β_2 együtthatók, s így τ is, változatlanok maradnak, és a (29) integrál invariáns.

Ha ismét a 0, 0, 1, 1 komponensekkel rendelkező p_0 vektort vesszük alapul, a kis csoport infinitezimális operátorai ismét az $M_{12}, M_{13}-M_{14}, M_{23}-M_{24}$ operátorok lesznek. Ezek M része $p=p_0$ esetén zérust ad; az utóbbi két operátor S része pedig

$$S_{13}-S_{14} = -i\xi_1 \left(\frac{\partial}{\partial \xi_3} + \frac{\partial}{\partial \xi_4} \right) + i(\xi_3 - \xi_4) \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \quad (30a)$$

$$S_{23}-S_{24} = -i\xi_2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi_3} + \frac{\partial}{\partial \xi_4} \right) + i(\xi_3 - \xi_4) \frac{\partial}{\partial \xi_2}. \quad (30b)$$

Itt az első tag, ha a $p=p_0$ -hoz tartozó ψ -re alkalmazzuk, (22a) folytán $\Xi_{\xi_1}\psi$ -t, illetve $\Xi_{\xi_2}\psi$ -t adja eredményül. A másodikként álló tagok eltűnnek a (22) egyenletek közül a másodikként a következményeképpen. Eszerint ψ nem invariáns a ξ tér $M_{13}-M_{14}$ és $M_{23}-M_{24}$ „eltolásaival” szemben, és az „impulzusok” négyzetösszege $(\xi_1^2 + \xi_2^2)\Xi^2 = \Xi^2$, a (22) egyenletek közül az utolsó folyományaképpen. Ugyanez W -nek is az értéke, P pedig zérus.

7. Az $O'(\Xi)$ osztály

Minthogy ezen utolsó eset tárgyalása követi az előző szakasz mintáját, a fő eredmények felsorolására szorítkozunk. A ξ vektor mellett bevezetünk egy diszkrét ζ spinváltozót, amely négy értéket vehet fel. A hullámegyenletek:

$$\gamma^k p_k \psi = 0, \quad g^{kl} p_k \xi_l \psi = 0, \quad g^{kl} \xi_k \xi_l \psi = -\psi, \quad (31)$$

$$p_k \partial \psi / \partial \xi_k = -i \Xi \psi. \quad (31a)$$

Az α és τ paraméterek bevezetése a fentiekhez hasonlóan történik. A normát

$$(\psi, \psi) = \int p_4^{-2} \sum |\varphi(p, 0, \tau)|^2 dp_1 dp_2 dp_3 d\tau \quad (32)$$

adja meg. [Vö. (18a) és (29).] Most is fennáll: $W\psi = \Xi^2 \psi$, $P\psi = 0$.

Megjegyzendő, hogy ezen egyenletek esetében a skalárszorzat egyszerű pozitív definit forma alakját ölti a koordinátatérben.

KÖNYVISMERTETÉS

G. Gergely: Ellipsometric Tables of the Si—SiO₂ System for Mercury and HeNe Laser Spectral Lines. Akadémiai Kiadó. 1972.

Az ellipszometria, a polarizációs spektrometriából kifejlődött önálló kísérleti tudományág. Elvi alapjai már a századfordulón ismertek voltak, komoly fejlődésnek azonban csak az elmúlt kb. másfél évtized alatt indult. A nagyarányú fejlődés alapja, a felületek és a vékonyrétegek fizikai és kémiai tulajdonságainak mélyebb megismerésére irányuló törekvés, ezen belül a félvezető eszközök terén végbement nagyarányú fejlődés. Alkalmazási területe állandóan bővül, a korszerű felületvizsgáló technikák (LEED, Auger spektroszkópia) kiegészítője, sőt újabban biológiai problémák megoldásánál is sikerrel alkalmazzák. A vékonyrétegek vizsgálatára alkalmazott más optikai eljárásokkal szemben (fotometria, interferometria) nagy előnye, hogy a rétegvastagság értéke mellett, a réteg törésmutatóját is megadja.

Az ellipszométeres mérés technika egyre szélesedő alkalmazási lehetőségei ellenére, nagyon kevés olyan munka jelent meg eddig, amely közvetlenül felhasználható lenne gyakorlati feladatok megoldására. A könyv tehát mind hazai, mind nemzetközi viszonylatban korszerű igényt kielégítő, hűzagpótló munka. Táblázatokba foglalva tartalmazza Si-ra növesztett SiO₂ film rétegvastagsága (Å), a filmen áthaladó fény fázisváltozása (°) és az ellipszométeren mért Δ és ψ értékek (°) közötti összefüggéseket a SiO₂ film törésmutatójával paraméterezve, $\varphi = 70^\circ$ beesési szög mellett. Az ellipszométeres adatokat 7 higanyvonalra (2537, 3131, 3341, 3650, 4046, 4358, 5461 Å) és a HeNe laser 6328 Å hullámhosszára közli. Az átfogott rétegvastagságtartomány: 0—8000 Å, a MOS és planár félvezetőtechnikában alkalmazott SiO₂ rétegvastagságtartománynak megfelelően (lépések: 0—400 Å között 20 Å, 400—1500 Å között 50 Å, 1500—8000 Å között 500 Å). Mivel a SiO₂ törésmutatója az előállítás körülményeitől függ, a táblázatok az $N_1 = 1,41 - 1,55$ törésmutatótartományban 0,01 lépésekben közlik az adatokat, valamennyi hullámhossznál feltételezve, hogy a SiO₂ abszorpciós koefficiense $k_1 = 0$. A Si komplex törésmutatóértékeit az irodalomból veszi. A táblázatok mellett a főbb eredményeket grafikonok foglalják össze, az ellipszométeres megoldásgörbék szokásos $\gamma-\psi$ ábrázolásában. A könyv ismerteti az ellipszometria alapegyenletét, annak megoldási menetét Δ -ra és ψ -ra, valamint a számítóképes megoldás folyamatára szimbólumát (flow chart of programming).

(Á. J.)

Atomic Collisions in Solids IV. Gordon and Breach Science Publishers. London, New York, Paris. 1972. Szerkesztők: B. Domeij, N. G. E. Johansson, K. Björkqvist, S. Andersen

A kötet az 1971-es, hasonló című galsldali konferencia teljes anyagát tartalmazza, amelynek tárgya a csatornahatás és a vele kapcsolatos, rendkívül szerteágazó jelenségek. A könyv elsősorban a szilárdtestfizikában alkalmazott magfizikai mérőmódszerekkel, főleg az ion-implantációval foglalkozó szakemberek érdeklődésére tarthat számot. Jelen publikációk már, kizárólag e témakörrel foglalkozó Rad. Effects című folyóiratban is megjelentek.

A kötet a konferencia témaköreinek megfelelően hét fő részre oszlik.

Az első, a legerjedelmesebb a csatornahatás általános fizikai vonásairól szóló előadásokat tartalmazza. (24 közlemény)

A második témakör az elsőnek egy részterületével, a kisenergiájú ionok csatornahatásával és az ilyen fajtájú problémák számítógépes szimulációjával foglalkozik. (5 közlemény)

A harmadik témakör a csatornahatás alkalmazásairól, elsősorban az ion-implantátumok vizsilyenfajtájú problémák számítógépes szimulációjával foglalkozik. (5 közlemény)
gátáról szóló előadásokat tartalmazza. (17 közlemény)

A negyedik a dechanneling a (csatornából történő kiszökés) részleteivel és mechanizmusával foglalkozik. (16 közlemény).

Az ötödik rész a sputtering, elsősorban a kisenergiájú nehéz ionok fizikájával foglalkozókat érdekl. (10 közlemény)

A hatodik témakör a kristályok felületéről szóródó ionok (5 közlemény) a hetedik pedig a kristályokba behatoló és az ott fékeződő ionok fizikai problémáival, a fékezőképesség kérdéseivel foglalkozik. (15 közlemény)

(M. G.)

A. M. Campbell, J. E. Evetts: *Critical currents in superconductors*. Taylor and Francis Ltd. London. 1972.

A szupravezetés történetének több mint hatvan esztendeje nagyjából két korszakot tartalmaz. Az első az, amikor a tiszta fémek szupravezetését, az I-es típusú szupravezetés jelenségeit vizsgálták a kutatók, a második kezdetét 1950-re lehet tenni, amikor megalkották a Ginzburg-Landau egyenleteket, amelyek a II-es típusú szupravezetők alapvető tulajdonságait írják le. Ez utóbbiak általában fémes ötvözetek, illetve vegyületek és nagy gyakorlati jelentőségüket az adja, hogy óriási áramok és mágneses terek jelenlétében is szupravezetők maradnak.

A legutóbbi évtized szilárd-test fizikájában nagy szerephez jutott a másodrendű szupravezetők kutatása és a széleskörű műszaki alkalmazások kimunkálása. Évenként többszáz idevonatkozó dolgozat jelenik meg a nemzetközi irodalomban és gyorsan szaporodik a szupravezetéssel foglalkozó monográfiák száma is. Közöttük előkelő helyet foglal el Campbell és Evetts munkája, amely aktuális témaválasztással, jó szerkezettel, kellően megválasztott ökonómiával rendelkezik.

Ha a mű tematikáját egyetlen mondatban szeretnénk összefoglalni, azt mondhatnánk, hogy a II-es típusú szupravezetők mágneses vortex szerkezetének sztatikai és dinamikai tulajdonságait tárgyalja. Felhasználja és röviden ismerteti a témakör irodalmát egészen 1972 nyaráig bezárólag.

Bevezetésen kívüli hét fejezetének témáját a címek érzékeltetik, emellett mindegyiknél felsoroljuk a tárgyalta fontosabb kérdéseket is:

1. A kevert állapot természete

(Az Abrikosov féle vortex-rács elmélet; a Ginzburg-Landau paraméterek mérése; egyensúlyi termodinamika, a fluxust mozgató erő, flux flow és transzport tulajdonságok, elaszticitás, fluxus-rács defektusok.)

2. Kritikus állapot egyenlet

(Egyenes és görbe vortex vonalak; erőmentes konfigurációk és longitudinális terek; a kritikus állapot egyenlet megoldásai; váltóáram veszteségek; kísérleti tények.)

3. A kritikus áram-sűrűség mérése

(Kritikus áram transzverzális térben; magnetizációs mérések; váltóáramú módszerek; a kritikus állapot egyéb módszerű vizsgálata; a feszültség kritérium.)

4. Más pinning paraméterek meghatározása

(Kis amplitúdójú váltóáramú kísérletek; flux creep; zaj mérések és a „fluxus köteg” probléma.)

5. Pinning erők és összegezésük

(Pinning pontok, vonalak és lapok által; a pinning küszöb; dinamikai és statisztikai közelítések; pinning centrumok koncentrált elrendezése; vonal erők; határfelületek; alacsony értékű pinning küszöb.)

6. Alapvető pinning kölcsönhatások

(Pinning a $G-L$ szabad energia segítségével; mágneses pinning kölcsönhatások; elasztikus energia révén fellépő pinning kölcsönhatások; a $G-L$ paraméter nyomásfüggése.)

7. Kísérleti tények

(A kísérleti eredmények analízise; az irreverzibilitás kezdete; felületek és határvonalak; nagy precipitációk; szemcse-határok; kölcsönhatási energia csúcsok; diszlokációk; peak-effektusok; rácshibából származó sztatikus pinning; technológiailag fontos anyagok.)

E felsorolás azt mutatja, hogy egy minden fontosabb kísérleti és elméleti kérdést felölelő, modern összefoglalást nyújt a könyv. Olvasása a szupravezetés jelenségeiben való előzetes jártasságot igényel. Ily módon elsősorban az e területen dolgozó kutatók számára jelent hatásos segítséget, de a fizika más témaköreinek művelői is haszonnal forgatják.

A mű anyagának szemléltetését sok, jóminőségű ábra és fotó szolgálja. A szép kivitelű könyv kiadása a Taylor and Francis Ltd. (London, 1972) gondos munkáját dicséri.

Kirschner István

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

Technikai szerkesztő: Turchányi György
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Sós Attila
A kézirat beérkezett: 1973. máj. 4. — Terjedelem; 8,75 (A/5) ív
73-2143 — Szegedi Nyomda

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

Matematikai, fizikai, csillagászati dolgozatokat, referátumokat, könyvismertetéseket, a Tudományos Minősítő Bizottságnak a III. Osztályra vonatkozó híreit s a III. Osztály híreit közli. Évenként egy kötet (kb. 40 ív) jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

A Közlemények előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 60 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488, külföldi megrendelések a „Kultúra”

Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,
1011 Budapest I., Fő utca 32.

Pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990 útján eszközölhetők.

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Lovas Rezső</i> : Rezonanciaállapotra vezető stripping reakciók elmélete	519
<i>Nagy Tibor</i> : Neutronokkal létrehozott, izomér állapotból spontán hasadó magok keletkezésére vezető reakciók vizsgálata	555

A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

<i>Valentine Bargmann és Wigner Jenő</i> : Relativisztikus hullámegyenletek csoportelméleti tárgyalása	605
--	-----

KÖNYVISMERTETÉS

<i>G. Gergely</i> : Ellipsometric Tables of the Si—SiO ₂ System for Mercury and HeNe Laser Spectral Line. (<i>A. J.</i>)	616
Atomic Collisions in Solids IV. (<i>M. G.</i>)	616
<i>A. M. Campbell and J. E. Evetts</i> : Critical currents in superconductors (<i>Kirschner István</i>)	617

A MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT 1972. ÉVI 21. KÖTETÉNEK TÁRGYMUTATÓJA

	oldal
<i>Tarján Imre</i> : Egykristályok előállítása	1
<i>Dong van Thanh, Lőrinczy András, Pataki György</i> : Rekombinációs folyamatok szilícium alapú MOS szerkezetekben	73
<i>Somogyi Antal</i> : Kozmikus Sugárzási Téli Iskola	177
<i>Marik Miklós</i> : A Nap mágneses tere	179
<i>Kóta József</i> : A kozmikus sugárzás terjedése a Naprendszerben	191
<i>Válas György</i> : A galaktikus kozmikus sugárzás modulációja a Naprendszerben	221
<i>Szemerédy Pál</i> : A Föld magnetoszférája	245
<i>Gombosi Tamás</i> : Bevezetés a sugárzási övezetek dipóluselméletébe	261
<i>Király Péter</i> : A kozmikus sugárzás eredete	291
<i>Várkonyi Zoltán</i> : A fehérjék fluoreszcenciájának néhány kérdéséről	311
<i>Hass András</i> : Megjegyzések a jelenkori hullámmechanikához	329
<i>Keszthelyi Lajos</i> : Modern nukleáris mérőműszerek a biológiában	335
<i>Hartmann Ervin</i> : Kristályok fizikai tulajdonságainak leírása	357
<i>Perjés Zoltán</i> : Twistor kvantálás	407
<i>Gyarmati Borbála</i> : A Gamow-állapotokról	465
<i>Lovas Rezső</i> : Rezonanciaállapotra vezető stripping reakciók elmélete	519
<i>Nagy Tibor</i> : Neutronokkal létrehozott, izomér állapotból, spontán hasadó magok keletkezésére vezető reakciók vizsgálata	555

A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

<i>Wigner Jenő</i> : Az inhomogén Lorentz-csoport unitér ábrázolásairól	21
<i>V. Bargmann</i> : A Lorentz-csoport irreducibilis unitér ábrázolásai	103
<i>Wigner Jenő</i> : Relativisztikus hullámegyenletek	387
<i>Lánczos Kornél</i> : Az új kvantummechanika kontinuumelméleti előállítása	501
<i>V. Bargmann és Wigner Jenő</i> : Relativisztikus hullámegyenletek csoportelméleti tárgyalása... ..	605

KÖNYVISMERTETÉS

<i>Fred H. Eisen és Lewis T. Chadderton</i> : Ion Implantation (<i>B. Á.</i>)	403
<i>James W. Corbett és George D. Watkins</i> : Radiation effects in semiconductors (<i>B. Á.</i>)	403
<i>J. I. Budnick és M. P. Kawatra</i> : Dynamical Aspects of Critical Phenomena (<i>Corradi Gábor</i>) .	403
<i>Heinz D. Gruschka és Franz Wecken</i> : Gasdynamic theory of detonation (<i>T. Gy.</i>).....	404

<i>Marvin M. Cohen</i> : Introduction to the Quantum Theory of Semiconductors (<i>T. Gy.</i>).....	404
<i>O. Madelung</i> : Festkörpertheorie II. Heidelberger Taschenbücher, Band 109. (<i>T. Gy.</i>).....	405
<i>R. D. Barnard</i> : Thermoelectricity in Metals and Alloys	515
<i>L. Collatz, G. Meinardus, H. Unger és H. Werner</i> : Interaktionsverfahren, Numerische Mathematik Approximationstheorie	515
<i>Stefan Fenyő</i> : Moderne mathematische Methoden in der Technik II.	516
<i>L. Collatz és G. Meinardus</i> : Numerische Methoden der Approximationstheorie.....	516
statistical Mechanics and Mathematical Problems. A Lecture Notes in Physics 20. kötete....	517
<i>G. Gergely</i> : Ellipsometric Tables of the Si—SiO ₂ System for Mercury and HeNe Laser Spectral Lines (<i>Á. J.</i>)	616
Atomic Collisions in Solids IV.	616
<i>A. M. Cambell, J. E. Evetts</i> : Critical currents in superconductors (<i>Kirschner István</i>).....	617

A MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT 1972. ÉVI 21. KÖTETÉNEK NÉVMUTATÓJA

	oldal
<i>Bargman V. és Wigner Jenő:</i> Relativisztikus hullámegyenletek csoportelméleti tárgyalása . . .	605
<i>Bargmann V.:</i> A Lorentz-csoport irreducibilis unitér ábrázolásai	103
<i>Dong van Thanh, Lőrinczy András, Pataki György:</i> Rekombinációs folyamatok szilícium alapú MOS szerkezetekben	73
<i>Gombosi Tamás:</i> Bevezetés a sugárzási övezetek dipóluselméletébe	261
<i>Gyarmati Borbála:</i> A Gamow-állapotokról	465
<i>Hass András:</i> Megjegyzések a jelenkori hullámmechanikához	329
<i>Hartmann Ervin:</i> Kristályok fizikai tulajdonságainak leírása	357
<i>Keszthelyi Lajos:</i> Modern nukleáris mérő módszerek a biológiában	335
<i>Király Péter:</i> A kozmikus sugárzás eredete	291
<i>Kóta József:</i> A kozmikus sugárzás terjedése a Naprendszerben	191
<i>Lánczos Kornél:</i> Az új kvantummechanika kontinuumelméleti előállítása	501
<i>Lovas Rezső:</i> Rezonanciaállapotra vezető stripping reakciók elmélete	519
<i>Lőrinczy András, lásd Dong</i>	73
<i>Marik Miklós:</i> A Nap mágneses tere	179
<i>Nagy Tibor:</i> Neutronokkal létrehozott, izomér állapotból spontán hasadó magok keletkezésére vezető reakciók vizsgálata	555
<i>Pataki György:</i> lásd <i>Dong</i>	73
<i>Perjés Zoltán:</i> Twistor kvantálás	407
<i>Somogyi Antal:</i> Kozmikus Sugárzási Téli Iskola	177
<i>Szemerédy Pál:</i> A Föld magnetoszférája	245
<i>Tarján Imre:</i> Egykristályok előállítása	1
<i>Válas György:</i> A galaktikus kozmikus sugárzás modulációja a Naprendszerben	221
<i>Várkonyi Zoltán:</i> A fehérjék fluoreszcenciájának néhány kérdéséről	311
<i>Wigner Jenő:</i> Az inhomogén Lorentz-csoport unitér ábrázolásairól	21
<i>Wigner Jenő:</i> Relativisztikus hullámegyenletek	387
<i>Wigner Jenő:</i> lásd <i>V. Bargmann</i>	605

